UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teoria da medida e integração: de Lebesgue à formulação abstrata

Maria Júlia Nunes da Costa

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE

2026

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Maria Júlia Nunes da Costa

Teoria da medida e integração: de Lebesgue à formulação abstrata

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

C838t Costa, Maria Júlia Nunes da.

Teoria da medida e integração: de Lebesgue à formulação abstrata / Maria Júlia Nunes da Costa. – Recife, 2025.

148 f.

Orientador(a): Rodrigo Genuino Clemente.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2026.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Integral de Lebesgue. 2. Teoria da medição. 3. Cálculo diferencial e integral. 4. Medida e integração 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Clemente, Rodrigo Genuino, orient. II. Título

CDD 510

Maria Júlia Nunes da Costa

Teoria da medida e integração: de Lebesgue à formulação abstrata

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho aprovado. Recife, 12 de dezembro de 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente
Departamento de Matemática - UFRPE
(Orientador e presidente)

Prof$^{\text{a}}$. Me. Flávia Jerônimo Barbosa
Departamento de Matemática - UFPB

Prof. Dr. João Marcos Bezerra Do Ó
Departamento de Matemática - UFPB

Recife

2026

Aos meus pais: ao meu pai, que fez da ausência de estudo um incentivo, garantindo que eu acreditasse no poder da educação; e à minha mãe, que me deu a força para nunca me intimidar em ambientes masculinos.

Agradecimentos

A Deus, por me dar força em todos os momentos, por escutar meus gemidos mesmo quando não conseguia falar, por me oferecer paz mesmo quando eu não merecia, pela tamanha misericórdia que Ele tem em minha vida.

Aos meus pais, por sempre acreditarem em mim e me darem todo suporte necessário para conclusão da graduação. Ao meu pai, que embora não fosse atingido pelo poder da educação, sempre me ofereceu a oportunidade de sonhar com ela. À minha mãe, que é um símbolo de resistência para mim, sendo da única guarda municipal mulher da minha cidade, por ser a minha melhor amiga, a pessoa com quem eu posso dividir as angústias, dificuldades, felicidades e incertezas. Enfim, sou eternamente grata aos meus pais que souberem lidar com as diferenças, em prol da minha educação.

Aos meus avós, por sempre estarem comigo quando eu precisasse. Ao meu avô, por ser um símbolo para mim de que a educação informal também transforma. Várias vezes, quando eu comentava com ele sobre algum assunto de matemática, principalmente de desenho geométrico, ele já o conhecia, mesmo nunca tendo estudado formalmente o conceito. Além disso, várias vezes já o encontrei assistindo a videoaulas, apesar de nunca ter concluído o ensino básico, ele nunca deixou de buscar conhecimento de várias formas. À minha avó, que é uma inspiração para mim como mulher, mãe, avó e pessoa. Sou grata por todo o cuidado que teve comigo em todos os momentos.

Ao meu namorado, Alex, minha gratidão por ter sido o grande apoio em todos os momentos da graduação. Nos momentos de maior cansaço, o carinho dele foi o meu refúgio, o lugar de paz onde pude descansar. Sou grata por ter sido meu porto seguro durante toda a jornada.

Ao meu orientador Rodrigo Clemente, por tamanha paciência e disponibilidade durante todo processo de construção e estudo desta monografia. Por ser um exemplo de professor e de pessoa para mim, a quem sou muito grata pelos diversos conselhos, pelo cuidado, respeito e por acreditar em mim, muitas vezes, quando nem eu mesma acreditava, por me inspirar a cada dia a ser uma pessoa e professora melhor.

Aos meus professores da graduação, pelos ensinamentos que contribuíram para a minha formação, e, em especial, aos professores Adriano Regis, Antônio Hinojosa, Clessius Silva, Filipe Costa, Gilson Mamede e Thiago Dias, pelo compromisso com a formação dos estudantes de licenciatura em matemática, por estarem sempre dispostos a ajudar e por terem me proporcionado disciplinas cujas aulas foram essenciais para me tornar uma professora melhor. Em particular, sou grata ao professor Renato Teixeira pelo cuidado e compromisso que tem com o laboratório de informática. Foi a disponibilidade deste espaço, mantida pelo professor, que tornou a escrita da monografia possível.

Aos meus amigos da graduação: Tainá Queiroz, por ser uma parceira para todas as horas, topando tudo comigo; Lucas Kauan, por trazer alegria ao ambiente sempre que chega; Nicolas Dellano, por toda a parceria nos estudos, seja nos cursos de verão ou em qualquer outro momento que surgisse qualquer pergunta; Emmanuel, por estar sempre disposto a ajudar e por ter lido parte desta monografia para auxiliar na melhoria do texto; Warsdley e Vivian, por dividirem comigo as felicidades e infelicidades de serem moradores da mesma cidade do interior e agora moradores da capital, além de estarem sempre disponíveis para me ajudar e debater exercícios; Bruna Neipp, por todo o suporte na graduação e nos cursos de verão; João Victor, por toda a parceria; Luiz, por tornar os ambientes leves; No geral, sou grata a todos os amigos e colegas que compartilharam a graduação comigo em algum momento. Gratidão por escutarem meus estresses, dúvidas, dividirem desafios e tornarem a jornada muito mais leve.

Às minhas amigas, Iasmim, Eduarda, Stephany e Kaillany, por estarem comigo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e por serem um refúgio. À minha amiga Layza, por sempre me oferecer conselhos, ouvir minhas angústias, estar presente desde o Ensino Médio e dividir comigo experiências da vida adulta: angústias, incertezas, felicidades e infelicidades. A todas elas, minha gratidão especial: pela paciência, por relevarem minha ausência em muitos momentos e por sempre permanecerem ao meu lado.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), pelo compromisso com as políticas de permanência estudantil. Em especial, por ter um restaurante universitário de qualidade, em que eu tive o privilégio de fazer o uso, quase que ininterrupto, durante toda a graduação. Além disso, sou gata por ter tido o privilégio de participar dos três pilares da universidade: O Ensino, como participante do Programa Institucional de Bolsas de

Iniciação à Docência e monitoria; a Pesquisa, como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica; e a Extensão, como monitora da Olimpíada Pernambucana de Matemática. A UFRPE foi mais do que uma instituição, foi um local de acolhimento para mim.

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco, pelo financiamento da bolsa de inciação científica, que foi parte essencial na produção dessa monografia.

Por fim, agradeço a todos que, de perto ou de longe, contribuíram com minha trajetória. Seja através de um apoio constante ou de um gesto singular, sou grata a todos os amigos, familiares, professores e colegas que fizeram parte desta jornada.

"Eu prefiro ser essa metamorfose ambulante"

— Raul Seixas

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo construir a Integral de Lebesgue, revisitar o Teorema Fundamental do Cálculo sob o olhar desta integral e construir a integração em um espaço de medida abstrato, culminando na demonstração do Teorema de Radon-Nikodym. Para isso, exibimos inicialmente conceitos preliminares da Teoria da Medida de Lebesgue, como a medida exterior e a mensurabilidade de conjuntos. Em seguida, construiremos a Integral de Lebesgue por etapas e provaremos alguns resultados de convergência adequados. Para reexaminar o Teorema Fundamental do Cálculo iremos provar o Teorema da diferenciação de Lebesgue e apresentamos um estudo das funções de variação limitada e das funções absolutamente contínuas. Posteriormente, abordamos uma aplicação da teoria na retificabilidade de curvas e na desigualdade isoperimétrica. Por fim, generalizamos a estrutura para a Teoria da Medida Abstrata, definindo a integração em um espaço de medida, definindo a noção de medida com sinal e medida absolutamente contínua e, no fim provamos o Teorema de Radon-Nikodym.

Palavras-chave: Integral de Lebesgue; Teoria da Medida; Teorema Fundamental do cálculo, Medida Abstrata.

Abstract

The present work aims to construct the Lebesgue Integral, revisit the Fundamental Theorem of Calculus from the perspective of this integral, and construct integration in an abstract measure space, culminating in the proof of the Radon-Nikodym Theorem. To this end, we initially present preliminary concepts of Measure Theory, such as the outer measure and the measurability of sets. Next, we will construct the Lebesgue Integral in stages and prove some appropriate convergence results. To re-examine the Fundamental Theorem of Calculus, we will prove the Lebesgue Differentiation Theorem and present a study of functions of bounded variation and absolutely continuous functions. Subsequently, we address an application of the theory to the rectifiability of curves and the isoperimetric inequality. Finally, we generalize the structure to Abstract Measure Theory, defining integration in a measure space, defining the notion of signed measure and absolutely continuous measure, and, ultimately, we prove the Radon-Nikodym Theorem.

Keywords: Lebesgue Integral; Measure Theory; Fundamental Theorem of Calculus, Abstract Measure.

Lista de ilustrações

Sumário

1

Introdução

A necessidade de quantificar e medir áreas, volumes e comprimentos remonta às primeiras civilizações. Uma questão que surge é: como podemos medir um segmento de reta? a maneira mais imediata de pensar é usar uma régua. Os gregos tinham uma ideia semelhante: embora suas réguas não fossem divididas em milímetros como as atuais, o princípio é o mesmo, ou seja, é preciso dividir o objeto em partes iguais, sendo que cada parte é a unidade de medida. Contudo, surge a questão: se tivéssemos uma régua com uma unidade de medida que pudesse ser tão pequena quanto necessário, conseguiríamos medir qualquer objeto com ela? A resposta para essa pergunta é não, e a explicação reside na existência dos números irracionais.

O cálculo teve um grande avanço com as descobertas de Newton e Leibniz. Newton utilizou a noção de infinitesimais para resolver problemas físicos, e Leibniz introduziu notações que são utilizadas até hoje, como o símbolo da integral $\int$. Embora esses avanços tenham sido fundamentais para a matemática, seus desenvolvedores não se preocuparam em estabelecer um rigor formal. O foco era aplicar essa nova noção em problemas práticos, avançando no estudo do movimento, cálculo de área e taxas de variação.

