UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO

Laura Celeste Melo de Souza

Generalização do Problema Probabilístico de Travesseiro de Lewis Carroll

Recife

Maio de 2023

Laura Celeste Melo de Souza

Generalização do Problema Probabilístico de Travesseiro de Lewis Carroll

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Departamento de Matemática

Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Orientador: Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros

Recife

Maio de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S729g Souza, Laura Celeste Melo de
Generalização do problema probabilístico de travesseiro de Lewis Carroll / Laura Celeste Melo de Souza. - 2023.
50 f. : il.

Orientador: Kleber Napoleao Nunes de Oliveira Barros.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. Probabilidade. 2. Teorema de Bayes. 3. Problemas matemáticos. I. Barros, Kleber Napoleao Nunes de Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

Laura Celeste Melo de Souza

Generalização do Problema Probabilístico de Travesseiro de Lewis Carroll

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 11/05/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros (Orientador e Presidente)
Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

Prof. Frank Sinatra Gomes Da Silva (Examinador Externo)
Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

Prof. Clessius Silva (Examinador Interno)
Departamento de Matemática - UFRPE

A meu pai (in memoriam), por acreditar em mim, pelas noites que esperava no meio da estrada eu chegar das aulas, pela saudade que sinto.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, por me permitir chegar até aqui.

Agradeço a minha família, que sempre me incentivou e compreendeu minha ausência. Agradeço a Breno, meu namorado, por todo incentivo, apoio e por sempre ter acreditado em mim até quando eu desacreditava.

Agradeço ao professor Kleber Napoleão, por toda compreensão, orientação e paciência.

Ao professor Clessius Silva pelo incentivo durante o curso.

Aos amigos que fiz durante a graduação, em especial a Eduarda, Dayvid, Gabriel, Luciana, Lucas, Wilson, pelo apoio e por terem tornado os dias mais leves quando eu achava que tudo estava perdido.

“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)

Resumo

Neste trabalho apresentamos o Teorema de Bayes através de três problemas matemáticos, que são eles: O problema da caixa de Bertrand, o problema de Monty Hall e o problema de travesseiro nº 5 de Lewis Carroll, dando destaque a este último através de sua generalização. Inicialmente apresentamos um resumo do percurso histórico da probabilidade seguido por um resumo teórico. Logo após, mostramos um pouco da história dos três problemas juntamente à suas soluções através do Teorema de Bayes. Trata-se de um estudo de natureza teórica com resgate histórico. Os dados foram coletados através da consulta de várias fontes de informações. Por fim, constata-se que ao apresentar o Teorema de Bayes através de três problemas matemáticos e especialmente através da generalização do problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5, torna-o mais claro, constituindo-se uma outra possibilidade de abordagem, referidos ao estudo de noções probabilísticas.

Palavras-chave: Probabilidade, teorema de Bayes, problemas matemáticos.

Abstract

In this work we present Bayes' Theorem through three mathematical problems, which are: Bertrand's box problem, Monty Hall's problem and Lewis Carroll's pillow problem nº 5, highlighting the latter through its generalization. Initially we present a summary of the historical course of probability followed by theoretical results. After we show a little of the history of the three problems together with their solutions through the Theorem of Bayes. This is a study of a theoretical nature with historical recovery. Data were collected by consulting various sources of information. Finally, it appears that when presenting Bayes' Theorem through three mathematical problems and especially through the generalization of Lewis Carroll's pillow problem nº 5, it becomes clearer, constituting another possibility of approach, referred to the study of probabilistic notions.

Keywords: Probability, Bayes theorem, math problems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Astrágalo - dado de ossos 13
Figura 2 – Romanos jogando dados 13
Figura 3 – Estatueta de garota romana jogando Tali 13
Figura 4 – Gerolamo Cardano 14
Figura 5 – Niccolò Fontana Tartaglia 15
Figura 6 – Blaise Pascal 16
Figura 7 – Pierre de Fermat 16
Figura 8 – Abraham De Moivre 16
Figura 9 – Thomas Bayes 17
Figura 10 – Pierre-Simon Laplace 17
Figura 11 – Representação gráfica do teorema da probabilidade total 22
Figura 12 – Joseph Bertrand 24
Figura 13 – Monte Halparin (Monty Hall) 26
Figura 14 – Marilyn vos Savant 27
Figura 15 – Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll) 30
Figura 16 – Problema de Travesseiro nº 5 31

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados para vários valores de n e x em **P**$(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1)$. 39
Tabela 2 – Resultados obtidos onde inicialmente o saco possui apenas fichas pretas. 41
Tabela 3 – Alguns resultados encontrados a partir da generalização. 44

Sumário

Lista de ilustrações 8

1 INTRODUÇÃO 11
1.1 Objetivos 11

2 FUNDAMENTOS HISTÓRICOS E TEÓRICOS 13
2.1 Revisão de Probabilidade 18
2.1.1 Problema da Caixa de Bertrand 23
2.1.2 Problema de Monty Hall 26
2.2 Problema de Travesseiro de Lewis Carroll nº 5 30

3 METODOLOGIA 33

4 GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE TRAVESSEIRO DE LEWIS CARROLL Nº 5 34
4.1 O Problema de Travesseiro de Lewis Carroll nº 5 34
4.2 Generalização para n fichas e uma ficha branca adicionada 36
4.3 Generalização para n fichas e m fichas adicionadas. 40
4.4 Generalização para n fichas, m fichas adicionadas, onde em r tentativas retira-se B(y) fichas brancas, com repetição. 42
4.5 Discussão 46

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 47

REFERÊNCIAS 48

1 Introdução

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Sabe-se que a Teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que pesquisa e desenvolve modelos para o estudo dos mais diversos fenômenos aleatórios e que teve início na tentativa de compreensão das chances existentes nos jogos de azar, de acordo com Morgado et al. (2006). Diante disto, matemáticos deram contribuições importantes para o seu desenvolvimento. A construção da teoria da probabilidade não foi simples, e foi apenas através do esforço e aprendizado com a análise dos próprios erros, que ocorreu o seu progresso, conforme Batanero, Henry e Parzysz (2005).

É bastante comum encontrarmos exemplos envolvendo lançamento de moedas ao iniciar um estudo sobre probabilidade, e principalmente questionamentos em como calcular a probabilidade da moeda cair do lado coroa e ao resolver um cálculo bastante simples chegar ao resultado de 50%. Porém, esse cenário pode se alterar conforme a discussão, principalmente se os questionamentos forem gerados a partir dos eventos que aconteceram anteriormente. É pertinente afirmar que as probabilidades devem ser revistas à medida que as informações são alteradas ou chegam novas informações, afirma Silver (2013).

Diante desta perspectiva, são apresentados os seguintes problemas neste trabalho: O problema da caixa de Bertrand, o problema de Monty Hall e o problema de travesseiro nº 5 de Lewis Carroll. Apresenta-se também uma generalização deste último. Esses problemas são exemplos que envolvem o uso correto de probabilidades condicionais e que mostram que a intuição pode acabar nos levando a um outro resultado. É utilizado como ferramenta de apresentação e resolução desses problemas o Teorema de Bayes, que mostra como alterar as probabilidades a princípio tendo em vista novas evidências para obter probabilidades posteriormente.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral generalizar o problema de travesseiro nº 5 de Lewis Carroll.

Os objetivos específicos foram traçados a fim de atingir o objetivo geral, são eles:

- Revisar a teoria das probabilidades através de definições, exemplos e teoremas.
- Apresentar os três problemas: O problema da caixa de Bertrand; O problema de

Monty Hall; O problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5.

Quanto à estrutura, o texto possui 5 capítulos.

No capítulo inicial, apresenta-se a introdução e os objetivos do trabalho. No segundo capítulo, tem-se um resumo da trajetória histórica da probabilidade, seguido de uma revisão de probabilidade abrangendo definições, teoremas e exemplos. Enfatiza-se também neste capítulo os três problemas clássicos da Probabilidade e suas soluções a partir da aplicação do Teorema de Bayes, os problemas citados são: O problema da caixa de Bertrand; O problema de Monty Hall; O problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5.

No terceiro capítulo é retratado a descrição do processo de pesquisa deste trabalho. No quarto capítulo são apresentados os resultados através da generalização do problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5 apresentado anteriormente e a discussão relacionada a pesquisa sobre ele. No último capítulo são mostradas as conclusões obtidas e as possibilidades de ampliações para trabalhos futuros.

2 Fundamentos históricos e teóricos

Conforme Gadelha (2004), os jogos de azar têm sido parte da nossa civilização há milhares de anos. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C mostram pessoas jogando o que se acredita ser o jogo de Tali que era praticado com astrágalo (Figura 1). O astrágalo é um osso do calcanhar de um animal e é considerado o ancestral do dado moderno, ele possui "seis" lados, quatro deles não são idênticos. Cada lado era numerado com valores diferentes, os maiores recebiam o 3 e o 4, e os demais 1 e 6. Os números 2 e 5 não eram utilizados, de acordo com Viali (2008). Além de ser praticado para apostas, o jogo de Tali também era praticado para previsões do futuro, disputas e divisão de heranças (Figura 2 e 3). Queiroz (2007) afirma que nesse jogo havia a integração de uma dimensão mística ou psicológica do acaso.

Figura 1 – Astrágalo - dado de ossos

Fonte: Baader (2020)

Figura 2 – Romanos jogando dados

Fonte: Shauser (2018)

Figura 3 – Estatueta de garota romana jogando Tali

Fonte: Trust (2020)

Platão (428-348 a.C.) e seu discípulo Aristóteles (384-322 a.C.) discutiram sobre a ideia de chances. Tempos depois, muitos estudiosos se ocuparam com problemas e situações desse tipo, com variáveis para noções de acaso, chamadas de aleatórias, segundo Debnath e Basu (2015). O acaso é definido por Viali (2008), sendo "um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno". A abordagem matemática da Probabilidade, referente ao azar ou risco, iniciou há mais ou menos 500 anos. A probabilidade é definida por Viali (2008) sendo "o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não

determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o acaso representa um papel preponderante.”

De acordo com Moraes et al. (2014), os primeiros trabalhos relevantes a respeito da probabilidade foram dos matemáticos italianos Gerolamo Cardano (1501 - 1576) e Niccolò Fontana Tartaglia (1499 - 1557). Conforme Eves (2011), Cardano (Figura 4) é um personagem extraordinário da História da Matemática, pois estudou e escreveu sobre aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Além disso, era apaixonado por jogos de azar, e como resultado escreveu um tratado sobre apostas intitulado de *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar), que foi publicado em 1663. Esse médico e também matemático, foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, segundo Viali (2008).

Figura 4 – Gerolamo Cardano

Fonte: Robertson (1998)

Moraes et al. (2014) afirma também que, o também matemático italiano, Galileu Galilei (1564 - 1642), que possivelmente havia tido conhecimento dos trabalhos e dos resultados de Cardano, fez um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados em sua obra *Sopra le scorpeta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), contribuindo assim nos estudos sobre a probabilidade.

Niccolo Fontana (Figura 5), também conhecido como Tartaglia, em sua obra intitulada de *General Trattato di Numeri et Misure* (Tratado geral sobre números e medidas), publicada em 1556, aborda o problema de pontos (divisão de aposta) proposto pelo italiano Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 - 1517). Este problema também é encontrado no Livro dos jogos de azar de Cardano. O problema de pontos, segundo Moraes et al. (2014), consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do seu término. Sendo o problema descrito dessa maneira: “Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla (jogo de bola medieval). Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos

e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? ”Eves (2011).

Figura 5 – Niccolò Fontana Tartaglia

Fonte: Robertson (2005)

De acordo com Queiroz (2007), o problema de pontos pode ser considerado o problema fundador do Cálculo de Probabilidades. Mesmo sendo discutido por Cardano e Tartaglia, este problema obteve um avanço significativo em 1654, quando Antonie Gombald (1610 - 1685) que se autodenominava cavaleiro de Méré, um intelectual francês apaixonado por jogos, o expôs a Blaise Pascal (1623 - 1662). Conforme Gadelha (2004), neste mesmo ano, 1654, Pascal (Figura 6) iniciou uma troca de correspondências com Pierre de Fermat (1601-1665) no qual foi estabelecido um método sistemático para o cálculo de probabilidades e solução para o problema de Pacioli. Fermat (Figura 7) aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético, que hoje é conhecido como o triângulo de Pascal. O triângulo aritmético já existia há mais de 600 anos, mas recebeu esse nome porque Pascal descobriu novas propriedades nele, relata Boyer e Merzbach (2019). Conforme Silva (2020), historiadores expõem que esse padrão de números teria surgido no contexto dos estudos indianos sobre análise combinatória e de estudos gregos sobre números figurados, enquanto o padrão numérico triangular, juntamente com várias de suas propriedades, já eram conhecidos nas culturas árabes e chinesas medievais.

Diante da troca de correspondências entre os estudiosos franceses, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, Calabria e Cavalari (2013), consideram esse período como o marco do início da Teoria das probabilidades. Segundo Viali (2008), o holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695) após ter se informado sobre o assunto que motivou as trocas de cartas entre Pascal e Fermat, em uma viagem a Paris em 1655, ao voltar à Holanda, ele escreve um pequeno trabalho intitulado de *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (O raciocínio nos jogos de azar), que seria a primeira obra impressa sobre a Teoria da Probabilidade.

Figura 6 – Blaise Pascal

Fonte: Robertson (1996)

Figura 7 – Pierre de Fermat

Fonte: Robertson (2002)

Em 1718, o matemático francês, Abraham De Moivre (Figura 8) (1667 - 1754), publicou o livro intitulado de *Doctrine of Chances* (Doutrina da probabilidade), que discutia sobre a teoria do acaso, onde expôs a definição de independência e problemas relacionados com dados e outros jogos, por exemplo, a probabilidade de tirar bolas de cores diferentes de uma urna (FERREIRA; TAVARES; TURKMAN, 2002). De acordo com Queiroz (2007), Jakob Bernoulli (1654 - 1705), matemático suíço, foi o primeiro a dar uma definição clássica de probabilidade, onde se afirma que "A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis". Mas essa definição foi consolidada quase um século depois, em 1814, na obra *Essai Philosophique sur les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre Probabilidade) por Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827). Os livros de Bernoulli e De Moivre foram as contribuições mais importantes no período inicial da teoria da probabilidade, segundo Moraes et al. (2014).

Figura 8 – Abraham De Moivre

Fonte: Robertson (2004)

O matemático e teólogo Thomas Bayes (1702 - 1761), segundo Stein et al. (2000), foi o primeiro a usar a probabilidade indutiva. Bayes (Figura 9) registrou suas descobertas sobre a probabilidade e no ano de 1763, teve sua obra póstuma publi-

cada por Richard Price, intitulada por *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances* (Ensaio para Resolver um Problema na Doutrina das Probabilidades), esta obra continha a fórmula do Teorema de Bayes. Maia (2021) afirma que o Teorema de Bayes é uma das principais ferramentas que temos para "refinar" uma previsão probabilística (probabilidade a priori) quando novos eventos, em geral não independentes, acontecem. O raciocínio Bayesiano é baseado na conjectura de que as quantidades de interesse são controladas por distribuições probabilísticas e que decisões ótimas podem ser tomadas através do raciocínio sobre essas probabilidades somado aos dados observados (ISLABAO; CAMPOS; TEDESCO, 2003).

O tratado Théorie Analytique des Probabilités (Teoria Analítica das Probabilidades), escrito por Laplace, foi publicado no ano de 1812, em dois volumes, com base em trabalhos que desenvolveu entre 1771 e 1786. Os fundamentos da teoria de probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma que se manteve praticamente sem alterações até o início do século XX. Esta obra incluiu as aplicações de probabilidade na teoria de análise de erros de medições desenvolvidas inicialmente pelo matemático inglês Thomas Simpson (1730 - 1761) em 1756, conforme Gadelha (2004). Em 1774, Laplace descobriu o teorema de Bayes de forma independente e ele progrediu bastante, segundo Stigler (1986). A fórmula de Bayes alcançou um destaque maior após estes trabalhos.

Figura 9 – Thomas Bayes

Fonte: Robertson (2004)

Figura 10 – Pierre-Simon Laplace

Fonte: Robertson (1999)

Conforme Tomaz (2007), na atualidade os estudos referentes à teoria da probabilidade não se aplicam apenas em apostas de jogos de azar como em meados do século XVI, mas principalmente nos estudos direcionados a obter probabilidades de acontecimentos futuros.

Na seção a seguir, serão apresentados definições, exemplos e teoremas, retirados das seguintes obras: Bertsekas e Tsitsiklis (2000), Roussas (1997) e Hsu (1996), a fim de realizar uma revisão sobre a probabilidade.

2.1 Revisão de Probabilidade

Definição 1. Todo modelo probabilístico envolve um processo não determinístico subjacente, chamado de experimento aleatório ε, que produzirá exatamente um dos vários resultados possíveis. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado de **espaço amostral** do experimento, e é denotado por Ω.

Definição 2. Um subconjunto do espaço amostral, ou seja, uma coleção de possíveis resultados, é chamado de **evento.**

Definição 3. Considere um experimento com resultados finitos igualmente prováveis. Então a **definição clássica de probabilidade** do evento A, denotado **P**(A), é definido por

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

em que | | representa a cardinalidade do conjunto A.

Suponha que o espaço amostral tem um número finito, n, de elementos, $\Omega = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, Se para todo i, $1 \leq i \leq n$,

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

isto é, todos os elementos do espaço amostral tem mesma probabilidade, chamamos o espaço de equiprovável.

Exemplo 1. Considere o lançamento de um par de dados de 4 faces. Admitindo que os dados são honestos e interpretando essa suposição como que cada um dos dezesseis resultados possíveis, isto é, o espaço amostral $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4\}$. Perceba que para calcular a probabilidade de um evento, deve-se contar o número de elementos do evento e dividir por 16 (o número total de possíveis resultados). A seguir estão algumas probabilidades de eventos calculadas utilizando a definição clássica:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\{\text{a soma das jogadas ser par}\}\big) &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\
\mathbf{P}\big(\{\text{a soma das jogadas ser ímpar}\}\big) &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\
\mathbf{P}\big(\{\text{o primeiro lançamento ser igual ao segundo}\}\big) &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\
\mathbf{P}\big(\{\text{o primeiro lançamento ser maior que o segundo}\}\big) &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\
\mathbf{P}\big(\{\text{pelo menos uma jogada ser maior que 4}\}\big) &= \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

Definição 4. (Axiomática de Kolmogorov) Uma função de probabilidade denotada por **P** é uma função que atribui a cada evento A um número denotado por **P**(A), chamado de probabilidade de A, e que satisfaz os seguintes requisitos:

1. **P** não é negativo, isto é, **P**$(A) \geq 0$, para todo evento A.
2. A probabilidade de todo o espaço amostral Ω é igual a 1, ou seja, **P**(Ω) = 1.
3. Se $A_1, A_2, ...$ é uma sequência infinita de eventos mutuamente exclusivos em Ω ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Definição 5. (Probabilidade Condicional) Sejam A e $B \subset \Omega$, definimos a probabilidade condicional de A, dado que B ocorreu, denotado por **P**$(A|B)$

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\text{número de elementos de } A \cap B}{\text{número de elementos de } B}.$$

De forma generalizada,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B) > 0. \tag{2.1}$$

A Probabilidade Condicional nos fornece uma maneira de raciocinar sobre o resultado de um experimento, baseado em informações parciais. Alguns exemplos de situações em que ela é utilizada:

a) Em um experimento envolvendo duas jogadas sucessivas de um dado, você é informado que a soma dos dois lançamentos é 9. Qual é a probabilidade de que o primeiro lançamento tenha sido um 6?