A busca por esse rigor levou à definição de integral de Cauchy, geralmente considerada a primeira definição formal. Foi publicada em 1823 no livro *"Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal"* [5] (Resumo das Lições Dadas na Escola Real Politécnica sobre o Cálculo Infinitesimal). Para uma função f definida em $[a, b]$, Cauchy, na página 85 deste livro, define:

$$S(\sigma) = f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \quad (1.1)$$

onde $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ é uma partição do segmento $[a, b]$. A soma S possui um "limite" quando $d(\sigma) \to 0$, o qual é chamado de integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Alguns anos depois, a definição de integral dada por Riemann é semelhante à abordagem de Cauchy, exceto pelo fato de o ponto escolhido em cada intervalo da partição ser arbitrário. Apesar da semelhança na definição, Riemann [11] avançou ao examinar as condições necessárias e suficientes sob as quais uma função é integrável. Nas palavras de Riemann:

> "Se a função $f(x)$ for sempre finita, e se, com a diminuição infinita de todas as grandezas δ, a grandeza total s dos intervalos nos quais as oscilações da função $f(x)$ são maiores que uma dada grandeza σ se tornar, por fim, sempre infinitesimal, então a soma S converge quando todos os δ se tornam infinitamente pequenos." (RIEMANN, 1876, p. 241)

Neste contexto, δ representa o tamanho dos intervalos da partição. Assim sendo, Riemann representou um grande avanço na integração.

Em 1875, Darboux, que já havia tido contato com as definições de Riemann, publica um artigo intitulado *"Mémoire sur les fonctions discontinues"* [6] (Memória sobre as Funções Descontínuas), no qual discute alguns resultados de Riemann sobre funções descontínuas que podem ser integráveis. Além disso, Darboux propõe uma nova definição de integral, que é geralmente a estudada nos cursos de análise e que utiliza a noção de ínfimo e supremo em cada intervalo da partição.

Posteriormente, outras definições de integral surgiram, mas um avanço importante foi o do matemático Du Bois-Reymond, que demonstrou o seguinte: se, para cada $\alpha > 0$, o conjunto dos pontos em que a oscilação da função é maior que α pode ser incluído em uma coleção finita de intervalos de comprimento total arbitrariamente pequeno, então o critério de integrabilidade de Riemann é satisfeito. A condição de poder ser incluído em uma coleção finita de intervalos de tamanho arbitrariamente pequeno é o que se chama de conteúdo nulo ou extensão nula. Mais tarde, a caracterização da integral de Riemann foi expandida: se os pontos de descontinuidade da função puderem ser incluídos em uma quantidade *contável* de intervalos de comprimento total arbitrariamente pequeno, então a função é integrável no sentido de Riemann.

A teoria da medida começou a ser desenvolvida entre o final do século XIX e o início do século XX, impulsionada inicialmente pela noção de conjuntos com "extensão nula".

Alguns dos primeiros a buscar formalizar a noção de medida de intervalos foram matemáticos como Cantor, Stolz e Peano. Posteriormente, a teoria foi expandida por Émile Borel, Henri Lebesgue e Constantin Carathéodory, cujas abordagens são estudadas até os dias atuais. Borel, apesar de não ser o primeiro, ele apresentou grandes avanços na teoria, Borel introduziu uma teoria que conectava topologia à medida e possibilitou, assim, que seu aluno Lebesgue desenvolvesse a Medida de Lebesgue.

Nesse contexto, Lebesgue ampliou essa estrutura ao formular uma nova definição de integral, mais geral que a integral de Riemann. Sua principal motivação era estender o conceito de integração para lidar com funções e conjuntos mais complexos, que a abordagem de Riemann não conseguia tratar adequadamente. Com essas novas ferramentas, Lebesgue buscou resolver problemas até então insolúveis, e a noção de mensurabilidade de funções e conjuntos foi importante para essa formulação.

Da teoria dos conjuntos e das funções mensuráveis, emergem ferramentas que não só delineiam novos caminhos, mas também mantêm vínculos essenciais com conceitos predecessores. Littlewood, ao resumir essas conexões, estabeleceu três princípios fundamentais que servem como guias intuitivos valiosos para aqueles que se aventuram nos primeiros estudos dessa teoria. Estes princípios destacam a quase onipresença de certas características subjacentes:

(i) Cada conjunto é quase uma união finita de intervalos;

(ii) Cada função é quase contínua;

(iii) Cada sequência convergente é quase uniformemente convergente.

A mensurabilidade dos conjuntos e funções mencionadas é pressuposta neste contexto, sendo a palavra “quase” o ponto inicial que requer uma interpretação precisa e contextualizada.

O estudo da diferenciação e integração é um pilar da matemática, e aprofundar-se neles através da teoria de integração de Lebesgue nos oferece uma compreensão mais abrangente. Estuda-se no cálculo que a diferenciação e integração são operações inversas, e o objetivo é reexaminar essa ideia em um contexto mais geral. Dessa forma, naturalmente surgem algumas perguntas, que foram elas que nortearam o estudo desenvolvido, a primeira questão que surge é: se f é integrável em $[a,b]$ e $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ isso implica que F é diferenciável (em quase todo ponto) e que $F' = f$? A resposta afirmativa a essa pergunta, que pode parecer intuitiva do cálculo, ganha uma base e um alcance muito maior com o Teorema da Diferenciação de Lebesgue.

A segunda questão inverte a ordem da diferenciação e integração, ou seja, sob que condições em uma função F em $[a,b]$ garantimos que $F'(x)$ existe (para quase todo x), que essa função é integrável e que, além disso, $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$? Para abordar essa questão, introduzimos as funções de variação limitada. Essas funções possuem uma propriedade importante, que será observada ao longo do trabalho: elas são diferenciáveis em quase todo ponto.

Para solucionar a segunda questão posta aqui estudamos as funções absolutamente contínuas. Essas funções são uma subclasse das funções de variação limitada e são precisamente aquelas para as quais o Teorema Fundamental do Cálculo, na forma $F(b)-F(a) = \int_a^b F'(x)dx$, é válido. A distinção entre funções de variação limitada e funções absolutamente contínuas é importante e é ilustrada pela função de Cantor-Lebesgue. Esta é uma função contínua e de variação limitada, mas que não é absolutamente contínua.

No contexto das curvas, introduzimos a noção de curva retificável, questionando se a conhecida fórmula para o comprimento de arco, $L = \int_a^b (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$, continua válida. A resposta para essa questão foi desenvolvida no trabalho, e revelou a conexão entre retificabilidade e a continuidade absoluta.

Além disso, após explorar as propriedades de diferenciação e integração no contexto de Lebesgue, e estabelecer uma base para a compreensão das curvas retificáveis, o presente trabalho apresenta um resultado famoso da análise geométrica: a desigualdade isoperimétrica. A prova dessa desigualdade, conforme apresentada, depende do conceito de conteúdo de Minkowski de uma curva. A relevância do conteúdo de Minkowski aqui é que a retificabilidade de uma curva é equivalente a ter um conteúdo de Minkowski finito, com essa quantidade sendo o próprio comprimento da curva.

Embora a medida de Lebesgue tenha apresentado um grande avanço na teoria da medida e integração, sua construção depende da estrutura topológica do espaço $\mathbb{R}^d$. Buscou-se, então, uma generalização que não dependesse de noções topológicas, o matemático

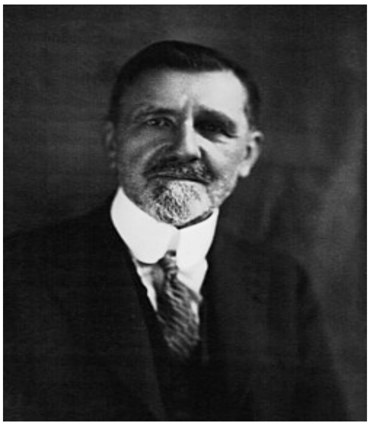
Constantin Carathéodory formulou uma definição de medida que utiliza apenas a teoria dos conjuntos. Essa abordagem axiomática permitiu a definição da estrutura abstrata de um espaço de medida. A teoria é então estendida para além do caso de medidas positivas, introduzindo o conceito de medida com sinal e neste contexto aparece novamente a noção de continuidade absoluta, cuja importância é demonstrada pelo Teorema de Radon-Nikodym.

2

Teoria da medida

A teoria que será desenvolvida aqui, inicialmente, é sobre a Medida de Lebesgue. Henri Lebesgue foi um matemático que revolucionou a teoria da integração no início do século XX, e sua obra foi profundamente influenciada por seu orientador, Émile Borel. Borel, foi matemático francês que, embora não fosse o primeiro a falar sobre medida, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento dessa área.

Figura 1 – Émile Borel



Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel`

Em 1898, Borel publicou o livro intitulado *"Leçons sur la théorie des fonctions"* [2] (Lições sobre a teoria das funções). Nessa obra, especificamente nas páginas 46-47, ele delineou as propriedades fundamentais que uma medida deveria satisfazer. Em essência, as condições propostas são as seguintes:

1. A medida é sempre não-negativa;

2. A medida de uma união de um número enumerável de conjuntos disjuntos é igual à soma das suas medidas;

3. A medida da diferença entre dois conjuntos (onde um é subconjunto do outro) é igual à diferença das suas medidas;

4. Todo conjunto cuja medida não é zero é não-enumerável.

Veremos que a medida de Lebesgue satisfaz todas essas propriedades. Mas, para desenvolver essa teoria, iremos iniciar com a apresentação de alguns conceitos preliminares.

2.1 Conceitos preliminares

Definição 2.1. A bola aberta em $\mathbb{R}^d$ centrada em x e de raio r é definida por

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}.$$

Definição 2.2. Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é aberto se para todo $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E$.

Definição 2.3. Um ponto $x \in E$ é um ponto interior se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E$. O conjunto de todos os pontos interiores de E é chamado interior de E.

Definição 2.4. Um cubo fechado em $\mathbb{R}^d$ é dado pelo produto de intervalos fechados, limitados e de comprimento iguais, isto é,

$$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

com $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_d - a_d$ e o volume de C denotado por $|C|$ é definido por

$$|C| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d).$$

Definição 2.5. Uma união de cubos é dita quase disjunta se o interior dos cubos são disjuntos.

Teorema 2.6. *Todo subconjunto aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ pode ser escrito como uma união enumerável de cubos quase disjuntos.*

2.2 A medida exterior

Para construir uma teoria da medida, precisamos primeiro entender a ideia de medida exterior, este será o ponto de partida. Essencialmente, a medida exterior, denotada por m_*, atribui uma espécie de "tamanho preliminar" a qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^d$. O próprio nome "medida exterior" sugere seu propósito: determinar o volume de um conjunto E através de uma aproximação "por fora". Isso é feito cobrindo o conjunto E com cubos.

Definição 2.7. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^d$, dizemos que a medida exterior de E é

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

onde o ínfimo é tomado em toda cobertura enumerável $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ por cubos fechados.

A medida exterior é sempre não negativa, mas pode ser infinita. De forma geral, podemos dizer que $0 \leq m_*(E) \leq \infty$.

Exemplo 2.8. A medida exterior de um ponto é zero, basta observar que um ponto é um cubo com volume zero e é coberto por si mesmo. E, como a medida exterior do vazio é igual a zero, segue o resultado.

Exemplo 2.9 (Conjunto de Cantor)**.** O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ definido pelo matemático Georg Cantor. Tal conjunto carrega consigo algumas características interessantes, vejamos agora como é construído esse conjunto. Começamos com o intervalo fechado e limitado $C_0 = [0, 1]$ e seja C_1 obtido retirando o intervalo aberto do terço de médio de $[0, 1]$, isto é,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

O conjunto C_2 é obtido fazendo isso para cada subintervalo de C_1, isto é, deletamos o intervalo aberto do terço médio de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dessa forma temos

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

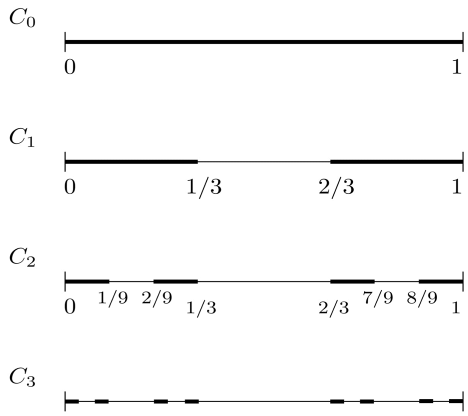
Repetimos esse processo para cada subintervalo de C_2 e assim por diante. Esse procedimento gera uma sequência C_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ de conjuntos limitados e fechados com

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \cdots .$$

O Conjunto de Cantor é definido como a interseção entre todos os $C_k\,'s$, isto é

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Figura 2 – Primeiros passos da construção o conjunto de Cantor



Fonte: STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009. p. 9.

Note que o conjunto de Cantor é não vazio, uma vez que todos os pontos finais de cada intervalo C_k pertence a C. Além disso, C_k é uma união disjunta de 2^k intervalos de tamanho 3^{-k} cada um para todo k. Ademais, o conjunto de Cantor tem medida exterior igual a zero. Com efeito, por construção sabemos que $C \subset C_k$ para todo k onde cada C_k é uma união disjunta de 2^k intervalos fechados, cada um de comprimento 3^{-k}. Consequentemente, $m_*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ para todo k e $\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Portanto, $m_*(C) = 0$.

A medida exterior tem algumas propriedades. As demonstrações dessas propriedades estão em [13], p. 13-16.

As propriedades são:

Propriedade 2.10 (Monotonicidade)**.** *Se $E_1 \subset E_2$ então $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.*

Propriedade 2.11 (Subaditividade enumerável)**.** *Se $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ então $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.*

Propriedade 2.12. *Se $E \subset \mathbb{R}^d$, então $m_*(E) = \inf m_*(\mathcal{O})$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os conjuntos abertos $\mathcal{O}$ contendo E.*

Propriedade 2.13. *Se $E = E_1 \cup E_2$ e $d(E_1, E_2) > 0$ então $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.*

Propriedade 2.14 (Aditividade Enumerável)**.** *Se um conjunto E é a união contável de cubos quase disjuntos $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ então $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.*

2.3 Conjuntos mensuráveis e a medida de Lebesgue

Em $\mathbb{R}^d$, o conceito de mensurabilidade identifica uma família específica de subconjuntos para os quais a medida exterior satisfaz todas as propriedades desejadas, incluindo a aditividade enumerável para uniões disjuntas de conjuntos. Embora existam várias formulações para definir a mensurabilidade – e as referências [13] e [12] utilizadas neste trabalho empreguem definições distintas que, contudo, são equivalentes – a que consideramos mais intuitiva é a que se segue:

Definição 2.15. Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável por Lebesgue ou simplesmente mensurável, se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto $\mathcal{O}$ com $E \subset \mathcal{O}$ e

$$m_*(\mathcal{O} - E) \leq \epsilon.$$

Se E é mensurável definimos essa medida de Lebesgue (ou medida) $m(E)$ por

$$m(E) = m_*(E).$$

A medida de Lebesgue satisfaz todas as propriedades da medida exterior citadas. Além disso, segue da definição outras propriedades, cujas demonstrações que estão omitidas podem ser encontradas em [13] p. 17–21.

Propriedade 2.16. *Todo conjunto aberto em $\mathbb{R}^d$ é mensurável.*

Demonstração. Se $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^d$, sabemos que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} - \mathcal{O} = \emptyset$. Daí

$$m_*(\emptyset) = 0 < \epsilon.$$

□

Propriedade 2.17. *Se $m_*(E) = 0$ então E é mensurável. Em particular, se F é um subconjunto de um conjunto com medida exterior igual a zero, então F é mensurável.*

Propriedade 2.18. *A união enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.*

Propriedade 2.19. *Conjuntos fechados são mensuráveis.*

Propriedade 2.20. *O complementar de um conjunto mensurável é mensurável.*

Propriedade 2.21. *A interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é um conjunto mensurável.*

Teorema 2.22. *Se $E_1, E_2, \ldots,$ são conjuntos mensuráveis disjuntos e $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ então*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Se $E_1, E_2, \ldots$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que aumenta para E no sentido de que $E_k \subset E_{k+1}$ para todo k, e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, então escrevemos $E_k \nearrow E$. De forma semelhante, se $E_1, E_2, \ldots$ decresce para E no sentido de que $E_k \supset E_{k+1}$ para todo k, e $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, então escrevemos $E_k \searrow E$.

Corolário 2.22.1. *Suponha que $E_1, E_2, \ldots$ sejam subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^d$.*

(i) Se $E_k \subset E_{k+1}$ e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, então $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$;

(ii) Se $E_k \supset E_{k+1}$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ e $m(E_k) < \infty$ para algum k, então

$$m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

Teorema 2.23. *Suponha que E seja um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^d$. Então, para todo $\epsilon > 0$:*

(i) Existe um conjunto aberto $\mathcal{O}$ com $E \subset \mathcal{O}$ e $m(\mathcal{O} - E) \leq \epsilon$;

(ii) Existe um conjunto fechado F com $F \subset E$ e $m(E - F) \leq \epsilon$;

(iii) Se $m(E)$ é finito, existe um conjunto compacto K com $K \subset E$ e $m(E - K) \leq \epsilon$.

Demonstração. (i) Consiste na definição de conjuntos mensuráveis.

(ii) Sabemos que E^c é mensurável, então existe um conjunto aberto $\mathcal{O}$ com $E^c \subset \mathcal{O}$ e $m(\mathcal{O} - E^c) \leq \epsilon$. Se deixarmos $F = \mathcal{O}^c$, então F é fechado, $F \subset E$, e $E - F = \mathcal{O} - E^c$. Portanto, $m(E - F) < \epsilon$, como desejado.

(iii) Escolhemos inicialmente um conjunto fechado F tal que $F \subset E$ e $m(E - F) \leq \epsilon/2$. Para cada n, seja B_n a bola centrada na origem com raio n, e definimos os conjuntos compactos $K_n = F \cap B_n$. Então, $E - K_n$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis que decresce para $E - F$, e como $m(E) < \infty$, com isso, usando o Corolário 2.22.1, $m(E-F) = \lim_n m(E - K_n)$ então $m(E - K_n) \leq \epsilon$.

$\square$

Observação 2.24. A medida de Lebesgue tem algumas propriedades de invariância, uma delas é a invariância por translação e dilatação, como enunciado abaixo:

1. Se E é um conjunto mensurável e $h \in \mathbb{R}^d$, então o conjunto $E_h = E + h = \{x + h : x \in E\}$ é também mensurável e $m(E + h) = m(E)$.

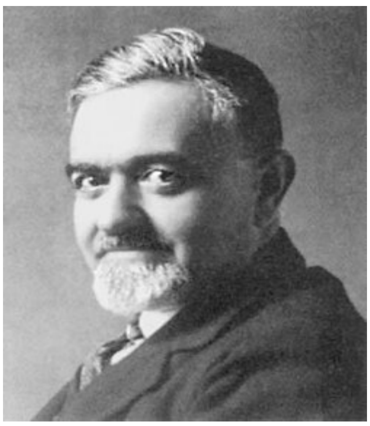
2. Se E é um conjunto mensurável e $\delta > 0$, e denotemos por δE o conjunto $\{\delta x : x \in E\}$. Então δE é mensurável e $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.

Essa propriedade será crucial para a construção que iremos fazer de um conjunto não mensurável.

2.3.1 Construção de um conjunto não mensurável

Em 1905, o matemático Giuseppe Vitali publicou o artigo *"Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta"* [14] (Sobre o problema da medida dos grupos de pontos de uma reta). Neste trabalho, ele demonstrou a existência de um conjunto não mensurável à Lebesgue. A construção desse conjunto $\mathcal{N}$ usa o Axioma da Escolha e a abordagem de Vitali define uma relação de equivalência entre os números reais no intervalo $[0, 1]$.

Figura 3 – Giuseppe Vitali



Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Vitali`

Escrevemos $x \sim y$ sempre que $x - y$ é racional. Perceba que, de fato, essa é uma relação de equivalência, uma vez que as seguintes propriedades são válidas:

- $x \sim x$ para todo $x \in [0,1]$;
- Se $x \sim y$, então $y \sim x$;
- Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$.

Sabemos que duas classes de equivalência são iguais ou disjuntas e o espaço todo é a união de todas as classes de equivalência, denotando por $\mathcal{E}_\alpha$ cada classe de equivalência gerada pela relação $\sim$ podemos escrever

$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_\alpha.$$

Agora, construímos o conjunto $\mathcal{N}$ escolhendo exatamente um elemento x_α de cada $\mathcal{E}_\alpha$, daí é definido o Conjunto de Vitali por $\mathcal{N} = \{x_\alpha\}$.

Teorema 2.25. *O conjunto $\mathcal{N}$ não é mensurável.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\mathcal{N}$ é mensurável. Seja $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma enumeração de todos os racionais em $[-1,1]$ e considere a translação $\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$. Primeiramente, provemos as seguintes afirmações.

Afirmação 1: Se $k \neq k'$ então $\mathcal{N}_k \cap \mathcal{N}_{k'} = \emptyset$.

Suponha que a interseção seja diferente do vazio, então existem racionais $r_k \neq r_{k'}$e α, β com $x_\alpha + r_k = x_\beta + r_{k'}$, então $x_\alpha - x_\beta = r_{k'} - r_k \in \mathbb{Q}$, dessa forma $x_\alpha \sim x_\beta$. O que é um absurdo, pois em $\mathcal{N}$ temos um representante de cada classe de equivalência.

Afirmação 2: $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1,2]$.