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa ter uma doença dado que um teste médico foi negativo?

c) Um ponto aparece em uma tela de radar. Qual a probabilidade de corresponder a uma aeronave?

Exemplo 2. Uma moeda honesta é lançada três vezes sucessivas. Desejamos encontrar a probabilidade condicional **P**$(A|B)$ quando A e B são os eventos: A = aparecem mais caras do que coroas, B = o primeiro lançamento é uma cara. Sendo H : cara e T : coroa, temos que o espaço amostral consiste de oito elementos,

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\},$$

que supomos ser igualmente provável. O evento B consiste nos quatro elementos: HHH, HHT, HTH, HTT, então sua probabilidade é:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{4}{8}.$$

O evento $\mathbf{P}(A \cap B)$ consiste nos três elementos HHH, HHT, HTH, logo sua probabilidade é:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Utilizando a fórmula da probabilidade condicional (2.1), temos que:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}.$$

Proposição 1. ***(Regra do Produto)*** *Assumindo que todos os eventos condicionantes têm probabilidade positiva, temos que*

$$\boldsymbol{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2|A_1)\boldsymbol{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...\boldsymbol{P}(A_n|\cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

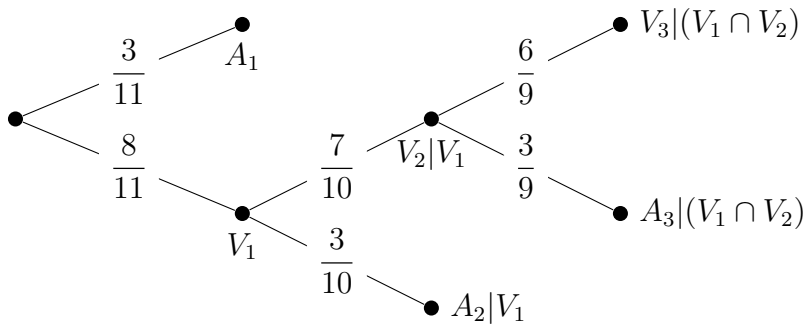
Muitos experimentos têm naturalmente um caráter sequencial, como vimos no Exemplo 2, ou, por exemplo, observar o valor de uma ação em cinco dias. Uma descrição sequencial baseada em árvore é considerada útil muitas vezes para descrever o experimento e o espaço amostral associado. Um diagrama em árvore é formado por nós, caracterizado por pontos que representam eventos, e esses nós são unidos por segmentos de reta, chamados de ramos ou galhos, que indicam a ordem sequencial de ocorrência dos eventos. Podemos visualizar no exemplo a seguir:

Exemplo 3. Uma urna contém 3 bolas azuis e 8 bolas verdes. Suponha que são sorteadas três bolas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de que sejam retiradas 3 bolas verdes?

Considerando os eventos: V_1 = a primeira bola sorteada é verde; V_2= a segunda bola sorteada é verde; V_3= a terceira bola sorteada é verde. Considere também os eventos A_1 = a primeira bola sorteada é azul; A_2 = a segunda bola é azul e A_3 = a terceira bola é azul.

A probabilidade de retirar a primeira bola e ela ser verde é $\frac{8}{11}$. Visto que o evento V_1 ocorreu, temos que a probabilidade da segunda bola ser sorteada e ser verde é $\frac{7}{10}$. Dado que os eventos V_1 e V_2 ocorreram, a probabilidade de V_3 acontecer é $\frac{6}{9}$.

O diagrama em árvore a seguir ilustra as possibilidades.



Portanto,

$$\mathbf{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{56}{165} = 33\%.$$

Definição 6. (Independência de dois eventos) Dois eventos A e B são chamados independentes, se a informação da ocorrência de B não altera a probabilidade atribuída ao evento A, ou seja,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{2.2}$$

Alternativamente, podemos aplicar a igualdade acima na fórmula da probabilidade condicional (2.1), para obter:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A). \tag{2.3}$$

Definição 7. (Independência de vários eventos) Se $\{A_i, i = 1, 2, ..., n\}$ é uma sequência de eventos independentes, então

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbf{P}(A_i),$$

em que S é uma coleção discreta de índices, com i pertencente a S.

Exemplo 4. *A independência de pares não implica independência de vários eventos.* Considere entre todos os eventos, dois lançamentos de moedas independentes e os seguintes eventos:

$$H_1 = \{\textit{o primeiro lançamento é cara}\},$$
$$H_2 = \{\textit{o segundo lançamento é cara}\},$$
$$D = \{\textit{os dois lançamentos têm resultados diferentes}\}.$$

Pela definição de independência de dois eventos, temos que os eventos H_1 e H_2 são independentes. Para ver que H_1 e D são independentes, nós temos que:

$$\mathbf{P}(D|H_1) = \frac{\mathbf{P}(H_1 \cap D)}{\mathbf{P}(H_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(D).$$

Da mesma forma, H_2 e D são independentes. Por outro lado, temos:

$$\mathbf{P}(H_1 \cap H_2 \cap D) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(H_2) \cdot \mathbf{P}(D),$$

e esses três eventos não são independentes.

Teorema 1. (Teorema da Probabilidade Total) Sejam A_1, ..., A_n eventos disjuntos que formam uma partição[1] do espaço amostral (cada resultado possível está incluído em um e apenas um dos eventos $A_1, ..., A_n$) e considere que $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall$ *i = 1, ..., n.* Então, para qualquer evento B, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \cdot \mathbf{P}(B|A_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

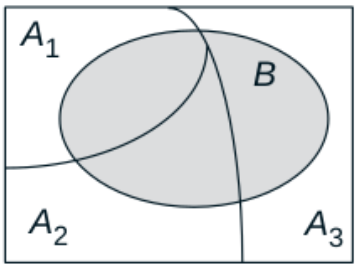


Figura 11 – Representação gráfica do teorema da probabilidade total

Exemplo 5. Em um torneio de xadrez a probabilidade de ganhar um jogo é 0,3 contra metade dos jogadores (chamaremos de tipo 1); 0,4 contra um quarto dos jogadores (chamaremos de tipo 2); e 0,5 contra o quarto restante dos jogadores (chamaremos de tipo 3). Considere que um oponente seja escolhido aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ganhar desse adversário?

Seja A_i o evento de jogar com o oponente do tipo i. Temos que:

$$\mathbf{P}(A_1) = 0,5; \qquad \mathbf{P}(A_2) = 0,25; \qquad \mathbf{P}(A_3) = 0,25.$$

Seja B o evento para ganhar. Temos

$$\mathbf{P}(B|A_1) = 0,3; \qquad \mathbf{P}(B|A_2) = 0,4; \qquad \mathbf{P}(B|A_3) = 0,5.$$

Utilizando o Teorema da Probabilidade Total (2.4), temos que a probabilidade de ganhar é:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(B|A_2) + \mathbf{P}(A_3) \cdot \mathbf{P}(B|A_3) \\ &= 0,5 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,5 \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

[1] Uma partição consiste na divisão do espaço amostral em eventos cuja interseção é vazia, isto é, eventos mutuamente exclusivos e em que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Teorema 2. (Teorema de Bayes) Sejam $A_1, ..., A_n$ eventos disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, e suponha que $\mathbf{P}(A_i) > 0$, para todo i. Então, para qualquer evento B tal que $\mathbf{P}(B) > 0$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbf{P}(A_i)\ \mathbf{P}(B|A_i)}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A_i)\ \mathbf{P}(B|A_i)}{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1) + ... + \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B|A_n)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Exemplo 6. Retornando ao problema do xadrez do **Exemplo 5**, temos que A_i é o evento de obter um oponente do tipo i, e

$$\mathbf{P}(A_1) = 0,5; \qquad \mathbf{P}(A_2) = 0,25; \qquad \mathbf{P}(A_3) = 0,25.$$

Além disso, B é o evento de ganhar, e

$$\mathbf{P}(B|A_1) = 0,3; \qquad \mathbf{P}(B|A_2) = 0,4; \qquad \mathbf{P}(B|A_3) = 0,5.$$

Suponha que você ganhe. Qual é a probabilidade de você ter jogado contra um oponente do tipo 1?
Usando o Teorema de Bayes (2.5), temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1|B) &= \frac{\mathbf{P}(A_1)\cdot\ \mathbf{P}(B|A_1)}{\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\cdot\mathbf{P}(B|A_2) + \mathbf{P}(A_3)\cdot\mathbf{P}(B|A_3)} \\ &= \frac{0,5\cdot 0,3}{0,5\cdot 0,3 + 0,25\cdot 0,4 + 0,25\cdot 0,5} \\ &= 0,4.\end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos dois problemas semelhantes ao problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5 e suas soluções através do Teorema de Bayes.

2.1.1 Problema da Caixa de Bertrand

Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) foi um matemático francês que trabalhou nas áreas de teoria dos números, geometria diferencial e teoria da probabilidade. Em seu livro *Calcul des Probabilités* (BERTRAND, 1889), foi apresentado pela primeira vez o paradoxo da caixa de Bertrand.

Figura 12 – Joseph Bertrand

Fonte: Wikipedia (2022)

2. Trois coffrets sont d'apparence identique. Chacun a deux tiroirs, chaque tiroir renferme une médaille. Les médailles du premier coffret sont en or; celles du deuxième coffret en argent; le troisième coffret contient une médaille d'or et une médaille d'argent.

On choisit un coffret; quelle est la probabilité pour trouver, dans ses tiroirs, une pièce d'or et une pièce d'argent?