Comecemos provando a primeira inclusão, se $x \in [0,1]$ então existe $a \in \mathcal{N}$ tal que $a \in [0,1]$ e $r_k \in \mathbb{Q}$, com $x - a = r_k$, daí $x = r_k + a$ com $a \in [0,1]$. Portanto, $x \in \mathcal{N}_k$. Para a segunda inclusão: se $x \in \mathcal{N} \in [0,1]$ e $r_k \in [-1,1]$, então $0 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq r_k \leq 1$, somando obtemos que $-1 \leq x + r_k \leq 2$ portanto, $x + r_k \in [-1,2]$. Como $\mathcal{N}$ é mensurável $\mathcal{N}_k$ também o é para todo k, pela observação 2.24, e desde que a união seja disjunta temos:

$$m([0,1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq m([-1,2])$$

assim sendo, obtemos

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq 3.$$

Uma vez que a medida seja invariante por translação, sabemos que $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{N})$, dessa maneira
$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leq 3.$$
O que é um absurdo, pois se $m(\mathcal{N}) = 0$ então $1 \leq 0 \leq 3$ e se $m(\mathcal{N}) > 0$ então $1 \leq \infty \leq 3$.
$\square$

Axioma da Escolha: Suponha E um conjunto não vazio e $\mathcal{E}$ uma coleção de subconjuntos não vazios de E. Existe uma função de escolha $f : \mathcal{E} \to E$ tal que $f(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{E}$.

A construção do conjunto $\mathcal{N}$ foi possível por se basear nesse axioma. Embora o Axioma da Escolha pareça intuitivo, ele pode gerar resultados contraintuitivos. A não-mensurabilidade desse conjunto é uma consequência direta do axioma.

O Axioma da Escolha ocorre, muitas vezes de forma implícita, em diversas provas matemáticas. Sua natureza aparentemente evidente, por muito tempo, obscureceu o entendimento de seu verdadeiro significado e das implicações de seu uso.

2.4 Funções mensuráveis

Tendo já compreendido o conceito de conjuntos mensuráveis, nosso foco agora se volta para os elementos essenciais da teoria da integração: as funções mensuráveis.

Definição 2.26. Dizemos que uma função f em $\mathbb{R}^d$ é uma função de valor finito se $-\infty < f(x) < \infty$ para todo x.

Definição 2.27. Uma função f definida num subconjunto $E \in \mathbb{R}^d$ é mensurável se para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto
$$f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$$
é mensurável.

Proposição 2.28. *Seja f uma função mensurável com domínio E. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) > c\}$ é mensurável;

(ii) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) \geq c\}$ é mensurável;

(iii) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) < c\}$ é mensurável;

(iv) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) \leq c\}$ é mensurável.

Demonstração. $i) \implies ii)$ Podemos escrever $\{x \in E : f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) > c - \dfrac{1}{k}\}$. De fato esta igualdade é válida, pois se $x \in \{x \in E : f(x) \geq c\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos que $c > c - \frac{1}{k}$ daí $f(x) \geq c > c - \frac{1}{k}$. Logo, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) > c - \dfrac{1}{k}\}$. Por outro lado, se $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) > c - \dfrac{1}{k}\}$. Suponha por contradição que $f(x) < c$, dessa forma existe $\epsilon > 0$ de modo que $f(x) + \epsilon = c$. Considerando k_0 suficientemente grande de modo que $\frac{1}{k_0} < \epsilon$, então $f(x) - c < \frac{-1}{k_0} \implies f(x) < c - \frac{1}{k}$, que é um absurdo. Portanto, considerando isto, o resultado segue imediatamente da Propriedade 2.21.
$ii) \implies i)$ Escrevendo $\{x \in E : f(x) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) \geq c + \dfrac{1}{k}\}$ o resultado segue da Propriedade 2.18.
$iii) \implies iv)$ Perceba que, $\{x \in E : f(x) \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) > c + \dfrac{1}{k}\}$, assim pela Propriedade 2.21 concluímos.
$iv) \implies iii)$ Basta escrevermos $\{x \in E : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) \leq c - \dfrac{1}{k}\}$ e, analogamente, pela Propriedade 2.18 segue.
$ii) \implies iii)$ Basta observarmos que $\{x \in E : f(x) \geq c\}^c = \{x \in E : f(x) < c\}$, dessa maneira uma vez que complementar de mensurável é mensurável (Propriedade 2.20), segue.
$iii) \implies ii)$ Note que $\{x \in E : f(x) < c\}^c = \{x \in E : f(x) \geq c\}$, portanto pela Propriedade 2.20 concluimos a prova. □

Proposição 2.29. *A função de valor finito f é mensurável se, e somente se, para todo conjunto aberto $\mathcal{O}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é mensurável, e se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é mensurável para todo conjunto fechado F*

Demonstração. Suponha que f é mensurável. Seja $\mathcal{O}$ aberto, então podemos expressar $\mathcal{O}$ como uma coleção enumerável de intervalos abertos e limitados $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ onde cada I_k pode ser expressado por $B_k \cap A_k$ onde $B_k = (-\infty, b_k)$ e $A_k = (a_k, \infty)$, desde que f seja mensurável cada $f^{-1}(A_k), f^{-1}(B_k)$ são conjuntos mensuráveis. Daí, note que

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \bigcap A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) \bigcap f^{-1}(A_k)$$

essa igualdade de fato é válida, uma vez que se $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \cap A_k)\right)$, então $f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \cap A_k)$. Daí, existe um índice k tal que $f(x) \in B_k$ e $f(x) \in A_k$, isso implica que $x \in f^{-1}(B_k)$ e $x \in f^{-1}(A_k)$, de modo que $x \in f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(A_k)$. Portanto, segue que $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(A_k)\right)$. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(A_k)\right)$, então para algum índice k temos que $x \in f^{-1}(B_k)$ e $x \in f^{-1}(A_k)$. Daí, segue que $f(x) \in B_k$ e $f(x) \in A_k$, o que significa que $f(x)$ pertence à interseção $B_k \cap A_k$. Com isso, $f(x)$ deve pertencer à união de todas essas interseções, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \bigcap A_k)$. Portanto, pela definição de imagem inversa, concluímos que $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \cap A_k)\right)$. Assim, como $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(A_k)$ é mensurável pelas Propriedades 2.21 e 2.18 então $f(\mathcal{O})$ é mensurável e, portanto, f é mensurável. Reciprocamente, se a imagem inversa de todo conjunto aberto é mensurável, então $f^{-1}(-\infty, a)$ é mensurável. Logo, f é mensurável. Por outro lado, se a imagem inversa de todo conjunto fechado é mensurável, então $f^{-1}(-\infty, a]$ é mensurável. Portanto, f é mensurável. □

Proposição 2.30. *Se f é contínua em $\mathbb{R}^n$, então f é mensurável. Se f é mensurável e de valor finito e Φ é contínua então $\Phi \circ f$ é mensurável.*

Demonstração. Se f é contínua, por definição, para todo aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ temos que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto e como todo conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ é mensurável, segue que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é mensurável. Além disso, se Φ é contínua então $\Phi^{-1}((-\infty, a))$ é um conjunto aberto, chamemos esse aberto de $\mathcal{O}$. Note que

$$(\Phi \circ f)^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1} \circ \Phi^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}(\mathcal{O}).$$

Desde que f seja mensurável $f^{-1}(\mathcal{O})$ também o é. Portanto, $\Phi \circ f$ é mensurável. □

Em alguns momentos, para simplicar a escrita, escreveremos $\lim_n f(x)$ para simbolizar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ou seja, o limite da função $f(x)$ quando x tende para infinito.

Proposição 2.31. *Suponha que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de funções mensuráveis. Então*

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

são mensuráveis.

Demonstração. A prova de que $\sup_n f_n$ é mensurável requer observar que $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$, uma vez que f_n é mensurável para todo n então $\{f_n > a\}$ é mensurável para todo n e, logo, $\bigcup_n \{f_n > a\}$ é mensurável. Isto também produz o resultado para $\inf_n f_n(x)$, já que esta quantidade é igual a $-\sup_n(-f_n(x))$. O resultado para o lim sup e lim inf segue das duas observações:

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_k \{\sup_{n\geq k} f_n\} \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_k \{\inf_{n\geq k} f_n\}.$$

E concluimos usando a primeira parte da demonstração. □

Proposição 2.32. *Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma coleção de funções mensuráveis, e*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

então f é mensurável.

Demonstração. Como $f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$, usando o resultado anterior, obtemos que $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ são mensuráveis e, portanto, f é mensurável. □

Proposição 2.33. *Seja $f : E \to \mathbb{R}$ e $D \subset E$. f é mensurável se, e somente se, $f|_D$ e $f|_{E-D}$ são mensuráveis.*

Definição 2.34. Dadas duas funções f, g definidas em um conjunto E, dizemos que $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto (q.t.p) se $f(x) \neq g(x)$ em $N \subset E$ com $m(N) = 0$ e escrevemos $f = g$ q.t.p. ou $f = g$ a.e.

Proposição 2.35. *Se f é mensurável e definida num conjunto E e $f(x) = g(x)$ em quase todo lugar em E então g é mensurável.*

Demonstração. Defina, $N = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ com $m(N) = 0$. Iremos mostrar que para todo α o conjunto $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\}$ é mensurável.
Perceba que

$$\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} = (\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \cap N^c) \cup (\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \cap N).$$

Por hipótese, f é mensurável então $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ é mensurável e desde que N seja mensurável N^c também o é, logo $(\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \cap N^c)$ é mensurável. Além disso, $(\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \cap N) \subset N$ e, portanto, pela propriedade 2.17 segue que $(\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \cap N)$ é mensurável. E, por fim, a união desses conjuntos também é um conjunto mensurável, logo $\{x \in E \mid g(x) > \alpha\}$ é mensurável. □

Proposição 2.36. *Dado $k \in \mathbb{Z}$ e f uma função mensurável, então f^k é mensurável.*

Demonstração. Note que, se k é ímpar então $\{f^k > a\} = \{f > a^{\frac{1}{k}}\}$ que é um conjunto mensurável, desde que f seja mensurável. E se k é par e $a \geq 0$, então $\{f^k > a\} = \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \cup \{f < -a^{\frac{1}{k}}\}$ que também é um conjunto mensurável uma vez que f é uma função mensurável. □

Proposição 2.37. *Dadas f, g funções mensuráveis e de valor finito definidas em E, para quaisquer α, β tem-se $\alpha f + \beta g$ mensurável.*

Demonstração. Primeiramente, perceba que se $\alpha = 0$ então f é mensurável. Se $\alpha \neq 0$, para qualquer número c temos

$$\Big\{x \in E \mid \alpha f(x) > c\} = \{x \in E \mid f(x) > \frac{c}{\alpha} \text{ se } \alpha > 0\Big\} \text{ e}$$

$$\Big\{x \in E \mid \alpha f(x) > c\} = \{x \in E \mid f(x) < \frac{c}{\alpha} \text{ se } \alpha < 0\Big\}.$$

A mensurabilidade de f implica na mensurabilidade de αf, o mesmo se aplica à βg. Daí, se mostrarmos que $f + g$ segue que $\alpha f + \beta g$ é mensurável. Por hipótese, f, g são funções de valor finito então seja $x \in E$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) + g(x) < c$. Desde que $f(x) + g(x) < c$, então $f(x) < c - g(x)$ e pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < q < c - g(x)$. Por isso,

$$\{x \in E \mid f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E \mid g(x) < c - q\} \cap \{x \in E \mid f(x) < q\}.$$

Portanto, como interseção e união enumerável de conjuntos mensuráveis é mesurável, concluimos que $f + g$ é mensurável e, logo, $\alpha f + \beta g$ é mensurável. □

Proposição 2.38. *Se f, g são mensuráveis então $f \cdot g$ é mensurável.*

Demonstração. Podemos escrever $f \cdot g = \dfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$ e usando as Proposições 2.36 e 2.37 concluimos que $f \cdot g$ é mensurável. □

2.5 Aproximação por funções simples

Os teoremas abordados nesta seção fornecerão uma compreensão melhor da estrutura das funções mensuráveis, sendo importante para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Mostraremos que uma função é mensurável se, e somente se, é possível aproximá-la por uma sequência de funções simples que possui propriedades específicas. Para isso, comecemos definindo conceitos importantes.

Definição 2.39. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções com domínio comum E mensurável e uma função $f : E \to \mathbb{R}$ com $A \subset E$. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente em $A \subseteq E$ se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Além disso, dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em quase todo lugar, se $\{f_n\}$ converge pontualmente em $A - B$ com $m(B) = 0$.

Proposição 2.40. *Seja f_n uma sequência de funções mensuráveis em E que converge pontualmente em quase todo lugar para função f, então f é mensurável.*

Demonstração. Seja $E \subset E_0$ com $m(E_0) = 0$ e $f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x)$ em $E - E_0$. Pela Proposição 2.33, a função f é mensurável se, e somente se, $f|_{E_0}$ e $f|E - E_0$ são mensuráveis. Desde que $m(E_0) = 0$, então $f|_{E_0}$ é mensurável pelo resultado 2.17, pois é um subconjunto de um conjunto de medida zero. Daí, nos resta mostrar que $f|_{E-E_0}$ é mensurável. Fixe um número c, mostraremos que o conjunto $\{x \in E - E_0 \mid f(x) < c\}$ é mensurável. Desde que $f_n(x) \to f(x)$ e $f < c$, para cada ponto $x \in E - E_0$, então existem $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $f_j < c - \frac{1}{n}$ para todo $j \geq k$. De fato, a convergência pontual de f_n nos diz que

$$\forall \epsilon = \frac{1}{n} \ \exists j \in \mathbb{N} \ ; \ |f_n - f| < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq j,$$

sendo assim, obtemos

$$f_n < f + \frac{1}{n} < n \quad \forall n \geq j.$$

E, reciprocamente, se $f_j < c - \frac{1}{n}$ para todo $j \geq k$, passando o limite em j, encontramos que

$$\lim_j f_j \leq c - \frac{1}{n}$$

por isso,

$$f \leq c - \frac{1}{n} < c.$$

Mas, para todo número natural n, j, desde que f_j seja mensurável, o conjunto

$$\left\{x \in E - E_0 | f_j < c - \frac{1}{n}\right\}$$

é mensurável. Portanto, a interseção enumerável de conjuntos mensuráveis

$$\bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{x \in E - E_0 | f_j < c - \frac{1}{n}\right\}$$

também é mensurável. Note que,

$$\{x \in E - E_0 \mid f(x) < c\} = \bigcup_{1 \leq k, n < \infty}^{\infty} \left[\bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{x \in E - E_0 \mid f_j < c - \frac{1}{n}\right\}\right].$$

Uma vez que $x \in \{x \in E - E_0 \mid f(x) < c\}$, existem $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $f_j < c - \frac{1}{n}$ para todo $j \geq k$. Logo, $x \in \bigcap_{j=k}^{\infty} \{x \in E - E_0 \mid f_j < c - \frac{1}{n}\}$ e, portanto, pertence a união. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{1 \leq k, n < \infty}^{\infty} \left[\bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{x \in E - E_0 \mid f_j < c - \frac{1}{n}\right\}\right]$, então para algum $n, k \in \mathbb{N}$ temos $f_j < c - \frac{1}{n}$ sempre que $j \geq k$, logo, $f < c$. Portanto, $\{x \in E - E_0 \mid f(x) < c\}$ é mensurável como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 2.41. Seja A um conjunto, a função característica de A, χ_A, é a função em $\mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função χ_A é mensurável se, e somente se, o conjunto A o for. De fato, uma vez que dado $B \subset \{0, 1\}$ se $B = \{0\}$ então $f^{-1}(B) = A^c$ e se $B = \{1\}$ então $f^{-1}(B) = A$. Diante disso, é notável que a existência de conjuntos não mensuráveis implica na existência de funções não mensuráveis.

Definição 2.42. Uma função de valor real φ definida num conjunto mensurável E é chamada de simples se é mensurável e assume apenas uma quantidade finita de valores.

Combinação linear e produto de funções simples, continua uma função simples, pois desde que cada uma possua apenas valores finitos o produto resulta em um valor finito e combinação linear de funções mensuráveis é mensurável.

Se φ é uma função simples com domínio E e leva valores distintos $c_1, c_2, \cdots, c_k$ então

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

com $E_k = \{x \in E \mid \varphi(x) = c_k\}$. Essa representação particular de φ como uma combinação linear das funções características é chamada de representação canônica da função simples.

Lema 2.43. *Seja f uma função de valores reais mensurável e definida em E. Assuma f limitada em E. Então, para cada $\epsilon > 0$ existem funções $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon$ definidas em E que tem as seguintes propriedades de aproximação:*

$$\varphi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon \quad e \quad 0 \leq \psi_\epsilon - \varphi_\epsilon < \epsilon.$$

Demonstração. Seja (c, d) um intervalo aberto que contém as imagens de E e

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

uma partição de $[c, d]$ com $y_k - y_{k-1} < \epsilon$ podemos fazer isto pois uma vez que $[c, d]$ é compacto também é totalmente limitado. Defina $I_k = [y_{k-1}, y_k)$ e $E_k = f^{-1}(I_k)$ para $1 \leq k \leq n$. Perceba que cada I_k é mensurável e disjunto. Além disso, por hipótese f é mensurável, então cada E_k é mensurável. Defina as funções simples φ_ϵ e ψ_ϵ por

$$\varphi_\epsilon = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\chi_{E_k} \qquad \psi_\epsilon = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{E_k}.$$

Seja $x \in E$. Contanto que $f(E) \subseteq (c, d)$, há únicos k, $1 \leq k \leq n$ de modo que $f(x) \in I_k$. Daí $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ só que $\varphi_\epsilon(x) = y_{k-1} \leq f(x) < y_k = \psi_\epsilon(x)$, portanto, $\varphi_\epsilon(x) \leq f(x) < \psi_\epsilon(x)$. Ademais, $y_k - y_{k-1} < \epsilon$ e, logo, φ_ϵ e ψ_ϵ têm as propriedades de aproximação. □

Definição 2.44. Uma função estendida é uma função do tipo $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, onde X é o domínio da função e $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Observação 2.45. Dada uma função real f podemos decompô-la em duas funções f^- e f^+, com f^- e f^+ definidas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Assim, a função f pode ser escrita como $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Perceba que, desta forma, conseguimos expressar f como a diferença de duas funções não-negativas.

Teorema 2.46 (Aproximação simples)**.** *Uma função real extendida f em um conjunto mensurável E é mensurável se, e somente se, há uma sequência $\{\varphi_n\}$ de funções simples em E que converge pontualmente em E para f e tem a propriedade $|\varphi_n| \leq |f|$ em E para todo n.*

Demonstração. Se há uma sequência de funções mensuráveis $\{\varphi_n\}$ que converge pontualmente para f, pela Proposição 2.40 conclui-se que f é mensurável. Reciprocamente, assuma f mensurável e $f \geq 0$ em E. Seja $n \in \mathbb{N}$ e defina $E_n = \{x \in E \mid f(x) \leq n\}$, E_n é um conjunto mensurável desde que f seja mensurável, daí a restrição $f|_{E_n}$ é uma função não-negativa, mensurável e limitada. Dessa forma, podemos usar o lema anterior aplicado a restrição $f|_{E_n}$, escolha $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, então existem as funções simples φ_n e ψ_n definidas em E_n com a seguinte propriedade de aproximação:

$$0 \leq \varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ em } E_n; \tag{2.1}$$

$$0 \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ em } E_n. \tag{2.2}$$

Juntando (2.1) e (2.2) concluimos que

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n}.$$

Agora, estenda φ_n para todo E definindo $\varphi_n = n$ se $f(x) > n$. Explicitamente, φ_n está definida da seguinte forma:

$$\varphi_n = \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n; \\ f(x) & \text{se } f(x) \leq n. \end{cases}$$

Afirmamos que a sequência $\{\psi_n\}$ converge para f pontualmente em E. Seja $x \in E$. Se $f(x)$ é finito, escolha um número natural N tal que $f(x) < N$, então

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n} \ \forall\, n \geq N.$$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f(x)$ desde que $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n - \varphi_n = 0$, assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = f(x)$. Por outro lado, se $f(x) = \infty$ então $\varphi_n(x) = n$ para todo n e

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \infty = f(x)$$

como queríamos demonstrar. □

2.6 Os três princípios de Littlewood

John Edensor Littlewood foi um matemático britânico que ficou conhecido por suas contribuições à análise, especialmente em colaboração com G. H. Hardy. Os chamados

Três Princípios de Littlewood, dizem respeito a três teoremas que, embora não foram provados por Littlewood, ele os popularizou buscando aproximar a intuição clássica da análise com as novas ferramentas trazidas pela teoria da medida.