Paradoxo da caixa de Bertrand no livro (BERTRAND, 1889)

"Três caixas são idênticas na aparência. Cada uma possui duas gavetas, cada gaveta contém uma medalha. As medalhas da primeira caixa são de ouro; as da segunda caixa, são de prata; na terceira caixa contém uma medalha de ouro e uma medalha de prata. Escolhemos uma caixa: qual é a probabilidade de encontrar, em suas gavetas, uma moeda de ouro e uma moeda de prata?" - Tradução do autor

Representação da caixa de Bertrand

Esse paradoxo geralmente é solucionado a partir do seguinte raciocínio: Depois de escolher uma caixa ao acaso e abrir uma gaveta, qualquer que seja a medalha encontrada, haverá apenas duas opções: (i) Escolhe-se a caixa com duas medalhas de ouro; ou (ii) Escolhe-se a caixa com uma medalha de ouro e uma medalha de prata. Destas duas opções, uma é favorável para a caixa cujas medalhas são diferentes. Sendo assim, a probabilidade de escolher a caixa que possui em suas gavetas, uma medalha de ouro e uma medalha de prata é igual a 1/2. Porém, está incorreto, pois este paradoxo possui uma solução contra intuitiva.

Para sua solução é utilizado o Teorema de Bayes (2.5). Sendo as caixas numeradas de 1 a 3, respectivamente C1, C2 e C3. Suponha que uma pessoa abre a caixa

1, em seguida abre uma gaveta dentro da caixa 1 e encontra uma moeda de ouro. Qual é a probabilidade de que a caixa 1 contenha uma medalha de ouro e uma medalha de prata? Temos que C_1, C_2 e C_3 são os eventos onde se abrem as gavetas das caixas, e OO, PP e OP os eventos onde as medalhas (Ouro, Ouro), (Prata, Prata) e (Ouro, Prata), respectivamente, estão dentro da gaveta da caixa C_i.

Inicialmente a probabilidade de escolha de uma caixa é $\frac{1}{3}$, ou seja

$$\mathbf{P}(OO) = \mathbf{P}(PP) = \mathbf{P}(OP) = \frac{1}{3}.$$

A probabilidade da pessoa abrir a gaveta restante da caixa 1 e obter (Ouro, Ouro), é:

$$\mathbf{P}(C_1|OO) = 1.$$

A probabilidade da pessoa abrir a gaveta restante da caixa 1 e obter as medalhas (Ouro, Prata), é

$$\mathbf{P}(C_1|OP) = \frac{1}{2},$$

pois há duas possibilidades, a caixa com as gavetas que contém as duas medalhas de ouro e a caixa que contém as gavetas com uma medalha de ouro e uma medalha de prata.

E no último caso, temos que a probabilidade da pessoa abrir a gaveta restante da caixa e obter as medalhas (Prata, Prata), é:

$$\mathbf{P}(C_1|PP) = 0,$$

pois já sabemos que a pessoa retirou a primeira medalha de ouro. Perceba que:

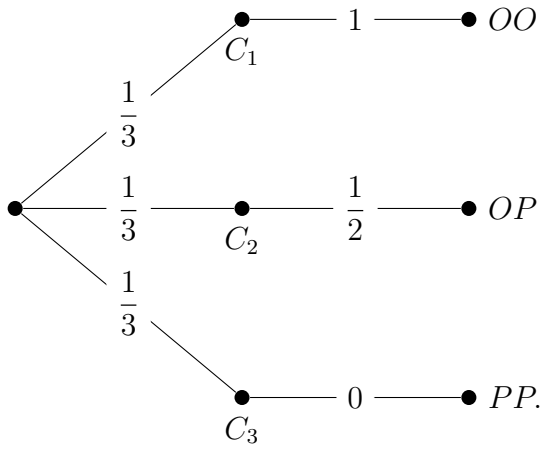
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C_1) &= \mathbf{P}(C_1|OO)\cdot\mathbf{P}(OO) + \mathbf{P}(C_1|PP)\cdot\mathbf{P}(PP) + \mathbf{P}(C_1|OP)\cdot\mathbf{P}(OP)\\ &= 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Bayes 2.5, temos:

$$\mathbf{P}(OP|C_1) = \frac{\mathbf{P}(C_1|OP)\cdot\mathbf{P}(OP)}{\mathbf{P}(C_1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Obtendo assim a resposta correta para este paradoxo, onde a probabilidade é igual a $\frac{1}{3}$.

A seguir temos uma representação da solução do paradoxo da caixa de Bertrand através do diagrama de árvore.



2.1.2 Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall, também conhecido por paradoxo de Monty Hall, nome concebido pelo estatístico Steve Selvin, é um problema matemático que surgiu na década de 1960, no game show chamado Let's Make a Deal (Vamos fazer um acordo). O paradoxo possui esse nome devido ao nome artístico de um dos apresentadores do programa, o Monte Halperin, conhecido como Monty Hall.

Figura 13 – Monte Halparin (Monty Hall)

Fonte: Usatoday (2017)

O jogo no programa consiste em: Inicialmente o apresentador Monty Hall exibe três portas numeradas, onde o competidor poderá escolher uma das três. Atrás de uma das portas se encontra um prêmio (um carro), enquanto atrás das outras duas portas, há prêmios de pouco valor. Após o competidor escolher uma das três portas, o apresentador, sabendo onde está o prêmio de maior valor, abre uma porta que possui um prêmio de pouco valor. Posteriormente questiona o competidor se ele quer continuar com a porta escolhida ou se quer trocar de porta. A questão paradoxal é: O competidor possui vantagem se mudar a sua escolha inicial? Matematicamente, fará diferença manter a porta inicial ou trocar?

A resposta para esse problema geralmente é dada intuitivamente, onde é considerado pelo competidor que cada porta possui uma probabilidade igual e chega-se à

conclusão de que a escolha da mudança de porta não possui importância e o competidor se mantém com sua escolha inicial. Ou seja, se uma porta é aberta, sobram duas, onde há ½ de chance de fazer a escolha entre uma ou outra porta. O contraditório é dizer que se ao trocar de porta, as chances de encontrar o prêmio de maior valor são dobradas. A solução do problema revela que se um jogador muda para outra porta ele possui ⅔ de chance de ganhar, porém, isso é um efeito contra-intuitivo de mudar a escolha de portas.

Este problema, em um formato semelhante apareceu na edição da revista acadêmica *American Statistician*, na seção *Letters to the Editor*, no ano de 1975, onde foi resolvido por Steve Selvin. Contudo, este problema, só possuiu uma maior visibilidade após 15 anos, quando foi publicado pela revista *Parade* como uma pergunta de um leitor na coluna *Ask Marilyn* (Pergunte a Marilyn) de Marilyn vos Savant, na seguinte forma:

"Suponha que você esteja em um game show e tenha a escolha de três portas: atrás de uma porta está um carro; atrás das outras, cabras. Você escolhe uma porta, digamos a nº 1, e o apresentador, que sabe o que está atrás das outras portas, abre outra porta, digamos a nº 3, que tem uma cabra. Ele então lhe diz: Você quer escolher a porta nº 2? É vantajoso para você fazer a troca?"

Figura 14 – Marilyn vos Savant

Fonte: Serena (2022)

Savant é uma colunista de revista americana que foi citada no *Guinness Book of World Records Hall of Fame* em 1988, como a mulher com o quociente de inteligência (QI) mais alto do mundo. O Guinness citou o desempenho dela no ano de 1956, onde em seu teste, obteve uma pontuação de 228. Em 1990, a categoria *maior QI* foi retirada do livro, pela incapacidade em apontar um único proprietário do recorde.

Marilyn respondeu a pergunta do leitor, afirmando que é mais vantajoso trocar de porta. Caso se mantenha na primeira porta há 1/3 de chance de ganhar, mas tro-

cando de porta se tem 2/3 de chance de ganhar. De acordo com o Jornal *The New York Times*, desde que ela deu essa resposta, Savant estima ter recebido 10.000 cartas, onde em 92% do público geral discordavam dela e 65% das cartas das universidades eram contra a sua resposta. As críticas mais intensas vinham de matemáticos e cientistas.

"Talvez as mulheres olhem para os problemas de matemática de forma diferente dos homens."

Don Edwards. Sunriver, Oregon

"Tenho sido um leitor fiel de sua coluna e, até agora, não tive motivos para duvidar de você. No entanto, neste assunto (para o qual tenho experiência), sua resposta está claramente em desacordo com a verdade."

James Rauff, Ph.D. Universidade Milikin

Após muitas cartas recebidas, Savant decidiu responder o problema de Monty Hall com outra explicação, sugerindo desta vez que fossem feitas muitas tentativas. Ainda assim, continuou recebendo cartas com críticas, mas também começou a receber elogios.

"Minha turma se divertiu muito vendo sua teoria ganhar vida. Eu gostaria que você estivesse aqui para testemunhar isso. A alegria deles é o que faz o ensino valer a pena."

Pat Pascoli, Park View School Wheeling, West Virginia

"A melhor parte foi ver os olhares nos rostos dos alunos enquanto seus números eram contados. Os resultados foram emocionantes!"

Patricia Robinson, Ridge High School Basking Ridge, Nova Jersey

A solução para o Problema de Monty Hall, se dá através do Teorema de Bayes (2.5), pois descreve probabilidades relacionadas a um evento, dado que outro evento ocorre. Note que se o competidor escolher a porta 1, temos que P_1, P_2 e P_3 são os eventos onde o carro está atrás da porta P_i, além de $P(P_i)$ ser a probabilidade do evento P_i acontecer e temos que A_1, A_2 e A_3 são os eventos onde Monty Hall abre a porta A_i. Inicialmente a probabilidade do carro estar na porta 1, 2 ou 3 é $\frac{1}{3}$, vamos agora supor que o competidor escolha a porta 1. Avaliando as probabilidades de Monty Hall abrir a porta A_2, temos:

P$(A_2|P_1) = \frac{1}{2}$, pois Hall pode escolher abrir a porta 2 ou a porta 3.

P$(A_2|P_2) = 0$, pois Hall não pode abrir a porta que contém o prêmio.

P$(A_2|P_3) = 1$, pois Hall não possui escolha, já que não pode abrir a porta que contém o prêmio e a outra porta já foi escolhida pelo competidor.