Figura 4 – John Edensor Littlewood

Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Edensor_Littlewood`

Embora as noções de conjuntos mensuráveis e funções mensuráveis representem novas ferramentas, não podemos deixar de lado sua relação com conceitos mais antigos da análise. Litlewood resumiu esta relação em três princípios:

1. Todo conjunto é quase uma união finita de intervalos;

2. Toda sequência convergente é quase uniformemente convergente;

3. Toda função é quase contínua.

A mensurabilidade de cada obejto mencionado acima será importante e vai ser detalhada nos teoremas dessa seção.

Teorema 2.47. *Se $m(E)$ é finita, então há uma união finita $F = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ de cubos fechados tal que $m(E\Delta F) \leq \epsilon$. A notação $E\Delta F$ indica a diferença simétrica entre os conjuntos E e F, definida por $E\Delta F = (E - F) \cup (F - E)$.*

Demonstração. Escolha uma família de cubos fechados $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que, dado $\epsilon > 0$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad e \quad m(E) \geq \sum_i m(Q_i) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $m(E) < \infty$, então $\sum m(Q_i)$ converge pelo Critério da comparação. Daí, existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} m(Q_i) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Desde que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ e $F = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, então $E - F \subseteq \bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i$, e portanto

$$m(E - F) \leq m\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i\right).$$

Por outro lado,

$$F - E = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i - E.$$

Logo,

$$m(E\Delta F) \leq m\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i\right) + \left(m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) - m(E)\right).$$

Pela equação (2.3), $m\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} Q_i\right) < \frac{\epsilon}{2}$ e pela forma que escolhemos os cubos, temos $m\left(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i\right) - m(E) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim,

$$m(E\Delta F) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Teorema 2.48 (Egorov)**.** *Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções mensuráveis definidas em um conjunto mensurável E, com $m(E) < \infty$, e assuma que $f_k \to f$ quase em toda parte em E. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um conjunto fechado $A_\epsilon \subseteq E$ tal que $m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$ e $f_k \to f$ uniformemente em A_ϵ.*

Demonstração. Assuma sem perda de generalidade que $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$. Para cada par de inteiros n e k defina

$$E_k^n = \left\{x \in E \mid |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n}\ \forall j \geq k\right\}.$$

Fixando n obtemos $E_k^n \subseteq E_{k+1}^n$ e $E = \bigcup_k E_k^n$. Pelo item i do Corolário 2.22.1 sabemos que $m(E) = \lim_n m(E_k^n)$, assim existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $m(E - E_{k_n}^N) < \frac{1}{2^n}$. Por construção, se $x \in E_{k_n}^n$ $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ para todo $j \geq k_n$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ é convergente, então escolhemos N tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n < \epsilon/2.$$

E seja $\widetilde{A_\epsilon} = \bigcap_{n \geq N} E^n_{k_n}$, com isso temos $\widetilde{A_\epsilon}^c = \bigcup_{n \geq N} (E^n_{k_n})^c$, então

$$m(E - \widetilde{A_\epsilon}) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E - E^n_{k_n}) < \sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n < \epsilon/2.$$

Além disso, se $\delta > 0$ podemos escolher $n \geq N$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Se $x \in \widetilde{A_\epsilon}$ então $x \in E^n_{k_n}$ e $|f_j - f(x)| < \delta$ para todo $j > k_n$. Portanto, f_k converge uniformemente para f em $\widetilde{A_\epsilon}$. Usando o item (ii) do Teorema 2.23, seja $A_\epsilon \subset \widetilde{A_\epsilon}$ um conjunto fechado tal que $m(\widetilde{A_\epsilon} - A_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Finalmente,

$$m(E - A_\epsilon) = m(E - \widetilde{A_\epsilon}) + m(\widetilde{A_\epsilon} - A_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Para o terceiro príncipio iremos usar a seguinte proposição auxiliar:

Proposição 2.49. *Seja f uma função simples definida em E. Então, para cada $\epsilon > 0$, há uma função contínua g em $\mathbb{R}$ e um conjunto fechado F contido em E tal que*

$$f = g \quad em \quad F \qquad e \qquad m(E - F) < \epsilon.$$

Demonstração. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ um número finito de valores distintos levados por f e pertencentes aos conjuntos $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, respectivamente, onde cada a_k é distinto. A coleção $\{E_k\}_{k=1}^n$ é disjunta, dado que cada a_k é distinto. Já mostramos, no Teorema 2.23, que se E é mensurável, para cada $\epsilon > 0$, há um conjunto fechado F contido em E tal que $m(E - F) \leq \epsilon$. Daí, escolha $F_1, F_2, \ldots, F_n$ conjuntos fechados tais que, para cada k entre 1 e n, tenhamos $F_k \subset E_k$ e $m(E_k - F_k) < \epsilon/n$. Defina $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$, sendo uma união de uma coleção finita de conjuntos fechados e desde que $\{E_k\}$ é disjunto,

$$m(E - F) = m\left(\bigcup_{k=1}^n (E_k - F_k)\right) = \sum_{k=1}^n m(E_k - F_k) < n \cdot \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

Agora defina a função g em F que leva valores F_k em a_k, para $1 \leq k \leq n$. Dado que a coleção $\{F_k\}_{k=1}^n$ é disjunta, g está bem definida. Além disso, g é contínua em F pois, se $x \in F$ então $x \in F_k$ para algum k e note que $F_k^c = \bigcup_{i \neq k}^n F_i$, uma vez que $\bigcup_{i \neq k}^n F_i$ é fechado, segue que F_k é aberto. Daí, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in F_k$ temos $B_\epsilon(x) \subset F_k$. Mas, sabemos que $F_k \cap F_i = \emptyset$ para $i \neq k$. E desde que F_k é disjunto para todo k segue que $g|_{B_\epsilon(x)} = a_k$. □

Teorema 2.50 (Lusin). *Seja f uma função de valores reais, definida em um conjunto mensurável E. Então, para cada $\epsilon > 0$, há uma função contínua g em $\mathbb{R}$ e um conjunto fechado F contido em E tal que*

$$f = g \quad em \quad F \quad e \quad m(E - F) < \epsilon.$$

Demonstração. Vamos considerar o caso em que $m(E) < \infty$. Sendo f uma função mensurável então existe f_n função simples tal que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in E$. Além disso, como f_n é uma sequência de funções simples, pelo lema anterior, existe g_n uma função real contínua e um conjunto fechado $F_n \subset E$ tal que

$$f_n = g_n \text{ em } F_n \text{ e } m(E - F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Desde que $f_n \to f$ em E, pelo teorema de Egorov existe $F_0 \subset E$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em F_0 e $m(E - F_0) < \frac{\epsilon}{2}$.
Defina

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

observe que pela lei de Morgan $E - F = \bigcup_{n=0}^{\infty} [E - F_n]$ e podemos escrever

$$E - F = [E - F_0] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [E - F_n].$$

Com isso,

$$m(E - F) = m\left([E - F_0] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (E - F_n)\right) < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon.$$

O conjunto F é fechado, desde que é interseção de conjuntos fechados. Cada f_n é contínua pois $F \subset F_n$ e $f_n = g_n$ em F_n. Finalmente, $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em $F \subset F_0$. Portanto, o limite uniforme de sequência de funções contínuas é contínuo, então a restrição de f em F é contínua, como queríamos demonstrar. □

2.7 A desigualdade de Brunn-Minkowski

Definição 2.51. A soma de dois conjuntos mensuráveis A e B é definida como sendo o conjunto:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^d : x = x' + x'' \text{ with } x' \in A \text{ and } x'' \in B\}.$$

A primeira questão que podemos propor (ainda que de maneira vaga) é se é possível encontrar alguma estimativa geral para a medida de $A+B$ com base nas medidas de A e B, supondo que esses três conjuntos sejam mensuráveis. Observa-se que não é possível obter um limite superior para $m(A+B)$ em termos de $m(A)$ e $m(B)$. Veja o exemplo abaixo, que indica que podemos ter $m(A)=m(B)=0$, mas $m(A+B)>0$.

Exemplo 2.52. Em $\mathbb{R}$, seja $A=\mathcal{C}$ (o conjunto de Cantor), $B=\mathcal{C}/2$. Note que, uma vez que A,B são compactos então $A+B$ também é compacto, portanto mensurável, daí $m(A+B)$ existe. Além disso, $A+B\supseteq[0,1]$, então $m(A+B)\geq 1$, mas $m(A)=0$ e $m(B)=0$.

Por outro lado, pode-se buscar uma estimativa geral na seguinte forma

$$m(A+B)^{\alpha}\geq c_{\alpha}\Big(m(A)^{\alpha}+m(B)^{\alpha}\Big),$$

em que α é um número positivo, e a constante c_{α} não depende de A ou B. A desigualdade de Brunn-Minkowski relaciona essas medidas e o α estará relacionado com a dimensão do espaço.

Teorema 2.53 (Desigualdade de Brunn-Minkowski)**.** *Suponha que A e B são conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}^d$ e sua soma $A+B$ também é mensurável. Então, a seguinte desigualdade é válida*

$$m(A+B)^{1/d}\geq m(A)^{1/d}+m(B)^{1/d}.$$

Demonstração. A demonstração será feita em etapas, a cada etapa iremos expandir a veracidade da desigualdade para classes maiores de conjuntos.

Caso 1: Se A e B são retângulos de lados medindo $\{a_j\}_{j=1}^d$ e $\{b_j\}_{j=1}^d$ respectivamente. Como A,B são retângulos, sabemos que

$$m(A)=\prod_{j=1}^d a_j \quad \text{e} \quad m(B)=\prod_{j=1}^d b_j$$

então,

$$m(A)^{1/d}=\left(\prod_{j=1}^d a_j\right)^{1/d}, \quad m(B)^{1/d}=\left(\prod_{j=1}^d b_j\right)^{1/d}.$$

Da desigualdade das médias geométricas, conseguimos

$$\prod_{j=1}^d\left(\frac{b_j}{a_j+b_j}\right)^{1/d}\leq\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d\frac{b_j}{a_j+b_j}$$

e

$$\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{a_j}{b_j+a_j}\right)^{1/d} \leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{a_j}{b_j+a_j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j}{a_j+b_j}\right)^{1/d}+\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{a_j}{b_j+a_j}\right)^{1/d} &\leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{b_j}{a_j+b_j}+\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{a_j}{b_j+a_j}\\ &= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{a_j+b_j}{b_j+a_j}=\frac{1}{d}\cdot d=1.\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j}{a_j+b_j}\right)^{1/d}+\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{a_j}{b_j+a_j}\right)^{1/d} \leq 1.$$

Multiplicando por $\prod_{j=1}^{d}(a_j+b_j)^{1/d}$ obtemos

$$\left(\prod_{j=1}^{d}b_j\right)^{1/d}+\left(\prod_{j=1}^{d}a_j\right)^{1/d} \leq \left(\prod_{j=1}^{d}(a_j+b_j)\right)^{1/d}.$$

Caso 2: Se A e B for a união de retângulos cujos interiores são disjuntos. Iremos provar por indução no número total de retângulos em A e B. Denote esse número por n. Para o caso $n=1$, já mostramos que a desigualdade é válida. Supomos que a desigualdade é válida até n-1 e iremos provar que vale para n. É importante notar que a desigualdade não muda quando transladamos A e B independentemente. Substituímos A por $A+h$ e B por $B+h'$, e substituímos $A+B$ por $A+B+h+h'$. Agora, escolha um par de retângulos distintos R_1 e R_2 da coleção que compõe A, e note que eles podem ser separados por um hiperplano coordenado. Daí, podemos assumir que para algum j, após a translação por um h apropriado, R_1 está localizado em $A^-=A\cap\{x_j\leq 0\}$ e R_2 em $A^+=A\cap\{x_j>0\}$. Note que, tanto A^- quanto A^+ contém pelo menos um retângulo a menos que A e $A=A^-\cup A^+$.Fazendo o mesmo para B, transladamos B e definimos $B^-=B\cap\{x_j\leq 0\}$ e $B^+=B\cap\{x_j>0\}$. Essas translações são feitas de modo que

$$\frac{m(B^+)}{m(B^-)}=\frac{m(A^+)}{m(A^+)}. \tag{2.4}$$

Existe, pois definido $\phi(t):=\frac{m(B+th')^+}{m(B+th')^-}$, e $\phi(t)$ é uma função contínua. Dessa maneira, quando t tende para ∞ obtemos

$$\frac{m(B+th')^+}{m(B+th')^-}\to 0,$$

e quando t tende para $-\infty$ concluímos

$$\frac{m(B+th')^+}{m(B+th')^-}\to\infty.$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, uma vez que $\frac{m(B)^+}{m(B)^-}$ é um ponto, existe t_0 de modo que

$$\phi(t_0) = \frac{m(A^+)}{m(A^-)}.$$

Uma vez que isso acontece, e temos $m(A) = m(A^-) + m(A^+)$ e $m(B) = m(B^-) + m(B^+)$, segue que

$$\frac{m(B)^+}{m(B)^-} = \frac{m(B) - m(B^-)}{m(B^-)} = \frac{m(A) - m(A^-)}{m(A^-)}$$

por isso,

$$\frac{m(B)}{m(B^-)} - 1 = \frac{m(A)}{m(A^-)} - 1$$

assim,

$$\frac{m(B)}{m(B^-)} = \frac{m(A)}{m(A^-)}.$$

Além disso, $A+B \supseteq [(A^- + B^-) \cup (A^+ + B^+)]$, essa união é disjunta, pois se $x \in (A^+ + B^+)$, então $x \in \{x_j \geq 0\}$ por isso $x \notin \{x_j < 0\}$. Com isso, se $x \in (A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-)$, então $x \in (A^- + B^-)$ ou $x \in (A^+ + B^+)$. Se $x \in A^+ + B^+$ e $A^+ + B^+ = (A+B) \cap \{x_j > 0\}$ daí $x \in A + B$. Analogamente ocorre no caso em que $x \in (A^- + B^-)$, então de fato a inclusão é válida e a união é disjunta. Logo,

$$m(A + B) \geq m(A^- + B^-) + m(A^+ + B^+).$$

Por hipótese de indução se A e B forem formados por até $n - 1$ retângulos com interior disjunto, então a desigualdade é satisfeita. Como A^-, A^+, B^-, B^+ contêm até $n - 1$ retângulos, então a desigualdade é satisfeita para eles. Dessa maneira, $m(A^- + B^-)^{1/d} \geq m(A^-)^{1/d} + m(B^-)^{1/d}$, então $m(A^- + B^-) \geq (m(A^-)^{1/d} + m(B^-)^{1/d})^d$. E $m(A^+ + B^+)^{1/d} \geq m(A^+)^{1/d} + m(B^+)^{1/d}$, então $m(A^+ + B^+) \geq (m(A^+)^{1/d} + m(B^+)^{1/d})^d$. Logo,

$$m(A + B) \geq (m(A^+)^{1/d} + m(B^+)^{1/d})^d + (m(A^-)^{1/d} + m(B^-)^{1/d})^d.$$

Por (2.4), vale que $m(B^+) = \dfrac{m(A^+)m(B)}{m(A)}$ e $m(B^-) = \frac{m(A^-)m(B)}{m(A)}$. Então,

$$m(A^+)^{1/d} + m(B^+)^{1/d} = m(A^+)^{1/d} + \left(\frac{m(A^+)m(B)}{m(A)}\right)^{1/d} = m(A^+)^{1/d}\left(1 + \frac{m(B)}{m(A)}\right)^{\frac{1}{d}},$$

e

$$m(A^-)^{1/d} + m(B^-)^{1/d} = m(A^-)^{1/d} + \left(\frac{m(A^-)m(B)}{m(A)}\right)^{1/d} = m(A^-)^{1/d}\left(1 + \frac{m(B)}{m(A)}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
m(A+B) &\geq \left[m(A^+)^{1/d}\left(1+\frac{m(B)}{m(A)}\right)^{\frac{1}{d}}\right]^d + \left[m(A^-)^{1/d}\left(1+\frac{m(B)}{m(A)}\right)^{\frac{1}{d}}\right]^d \\
&= m(A^+)\left[1+\frac{m(B)^{1/d}}{m(A)^{1/d}}\right]^d + m(A^-)\left[1+\frac{m(B)^{1/d}}{m(A)^{1/d}}\right]^d \\
&= \left[1+\frac{m(B)^{1/d}}{m(A)^{1/d}}\right]^d (m(A^+)+m(A^-)) \\
&= \left[1+\frac{m(B)^{1/d}}{m(A)^{1/d}}\right]^d m(A) \\
&= \left[\left(1+\frac{m(B)^{1/d}}{m(A)^{1/d}}\right) m(A)^{\frac{1}{d}}\right]^d \\
&= \left[m(A)^{1/d}+m(B)^{1/d}\right]^d.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Caso 3: Quando A e B são conjuntos abertos e de medida finita. Se A é aberto, ele pode ser escrito como uma união enumerável de retângulos quase disjuntos. Daí, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos encontrar uniões de retângulos quase disjuntos A_ϵ e B_ϵ tais que

$$m(B) \leq m(B_\epsilon) + \epsilon, \quad m(A) \leq m(A_\epsilon) + \epsilon \quad \text{com } A_\epsilon \subseteq A \text{ e } B_\epsilon \subseteq B.$$

Portanto,

$$0 \leq m(A) - m(A_\epsilon) < \epsilon \quad \text{e} \quad 0 \leq m(B) - m(B_\epsilon) < \epsilon.$$

Logo, quando $\epsilon \to 0$ obtemos $m(B) = \lim_{\epsilon\to 0} m(B_\epsilon)$ e $m(A) = \lim_{\epsilon\to 0} m(A_\epsilon)$. Dado que $A_\epsilon + B_\epsilon \subseteq A + B$, por construção, então $m(A+B) \geq m(A_\epsilon + B_\epsilon)$. Uma vez que A_ϵ e B_ϵ são retângulos, temos

$$m(A_\epsilon + B_\epsilon)^{1/d} \geq m(A_\epsilon)^{1/d} + m(B_\epsilon)^{1/d},$$

o que implica $m(A+B)^{1/d} \geq m(A_\epsilon + B_\epsilon)^{1/d} \geq m(A_\epsilon)^{1/d} + m(B_\epsilon)^{1/d}$, desse modo

$$m(A+B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}.$$

Portanto, quando A e B são conjuntos abertos de medida finita, a desigualdade também é válida.

Caso 4: Se A e B são conjuntos compactos. Se A, B são compactos, então $A+B$ também é compacto. Defina

$$A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < \epsilon\}.$$

Note que A^ϵ é aberto. Fazendo o mesmo para B^ϵ, temos

$$B^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, B) < \epsilon\} \quad \text{e} \quad (A+B)^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A+B) < \epsilon\}.$$

Note que $A^\epsilon \searrow A$. De fato, se $d(x, A) < \dfrac{1}{\epsilon+1} < \dfrac{1}{\epsilon}$ implica que $x \in A^\epsilon$. E tomando $\epsilon = \dfrac{1}{k}$, então

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A^{\frac{1}{k}},$$

pois se $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A^{\frac{1}{k}}$, então $d(x, A) < \frac{1}{k}$ para todo k suficientemente grande. Logo, x é um valor de aderência de A, desde que A seja compacto então $x \in A$. Analogamente, o mesmo vale para B^ϵ e $(A+B)^\epsilon$. Com isso, $A^\epsilon \searrow A \quad \text{e} \quad B^\epsilon \searrow B$. Portanto, usando o Corolário 2.22.1

$$\lim_{\epsilon \to 0} m(A^\epsilon) = m(A), \quad \lim_{\epsilon \to 0} m(B^\epsilon) = m(B) \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon \to 0} m((A+B)^\epsilon) = m(A+B).$$

Observe que $A + B \subseteq A^\epsilon + B^\epsilon \subseteq (A+B)^{2\epsilon}$. De fato essas inclusões são válidas, para $x \in A + B$, temos $d(x, A+B) = 0 < \epsilon$ por isso $x \in A^\epsilon + B^\epsilon$. E se $x \in A^\epsilon + B^\epsilon$, então $d(x, A) + d(x, B) < 2\epsilon$ daí $d(x, A+B) < 2\epsilon$. Com isso,

$$m([(A+B)^{2\epsilon}]^{1/d}) \geq m(A^\epsilon)^{1/d} + m(B^\epsilon)^{1/d}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos $m(A+B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}$.