Perceba que

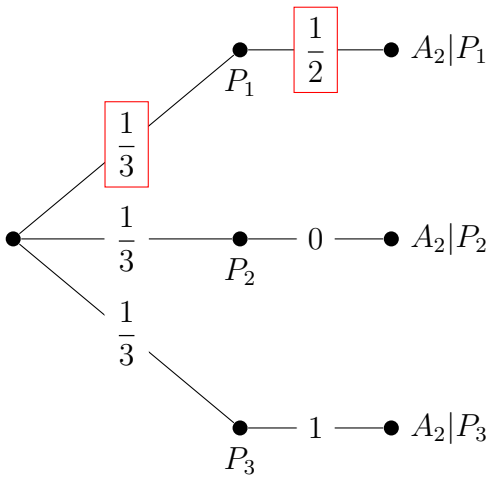
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_2|P_1)\cdot\mathbf{P}(P_1) + \mathbf{P}(A_2|P_2)\cdot\mathbf{P}(P_2) + \mathbf{P}(A_2|P_3)\cdot\mathbf{P}(P_3)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Bayes 2.5, temos:

$$\mathbf{P}(P_1|A_2) = \frac{\mathbf{P}(A_2|P_1)\cdot\mathbf{P}(P_1)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Logo, se o competidor manteve a escolha na porta 1, então a probabilidade do competidor encontrar o prêmio na porta 1, onde o apresentador abriu a porta 2 e prêmio se encontra na porta 1 é $\frac{1}{3}$.

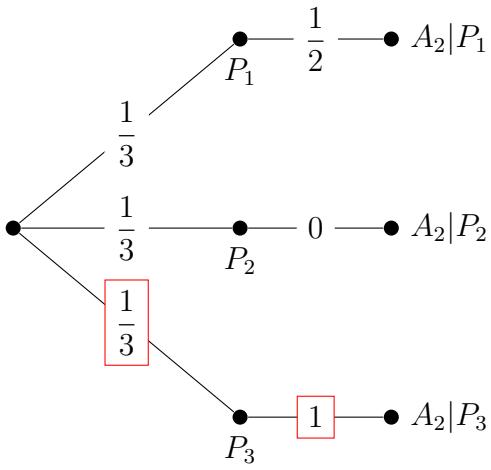
Esse resultado pode ser observado a seguir através de um diagrama em árvore.



Se o competidor mudar sua escolha e ir para a porta 3, e o apresentador abriu a porta 2, temos que a probabilidade é:

$$\mathbf{P}(P_3|A_2) = \frac{\mathbf{P}(A_2|P_3)\cdot\mathbf{P}(P_3)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Podemos visualizar esse resultado no diagrama em árvore abaixo:



2.2 Problema de Travesseiro de Lewis Carroll nº 5

Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido pelo seu pseudônimo Lewis Carroll, foi um romancista, contista, fabulista, poeta e matemático.

Figura 15 – Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)

Fonte: wikipedia (2004)

Carroll é o autor do clássico livro infantil *Alice in Wonderland* (Alice no País das Maravilhas), e também publicou vários livros de matemática, incluindo o livro *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and a Tangled Tale* (As recreações matemáticas de Lewis Carroll: problemas de travesseiro e um conto emaranhado), CARROLL (1958), onde encontramos o problema de travesseiro nº 5 que diz:

Figura 16 – Problema de Travesseiro nº 5

5. (19, 31)

A bag contains one counter, known to be either white or black. A white counter is put in, the bag shaken, and a counter drawn out, which proves to be white. What is now the chance of drawing a white counter? [8/9/87

Imagem retirada do livro: The Mathematical Recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and a Tangled Tale.

Tradução:
"Um saco contém uma ficha, conhecida por ser branca ou preta. Uma ficha branca é colocada, o saco é sacudido e uma ficha é retirada, o que prova ser branca. Qual é agora a chance de retirar uma ficha branca?"

Conta-se que ao se deitar e não conseguir dormir por ser tomado por pensamentos céticos, blasfemos ou profanos. Carrol, então, iniciou a prática de resolver problemas matemáticos e assim esquecer tais pensamentos mundanos e conseguir dormir. O problema nº 5 foi inventado e resolvido por ele no dia 08/09/1887. (NUMBERPHILE, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=n2Kp3toDJ9c)

Inicialmente este problema parece ser bastante simples, o que pode nos levar a pensar que a probabilidade de se retirar uma ficha branca seja $\frac{1}{2}$, pois há a possibilidade de supor que o estado do saco, após a operação, é necessariamente idêntico ao seu estado anterior. Porém, esse pensamento não está correto.

Temos que FB e FP são os eventos onde se retiram do saco uma ficha branca e uma ficha preta, respectivamente. Seja OB e OP os eventos onde a ficha original é branca ou preta, respectivamente. Perceba que no começo do problema, temos que a probabilidade do saco originalmente conter uma ficha branca é igual a probabilidade de conter uma ficha preta, que é de $\frac{1}{2}$, isto é, $\mathbf{P}(OB) = \mathbf{P}(OP) = \frac{1}{2}$. A partir do momento que adicionamos uma ficha branca, a probabilidade já não é mais a mesma.

Seja $\mathbf{P}(FB|OB)$ a probabilidade de retirar do saco uma ficha branca onde originalmente a ficha encontrada no saco é branca e é adicionada uma ficha branca, temos que:

$\mathbf{P}(FB|OB) = 1$, as duas fichas presentes no saco são brancas.

Da mesma maneira, sendo $\mathbf{P}(FB|OP)$ a probabilidade de retirar do saco uma ficha branca onde originalmente a ficha encontrada no saco é preta e é adicionada uma ficha branca, temos que:

$\mathbf{P}(FB|OP) = \frac{1}{2}$, pois originalmente a ficha presente no saco é preta.

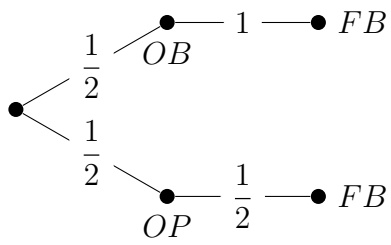
Note que: $\mathbf{P}(FB) = \mathbf{P}(FB|OB) \cdot \mathbf{P}(OB) + \mathbf{P}(FB|OP) \cdot \mathbf{P}(OP) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Utilizando o Teorema de Bayes (2.5), temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(OB|FB) &= \frac{\mathbf{P}(FB|OB) \cdot \mathbf{P}(OB)}{\mathbf{P}(FB)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade do saco originalmente conter uma ficha branca dado que foi retirada do saco uma ficha branca, é de $\frac{2}{3}$.

Podemos visualizar através do diagrama de árvore a seguir:



3 Metodologia

Para a elaboração deste trabalho, realizou-se uma pesquisa teórica com resgate histórico. A pesquisa teórica é também conhecida como pura ou básica. Segundo Zanella (2009), esse é um tipo de estudo sistemático motivado pela curiosidade intelectual. Além disso, na concepção de Ferrari (1982), a pesquisa teórica procura melhorar o próprio conhecimento. Isso significa contribuir, entender e explicar os fenômenos.

O resgate histórico inclui análise de fontes relevantes, como documentos textuais, fotografias, jornais e revistas significativos para o tema da pesquisa em evidência. A combinação da pesquisa teórica com o resgate histórico permite que o pesquisador obtenha uma melhor análise sobre o objeto de estudo.

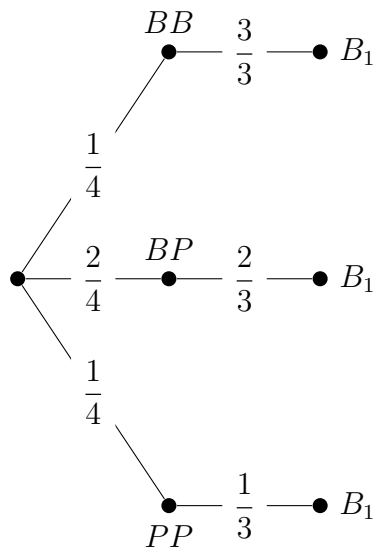
4 Generalização do Problema de Travesseiro de Lewis Carroll nº 5

4.1 O Problema de Travesseiro de Lewis Carroll nº 5

Retornando ao Problema de Travesseiro de Lewis Carroll n° 5. Agora nas seguintes configurações:

Suponha que um saco contém duas fichas, conhecidas por serem brancas ou pretas, logo em seguida, é adicionada uma ficha branca neste saco, ele é sacudido e é retirada uma ficha branca.

Vejamos a representação através do diagrama de árvore a seguir:



Inicialmente temos que o primeiro nó representa o espaço amostral Ω, note que $|\Omega| = 4$. Seja B a representação para ficha branca e P a representação para ficha preta, desta forma temos que há $\frac{1}{4}$ de chances de escolher um dos sacos, em que consiste as seguintes situações: O saco possuir duas fichas brancas (BB); O saco possuir uma ficha branca e uma ficha preta (BP); O saco possuir uma ficha preta e uma ficha branca (PB); O saco possuir duas fichas pretas (PP).

Seja B_1 o evento onde se retira do saco uma ficha branca, temos que a probabilidade de se retirar uma segunda ficha branca é:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_1) &= \mathbf{P}(B_1|BB)\cdot\mathbf{P}(BB)+\mathbf{P}(B_1|BP)\cdot\mathbf{P}(BP)+\mathbf{P}(B_1|PB)\cdot\mathbf{P}(PB)\\ &\quad+\mathbf{P}(B_1|PP)\cdot\mathbf{P}(PP)\\ &= \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{8}{12}.\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Bayes 2.5, temos que:

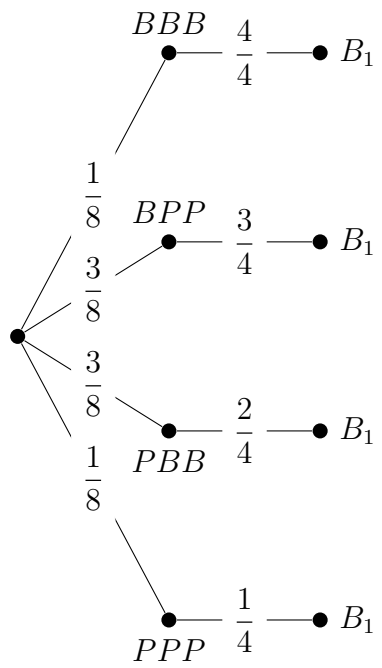
$$\mathbf{P}(BB|B_1) = \frac{\mathbf{P}(B_1|BB)\cdot\mathbf{P}(BB)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{8}{12}} = \frac{3}{8}.$$

Portanto, a probabilidade do saco conter duas fichas brancas dado que se retira do saco uma ficha branca, é $\frac{3}{8}$.

Podemos visualizar na tabela abaixo a atual e as demais probabilidades desta situação:

$\mathbf{P}(BB\|B_1) = 3/8$
$\mathbf{P}(BP\|B_1) = 4/8$
$\mathbf{P}(PP\|B_1) = 1/8$

Suponha que um saco possui três fichas conhecidas por serem brancas ou pretas, e é adicionada uma ficha branca. O saco é chacoalhado e é retirada uma ficha branca. Podemos visualizar as probabilidades no diagrama de árvore abaixo:



Note que o diagrama nos mostra que $|\Omega| = 8$. Sendo assim, há 1/8 de chances de escolher um dos sacos. Nesta situação temos que a probabilidade de retirar uma segunda ficha branca é:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{20}{32}.$$

Enquanto a probabilidade do saco possuir três fichas brancas dado que é retirado do saco uma ficha branca, ou seja, $\mathbf{P}(BBB|B_1)$ é:

$$\mathbf{P}(BBB|B_1) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{4}}{\frac{20}{32}} = \frac{1}{5}.$$

No Quadro 1 podemos observar as probabilidades dos eventos:

$\mathbf{P}(BBB\|B_1) = 4/20$
$\mathbf{P}(BPP\|B_1) = 9/20$
$\mathbf{P}(PPB\|B_1) = 6/20$
$\mathbf{P}(PPP\|B_1) = 1/20$

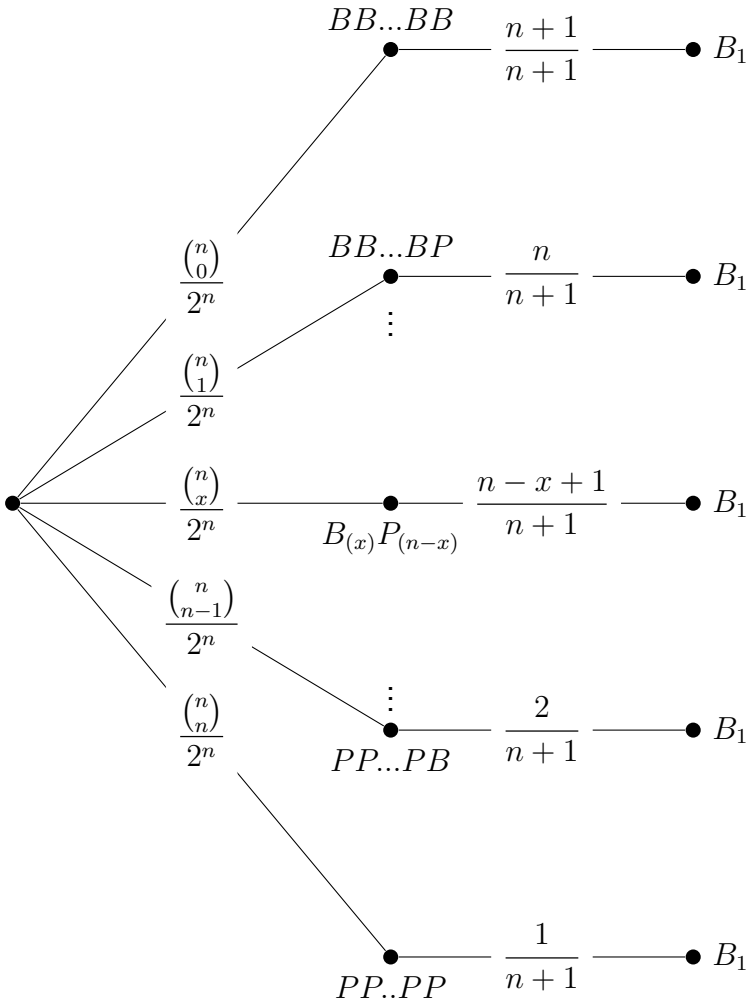
Quadro 1 - Resultados das demais probabilidades.

A partir desses casos, podemos observar os seguintes padrões: $|\Omega| = 2^n$; $\binom{n}{i} =$ são as possibilidades para as posições das fichas, onde $n =$ número de fichas no saco inicialmente e $0 \leq i \leq n$. Seja $B_{(x)}$ um número x de fichas brancas e $P_{(n-x)}$ um número $n - x$ de fichas pretas, temos que

$\dfrac{n-x+1}{n+1} :=$ as possibilidades condicionais de retirarmos um número $B_{(x)}$ dado que originalmente as fichas retiradas foram $P_{(n-x)}$.

4.2 Generalização para *n* fichas e uma ficha branca adicionada

Suponha que um saco possui n fichas conhecidas por serem brancas ou pretas, é adicionada uma ficha branca. O saco é balançado e é retirada uma ficha branca. Podemos visualizar as probabilidades no diagrama de árvore abaixo:



Após observarmos os padrões anteriormente, temos que a probabilidade de se retirar do saco uma ficha branca, $\mathbf{P}(B_1) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$. Antes de calcularmos essa probabilidade, provaremos o seguinte resultado.

Lema 4.2.1.

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (n-x+1) = 2^{n-1}(n+2).$$

Demonstração. Considere a função

$$f(z) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (n-x+1) z^{n-x}.$$

Integrando $f(z)$ em relação a z, obtemos:

$$\begin{aligned} \int f(z)\, dz &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} z^{n-x+1} \\ &= z \cdot (z+1)^n. \qquad \text{(Teorema Binomial)} \end{aligned}$$

Derivando a integral em relação a z e avaliando $z = 1$ em ambos os membros, chegamos a

$$\left.\frac{d\int f(z)\,dz}{dz}\right|_{z=1} = 2^{n-1}(n+2).$$

□

Teorema 3. A probabilidade de se retirar do saco uma ficha branca nas condições acima é: $\mathbf{P}(B_1) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Demonstração. Note que, podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\mathbf{P}(B_1) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \frac{n-x+1}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$
$$\frac{1}{2^n(n+1)} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (n-x+1).$$

Conforme o Lema (4.2.1), segue que $\mathbf{P}(B_1) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

□

Ao calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Obtemos a resposta empírica do problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5, tendo em vista se considerarmos a possibilidade do saco permanecer ao seu estado inicial após as ações realizadas. Portanto, verificamos que a resposta do senso comum ocorre quando o n tende ao infinito, ou seja, pode ser que mentalmente as pessoas estejam excedendo o resultado para uma quantidade n grande e desconhecidas de bolas brancas e pretas na sacola, acrescenta-se uma branca, aleatoriza-se o saco e retira-se uma branca, quando na realidade, no problema original $n = 1$.

E temos que a probabilidade do saco possuir um número x de fichas brancas, $B_{(x)}$, e um número $n-x$ de fichas pretas, $P_{(n-x)}$, visto que uma ficha branca foi retirada, é dada pelo corolário seguinte.

Corolário 4.2.2. $\boldsymbol{P}(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1) = \dfrac{\dfrac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \dfrac{n-x+1}{n+1}}{\dfrac{n+2}{2(n+1)}} = \dfrac{\binom{n}{x} \cdot (n-x+1)}{2^{n-1}(n+2)}$.

Demonstração. Pela definição de probabilidade condicional, temos que:

$$\mathbf{P}(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1) = \frac{\mathbf{P}((B_{(x)}P_{(n-x)}) \cap (B_1))}{\mathbf{P}(B_1)}.$$

Pelos padrões observados no ramo do diagrama de árvore anterior, segue que:

$$\mathbf{P}(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1) = \frac{\frac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \frac{n-x+1}{n+1}}{\frac{n+2}{2(n+1)}} = \frac{\binom{n}{x} \cdot (n-x+1)}{2^{n-1}(n+2)}.$$

□

Note que o resultado do corolário (4.2.2), quando tomamos $x = 0, \cdots, n$ é uma função de probabilidade, pois cada termo é maior ou igual a 0 e sua soma resulta em 1. Além disso, sua esperança é $E(X) = \dfrac{n^2+n}{2n+4}$, e a variância é $Var(X) = \dfrac{n^3+3n^2+4n}{4(n+2)^2}$. Porém, esses resultados ficam apenas como complemento nesta discussão.

Podemos observar outros resultados probabilísticos do corolário (4.2.2), em que se varia n e x, na Tabela 1 abaixo:

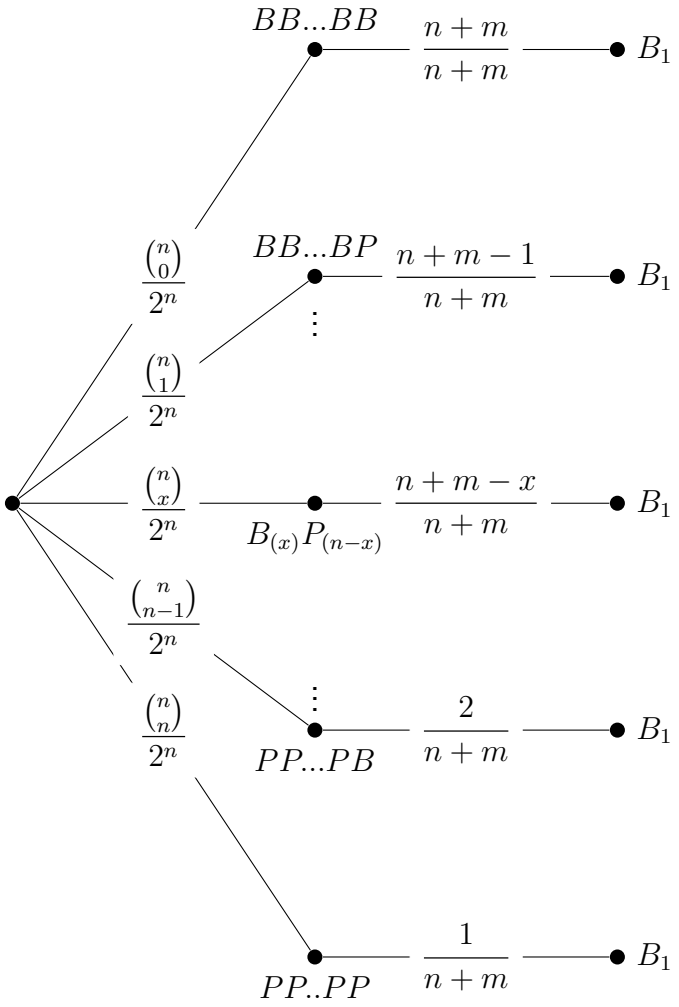
Tabela 1 – Resultados para vários valores de n e x em $\mathbf{P}(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1)$.

n \ x	1	3	5
5	0,2232	0,2678	0,0089
10	0,0162	0,1562	0,2460
15	0,0008	0,0212	0,1185

4.3 Generalização para *n* fichas e *m* fichas adicionadas.

Suponha que exista um saco com n fichas conhecidas por serem brancas ou pretas, e em seguida, são adicionadas m fichas brancas, o saco é sacudido e é retirado uma ficha branca. A partir da imagem abaixo, podemos visualizar este caso.

Além disso, conseguimos visualizar as possibilidades no diagrama abaixo:



Note que a probabilidade de retirar uma outra ficha e ela ser branca é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4. A probabilidade de se retirar do saco uma ficha branca nas condições acima é:

$$\mathbf{P}(B_1) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \frac{n-x+m}{n+m} = \frac{n+2m}{2(n+m)}.$$

Demonstração. Essa demonstração é análoga à demonstração do Teorema 3. □

Corolário 4.3.1. *A probabilidade do saco conter um número x de bolas brancas, ou seja, $B_{(x)}$ e um número $n-x$ de bolas pretas, isto é, $P_{(n-x)}$, dado que uma ficha branca já tenha sido retirada é dada por:*

$$\boldsymbol{P}(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_1) = \frac{\frac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \frac{n-x+m}{n+m}}{\frac{n+2m}{2(n+m)}} = \frac{\binom{n}{x} \cdot (n-x+m)}{2^{n-1}(n+2m)}.$$

Demonstração. Essa demonstração é análoga à demonstração do Corolário 4.2.2. Note que, quando $m = 1$, temos o resultado do corolário anterior. □

Observe que o resultado do corolário (4.3.1), quando tomamos $x = 0, \cdots, n$ é uma função de probabilidade, pois cada termo é maior ou igual a 0 e sua soma resulta em 1. Temos que sua esperança é $E(X) = \dfrac{n^2+2nm-n}{2n+4m}$, e a variância é $Var(X) = \dfrac{n}{4}\left[1 - \dfrac{n}{(2m+n)^2}\right]$.

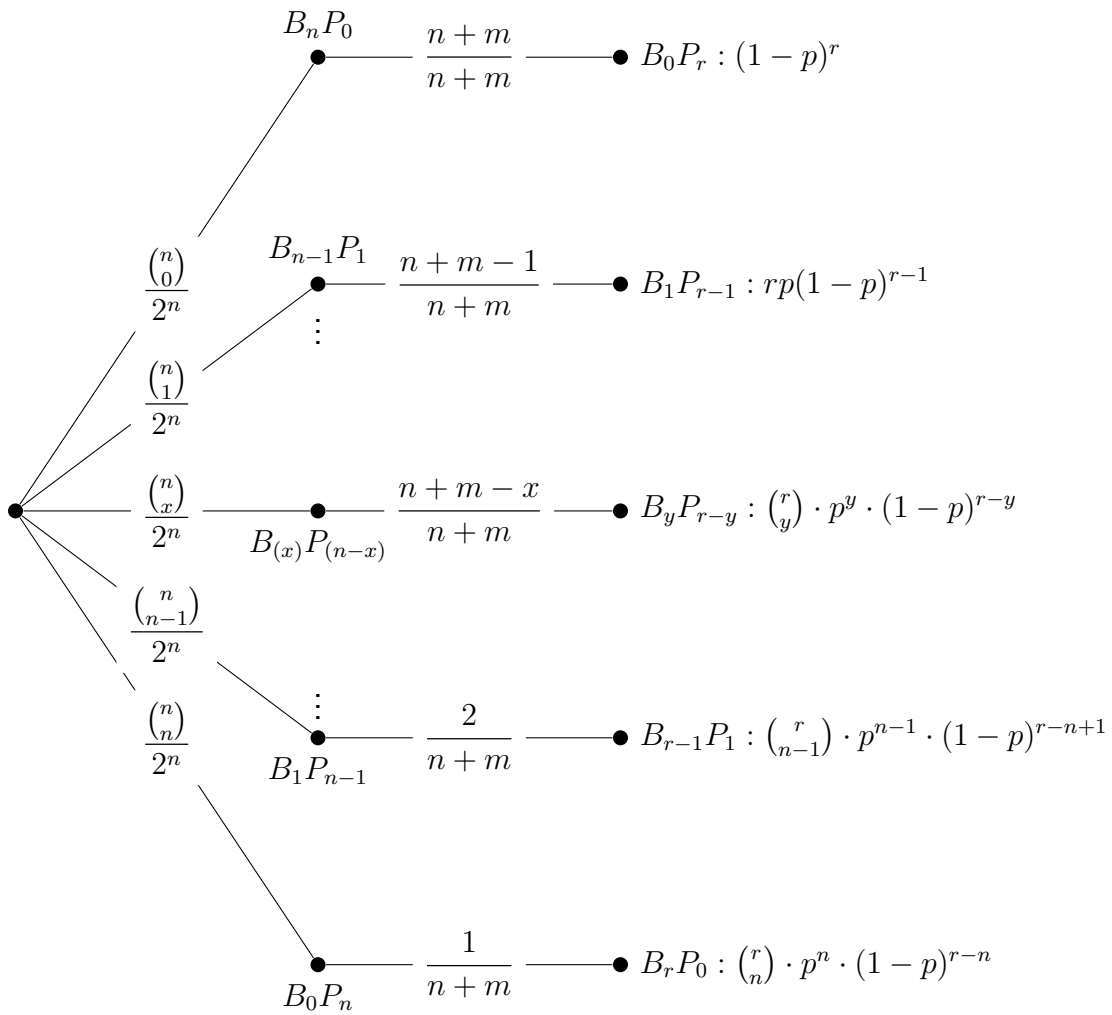
Na Tabela 2 abaixo podemos visualizar algumas probabilidades do corolário (4.3.1), variando n e m na situação em que o saco possui apenas fichas pretas inicialmente ($x = n$).

Tabela 2 – Resultados obtidos onde inicialmente o saco possui apenas fichas pretas.

n \ m	2	5	10
3	0,0714	0,0962	0,1087
5	0,0139	0,0208	0,0250
10	0,0003	0,0005	0,0007

4.4 Generalização para *n* fichas, *m* fichas adicionadas, onde em *r* tentativas retira-se B*(y)* fichas brancas, com repetição.

Suponha que exista um saco com n fichas conhecidas por serem brancas ou pretas, e em seguida, são adicionadas m fichas brancas, o saco é sacudido e é retirado uma quantidade $B_{(y)}$ de fichas brancas em r tentativas, com repetição. Note que temos as seguintes probabilidades:



em que $p = \dfrac{n+m-x}{n+m}$.

A partir dos padrões observados anteriormente, foi possível identificar outros, como o modelo binomial $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^n - x$, onde $x = 0, 1, ..., n.$, e a série binomial

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, |x| < 1.$$

Podemos observar a seguir como é dada a probabilidade do saco conter um número y de fichas brancas, $B_{(y)}$, e um número $r-y$ de fichas pretas, $P_{(r-y)}$.

Teorema 5.

$$\mathbf{P}(B_{(y)}P_{(r-y)}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \binom{r}{y}\binom{r-y}{j}\binom{y}{k}\binom{k}{l} \times (-1)^{j+k+l}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{j+l}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_{(y)}P_{(r-y)}) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \binom{r}{y}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{y}\Big(1-\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{r-y} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \binom{r}{y}\Big[1-\Big(1-\frac{n+m-i}{n+m}\Big)\Big]^{y}\Big(1-\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{r-y} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \binom{r}{y}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{r-y}{j}(-1)^{j}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{j} \times \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{y}{k}(-1)^{k}\Big(1-\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{k} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \binom{r}{y}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{r-y}{j}(-1)^{j}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{j} \times \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{y}{k}(-1)^{k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{k}{l}(-1)^{l}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{l} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \cdot \frac{n+m-i}{n+m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \binom{r}{y}\binom{r-y}{j}\binom{y}{k}\binom{k}{l} \times \\
&(-1)^{j+k+l}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{j+l}.
\end{aligned}$$

□

Perceba que $\mathbf{P}(B_{(y)}P_{(r-y)})$ é uma nova função κ que depende de n, m, r e y, isto é,

$$\kappa(n,m,r,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{i}\binom{r}{y}\binom{r-y}{j}\binom{y}{k}\binom{k}{l}}{2^n} \cdot (-1)^{j+k+l}\Big(\frac{n+m-i}{n+m}\Big)^{j+l+i}.$$

Podemos visualizar alguns resultados através da tabela abaixo:

Tabela 3 – Alguns resultados encontrados a partir da generalização.

n	m	r	y	Resultados
5	3	3	1	0,1245
			3	0,2797
		5	1	0,0312
			3	0,1699
	5	3	1	0,1020
			3	0,3590
		5	1	0,0175
			3	0,1662
10	3	3	1	0,1512
			3	0,1776
		5	1	0,0454
			3	0,1806
	5	3	1	0,1380
			3	0,2275
		5	1	0,0325
			3	0,1901
15	3	3	1	0,1624
			3	0,1398
		5	1	0,0530
			3	0,1801
	5	3	1	0,1541
			3	0,1748
		5	1	0,0418
			3	0,1927

A partir dos resultados acima, podemos perceber que quando n aumenta e os outros parâmetros se mantém, as chances do saco conter fichas brancas diminuem nas situações em que: Os valores dos parâmetros $m = r = y$; Os valores de $r = y$ e o valor de m é maior que eles. Ou seja, a probabilidade diminui nos casos em que: O número de fichas brancas adicionadas for igual ao número de tentativas e igual ao número de fichas brancas retiradas, com repetição; O número de tentativas for igual ao número de fichas brancas retiradas e esse valor ser menor do que o número de fichas brancas adicionadas.

Conseguimos observar também que quando o valores de m aumentam e os outros parâmetros se mantém, as chances diminuem nas situações em que os valores de $r > y$. Ou seja, quando um número de fichas brancas é adicionado, a probabilidade diminui nas situações em que o número de tentativas é maior que o número de fichas brancas retiradas. Além disso, assim que os valores de r aumentam, ou seja, assim que os números de tentativas aumentam, e as outras medidas se mantém, as chances aumentam em apenas 1/4 dos resultados analisados. Na situação em que y aumenta,

apenas em um dos casos analisados a probabilidade diminui, especificamente no caso em que $n = 15$ e $m = r = y$. Diante do que foi possível analisar, percebemos a importância de se rever as probabilidades a partir do momento que chegam ou se alteram as informações.

Corolário 4.4.1. ***P***$(B_{(x)}P_{(n-x)}|B_{(y)}P_{(r-y)}) = \dfrac{\frac{\binom{n}{x}}{2^n} \cdot \frac{n+m-x}{n+m} \cdot \binom{r}{y} p^y (1-p)^{r-y}}{\kappa(n,m,r,y)}$*, em que* $p = \dfrac{n+m-x}{n+m}$.

Demonstração. A demonstração deste corolário é semelhante ao do Corolário (4.2.2). □

4.5 Discussão

De acordo com Gardner (2020), o problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5 é um problema simples de ser enunciado, mas confuso para analisar corretamente. Além da solução proposta por Carroll, ele apresenta uma solução proposta por um leitor de Chicago, Howard Ellis. Ainda que as soluções se diferenciem, elas indicam a mesma conclusão, considerando apenas uma ficha no saco inicialmente, ou seja, $n = 1$.

A partir do que foi apresentado neste trabalho, percebe-se a relevância de estender os resultados da observação de alguns casos ao conjunto dos casos possíveis, além do que, podemos observar novas possibilidades a partir de $n > 1$, além do acréscimo de fichas brancas, $m > 1$, e a medida que adicionamos valores aos parâmetros n, m, r e y presentes na fórmula geral nos retorna diversas probabilidades. Como aplicação prática derivada deste trabalho, encontrou-se algumas funções de probabilidades, no decorrer do estudo, a partir do teorema de Bayes, o que distingue a pesquisa. Estas distribuições merecem aprofundamento em outros trabalhos subsequentes.

5 Considerações Finais

O propósito principal deste trabalho foi a generalização do problema de travesseiro nº 5 de Lewis Carroll. Para isso ocorrer, foi fundamental a realização de uma síntese da trajetória histórica da probabilidade, de uma revisão sobre a probabilidade envolvendo definições, teoremas, exemplos e apresentação dos problemas semelhantes ao problema central deste trabalho. Diante disto, considera-se que foi possível atingir tanto o objetivo geral quanto os objetivos específicos deste estudo.

A partir das pesquisas realizadas, não foi possível identificar trabalhos anteriores que realizassem tal generalização, apenas trabalhos que tratam o problema de travesseiro de Lewis Carroll nº 5, como um quebra-cabeça, considerando apenas uma ficha dentro do saco. Desse ponto em diante, percebemos a importância desta pesquisa, pois é possível observar e analisar novas possibilidades a partir dela.

As dificuldades enfrentadas durante o desenvolvimento deste estudo se deram principalmente pela carência de materiais que apresentassem o problema principal deste trabalho. Para trabalhos futuros, tem-se a proposta de generalização para os problemas da caixa de Bertrand e o problema de Monty Hall, além da utilização de outros modelos de probabilidades como a hipergeométrica e binomial negativo na amostragem das fichas e o estudo sobre as funções de probabilidade encontradas neste trabalho.

Referências

BAADER, R. *Dice Maniacs The History of Dice, Part 1: Ancient Dice*. 2020. <https://dicemaniacsclub.wordpress.com/2020/02/22/the-history-of-dice-part-1-ancient-dice/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 13.

BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer, p. 15–37, 2005. Citado na página 11.

BERTRAND, J. *Calcul des probabilities*. [S.l.]: Paris, 1889. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

BERTSEKAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Probability (Lecture Notes), Athena Scientific, Belmont, MA*. [S.l.]: MIT Course, 2000. Citado na página 17.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 15.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. *Campinas: SBHMAT*, 2013. Citado na página 15.

CARROLL, L. *Mathematical recreations of Lewis Carroll: Pillow problems and a tangled tale*. [S.l.]: Courier Corporation, 1958. v. 2. Citado na página 30.

DEBNATH, L.; BASU, K. A short history of probability theory and its applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 46, n. 1, p. 13–39, 2015. Citado na página 13.

EVES, H. Introdução à história da matemática, trad. *Higyno H. Domingues. Brasil: Editora UNICAMP*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

FERRARI, A. T. *Metodologia da pesquisa científica*. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1982. Citado na página 33.

FERREIRA, M. J.; TAVARES, I.; TURKMAN, M. A. *Notas Sobre a História da Estatística. Dossiers Didácticos VI*. [S.l.]: URL: http://alea-estp. ine. pt/html/statofic/html/dossier/html/dossier. html, 2002. Citado na página 16.

GADELHA, A. Notas de aula teoria de probabilidade i: Curso de pós-graduaçao em estatıstica. *Rio de janeiro: UFRJ*, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 17.

GARDNER, M. *Mathematical circus*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2020. Citado na página 46.

HSU, H. P. *Theory and problems of probability, random variables, and random processes*. [S.l.]: McGraw-hill, 1996. Citado na página 17.

ISLABAO, M. H.; CAMPOS, M. A.; TEDESCO, P. Uma rede bayesiana para o aprendizado de probabilidade. In: *XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 492. Citado na página 17.

MAIA, R. d. S. *O Teorema de Bayes: aplicações atuais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2021. Citado na página 17.

MORAES, L. C. L. et al. Ensino de probabilidade: historicidade e interdisciplinaridade. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios. *Coleção do Professor de Matemática, ed*, v. 9, 2006. Citado na página 11.

QUEIROZ, C. de. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática*, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 2, n. 1, p. 50–67, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 16.

ROBERTSON, J. O. E. *Blaise Pascal Blaise Pascal*. 1996. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 16.

ROBERTSON, J. O. E. *Pierre Simon Laplace Pierre Simon Laplace*. 1999. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 17.

ROBERTSON, J. O. E. *Pierre de Fermat Pierre de Fermat*. 2002. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 16.

ROBERTSON, J. O. E. *Abraham de Moivre Abraham de Moivre*. 2004. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 16.

ROBERTSON, J. O. E. *Niccolò Tartaglia Niccolò Tartaglia*. 2005. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 15.

ROBERTSON, J. O. e E. *Girolamo Cardano Girolamo Cardano*. 1998. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 14.

ROBERTSON, J. O. e E. *Thomas Bayes Thomas Bayes*. 2004. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bayes/>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 17.

ROUSSAS, G. G. *A course in mathematical statistics*. [S.l.]: Elsevier, 1997. Citado na página 17.

SERENA, K. *Marilyn Vos Savant, The "World's Smartest Woman" With An IQ Of 228*. 2022. <https://allthatsinteresting.com/marilyn-vos-savant>. Acessado em: 27/04/2023. Citado na página 27.

SHAUSER, E. *Emily Shauser Category: Pompeii – EMILY SHAUSER*. 2018. <http://emilyshauser.weebly.com/hocw100/category/pompeii>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 13.

SILVA, W. N. d. *Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Oeste do Pará, 2020. Citado na página 15.

SILVER, N. *O sinal e o ruído*. [S.l.]: Editora Intrinseca, 2013. Citado na página 11.

STEIN, C. E. et al. Sistema especialista probabilístico: base de conhecimento dinâmica. Florianópolis, SC, 2000. Citado na página 16.

STIGLER, S. M. *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900*. [S.l.]: Harvard University Press, 1986. Citado na página 17.

TOMAZ, P. S. S. Gerolamo cardano: Pai da teoria da probabilidade ou um bom apostador de jogos de azar. *Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Curitiba: UFPR*, p. 2–3, 2007. Citado na página 17.

TRUST, J. P. G. *getty.edu INFORMATION AND RULES TALI AND TESSERAE*. 2020. <https://www.getty.edu/education/college/ancient_rome_at_home/pdf/tali_tesserae_game.pdf>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 13.

USATODAY. *Remembering 'Let's Make a Deal' host Monty Hall*. 2017. <https://www.usatoday.com/picture-gallery/life/tv/2017/09/30/remembering-lets-make-a-deal-host-monty-hall/106172564/>. Acessado em: 27/04/2023. Citado na página 26.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.

WIKIPEDIA. *Lewis Carroll*. 2004. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Lewis_Carroll>. Acessado em: 27/04/2023. Citado na página 30.

WIKIPEDIA. *Joseph Bertrand Joseph Bertrand*. 2022. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand>. Acessado em: 26/04/2023. Citado na página 24.

ZANELLA, L. C. H. Metodologia de estudo e de pesquisa em administração. *Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC*, Brasília, p. 129–149, 2009. Citado na página 33.