Caso 5: Quando A e B são conjuntos limitados. Dado que A, B, $A+B$ sejam mensuráveis e limitados, existem conjuntos compactos A_k, B_k e $(A+B)_k$ tais que $A_k \subset A$, $B_k \subset B$ e $(A+B)_k \subset A + B$, com

$$m(A - A_k) < \frac{1}{k} \quad m(B - B_k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad m((A+B) - (A+B)_k) < \frac{1}{k},$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Quando k tende para ∞ conseguimos

$$m(A) = \lim_{k \to \infty} m(A_k), \quad m(B) = \lim_{k \to \infty} m(B_k), \quad m(A+B) = \lim_{k \to \infty} m((A+B)_k).$$

Dado que A_k e B_k são compactos $m(A_k + B_k)^{1/d} \geq m(A_k)^{1/d} + m(B_k)^{1/d}$. Logo,

$$m(A+B) \geq m(A_k + B_k) \geq \left[m(A_k)^{1/d} + m(B_k)^{1/d}\right]^d.$$

Fazendo $k \to \infty$,

$$m(A+B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}.$$

Caso 6: O caso geral. Defina $A_k = [-k, k]^d\ A$, $B_k = [-k, k]^d \cap B$. Note que $A_k \nearrow A$ e $B_k \nearrow B$. A_k, B_k são conjuntos limitados. Dado que $A_k + B_k \subseteq A + B$, temos $m(A + B) \geq m(A_k + B_k)$ e usando o caso anterior

$$m(A + B) \geq m(A_k + B_k) \geq \left[m(A_k)^{1/d} + m(B_k)^{1/d}\right]^d.$$

Segue o resultado fazendo $k \to \infty$. $\square$

3

Teoria da integração

Henri Léon Lebesgue nasceu em Beauvais, França, em 1875. Em 1902, concluiu seu doutorado sob a orientação de Émile Borel, defendendo a tese *"Intégrale, Longueur, Aire"* (Integral, Comprimento, Área). Lebesgue, em 1905, publicou o livro intitulado *"Leçons sur l'Intégration"* [8] (Lições sobre a Integração), no qual ele aborda a teoria da integração. No prefácio dessa obra, ele destaca algumas de suas principais motivações e o propósito de sua nova abordagem:

> "(...) entre as numerosas definições que foram sucessivamente propostas para a integral das funções reais de uma variável real, retive apenas aquelas que são, em minha opinião, indispensáveis para bem compreender as transformações que o problema da integração recebeu e para apreender as relações que existem entre a noção de área, tão simples em aparência, e certas definições analíticas da integral com aspectos muito complicados há muito tempo. É para a resolução desses problemas, e não por amor a complicações, que introduzi neste livro uma definição de integral mais geral que a de Riemann e que compreende esta última como caso particular."

Ao longo do texto, Lebesgue discute alguns problemas que a teoria da integração enfrentava até então, evidenciando as limitações das abordagens existentes, como a de Riemann. Um dos desafios clássicos, simples de enunciar mas complexo para a integração de Riemann, era determinar a integral da Função de Dirichlet, $D(x)$, definida como

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Figura 5 – Henri Lebesgue

Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue`

Para a integração de Riemann, essa função não é integrável em nenhum intervalo $[a, b]$ onde $a < b$, pois em qualquer subintervalo, tanto o supremo quanto o ínfimo das somas de Riemann serão sempre 1 e 0, respectivamente, impedindo a convergência das somas inferior e superior.

Uma outra situação complicada vem quando consideramos uma sequência de funções contínuas $\{f_n\}$ em $[0, 1]$ que converge para uma função f. Se a convergência for uniforme, a conclusão é direta: a função limite f também será contínua, e, portanto, integrável à Riemann. Contudo, ao relaxar essa suposição e considerar apenas a convergência pontual, a situação se torna mais complexa. Um problema adicional da integral de Riemann reside no fato de que podemos ter uma sequência de funções contínuas $\{f_n\}$ que converge pontualmente para uma função f, onde $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para todo x, a sequência $f_n(x)$ é monotonamente decrescente em n, mas a função limite f não é integrável no sentido de Riemann. Este cenário ilustra uma das limitações da integral de Riemann quando se trata da troca de operações de limite e integração sob condições mais gerais do que a convergência uniforme. Dessa forma, buscando resolver problemas, Lebesgue propôs uma outra definição de integral, neste capítulo iremos construir a noção geral da integral de Lebesgue.

3.1 A integral de Lebesgue

A noção geral de integral de Lebesgue vai ser feita passo a passo. Nós iremos proceder em quatro etapas, integrando progressivamente:

1. Funções simples;
2. Funções limitadas cujo suporte é um conjunto de medida finita;
3. Funções não-negativas;
4. Funções integráveis.

Sendo assim, comecemos pela integral de Lebesgue para funções simples. Já vimos que a forma canônica de escrever uma função simples φ é

$$\varphi = \sum_i a_i \chi_{E_i} \tag{3.1}$$

onde cada a_i são valores distintos tomados por φ em E, e cada

$$E_i = \varphi^{-1}(a_i) = \{x \in E \mid \varphi(x) = a_i\}.$$

Definição 3.1. Seja ψ uma função simples definida em um conjunto de medida finita E. Definimos a integral de ψ sobre E por

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i),$$

onde ψ tem a representação canônica dada por (3.1).

Iremos escrever simplesmente $\int \psi(x)$ ou $\int \psi$ para representar a integral de ψ em $\mathbb{R}^d$.

Proposição 3.2. *A integral de funções simples definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Independência da representação. Se $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ é uma representação de φ, então

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot m(E_k).$$

(ii) Linearidade. Se φ e ψ são simples definidas em um conjunto de medida finita E e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) = a \int \varphi + b \int \psi.$$

(iii) Aditividade. Se E e F são subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^d$ com medida finita, então

$$\int_{E \cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

(iv) *Monotonicidade. Se $\varphi \leq \psi$ e ψ são simples, então*

$$\int \varphi \leq \int \psi.$$

(v) *Desigualdade triangular. Se φ é uma função simples, então*

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|.$$

Demonstração. (i) A coleção $\{E_i\}_{i=1}^n$ é disjunta, mas a representação pode não ser a representação canônica, desde que os a_i's podem não ser distintos. Devemos levar em conta possíveis repetições. Sejam $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ valores distintos tomados por φ. Para $1 \leq j \leq m$, seja

$$A_j = \{x \in E \mid \varphi(x) = a_j\}.$$

Pela definição de integral em termos da representação canônica

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot m(A_j).$$

Para $1 \leq j \leq m$, seja I_j o conjunto de índices i em $\{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i = \lambda_j$. Então, $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{j=1}^m I_j$ e a união é disjunta. Além disso, pela aditividade finita da medida

$$m(A_j) = \sum_{i \in I_j} m(E_i) \quad \text{para } 1 \leq g \leq m.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i) = \sum_{g=1}^{m} \left[\sum_{i \in I_g} a_i \cdot m(E_i)\right] = \sum_{g=1}^{m} a_g \cdot m(A_g) = \int_E \varphi.$$

(ii) Como tanto φ quanto ψ assumem apenas um número finito de valores em E, podemos escolher uma coleção finita disjunta $\{E_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos mensuráveis de E, cuja união é E, de modo que φ e ψ sejam constantes em cada E_i. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, seja a_i e b_i, respectivamente, os valores assumidos por φ e ψ em E_i. Assim,

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i) \quad \text{e} \quad \int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot m(E_i).$$

No entanto, a função simples $\alpha\varphi + \beta\psi$ assume o valor constante $\alpha a_i + \beta b_i$ em E_i. Assim,

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) \cdot m(E_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot m(E_i).$$

Portanto,

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi.$$

(iii) Desde que E e F são disjuntos, $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$. Daí, seja $\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i \cup F_i}$ uma representação da função φ. Note que

$$\int_{E\cup F} \varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \Big(m(E_i) + m(F_i)\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot m(E_i) + \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot m(F_i) = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

(iv) Assumindo $\varphi \leq \psi$ em E. Defina $\eta = \psi - \varphi$ em E. Pela linearidade,

$$\int_E \psi - \int_E \varphi = \int_E \eta \geq 0.$$

Desde que $\eta \geq 0$, a representação canônica também será não negativa, com isso seque que $\int_E \eta \geq 0$

(v) Note que $\left|\int_E \varphi\right| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \cdot m(E_k) = \int_E |\varphi|.$

□

Prosseguindo, iremos agora estender a integral de Lebesgue para funções limitadas suportadas em um conjunto de medida finita. Para isto, iremos introduzir a definição do conjunto suporte de uma função e o que vem a ser uma função suportada em um conjunto.

Definição 3.3. O suporte de uma função mensurável φ é definido por

$$\mathrm{supp}(\varphi) := \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Dizemos que φ é suportada em um conjunto E se $\varphi(x) = 0$ sempre que $x \notin E$.

Uma vez que φ seja mensurável, o suporte também será, pois sendo φ mensurável: $\varphi^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) < 0\}$ é mensurável, $\varphi^{-1}((0, \infty)) = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) > 0\}$ é mensurável. A interseção $\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}$ é mensurável, e o complemento $\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = 0\}$ também é mensurável. Assim, $\mathrm{supp}(\varphi)$ é mensurável.

A seguir, estamos interessados em funções limitadas que têm $m(\mathrm{supp}(\varphi)) < \infty$. Um resultado importante é de aproximação por funções simples 2.43, que será de grande utilidade no lema a seguir.

Lema 3.4. *Seja φ uma função limitada suportada em um conjunto E de medida finita. Se (φ_n) é uma sequência de funções simples, limitadas por M, suportadas em E, e com $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ em quase todo lugar, então*

(i) O limite $\lim_n \int \varphi_n$ existe.

(ii) Se $\varphi = 0$ em quase todo lugar, então o limite $\lim_n \int \varphi_n = 0$.

Demonstração. (i) Desde que $m(E) < \infty$, dado $\epsilon > 0$, o Teorema 2.48 (Egorov) garante a existência de um subconjunto fechado e mensurável $A_\epsilon \subseteq E$ tal que $m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$ e $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente em A_ϵ.

Assim, definindo $I_n = \displaystyle\int \varphi_n$, temos

$$|I_n - I_m| \leq \int_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + \int_{E-A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|.$$

Desde que $\{\varphi_n\}$ seja limitada por M

$$\leq \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + 2M \cdot m(E - A_\epsilon). \leq \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + 2M \cdot \epsilon.$$

Pela convergência uniforme em A_ϵ, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que, para todo n, m suficientemente grande e para todo $x \in A_\epsilon$, temos $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \epsilon$. Então $|I_n - I_m| \leq m(A_\epsilon) \cdot \epsilon + 2M \cdot \epsilon$ e sendo $m(A_\epsilon) \leq m(E)$, segue que

$$|I_n - I_m| \leq m(E) \cdot \epsilon + 2M \cdot \epsilon.$$

Uma vez que ϵ é arbitrário e $m(E) < \infty$, provamos que $\{I_n\}$ é de Cauchy. Portanto, a sequência converge e o limite existe.

(ii) Note que se $\varphi = 0$, podemos repetir o argumento, definindo $\displaystyle\int \varphi_n = I_n$. Existe, pelo Teorema 2.48, $A_\epsilon \subseteq E$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente em A_ϵ. Perceba que,

$$|I_n| = \int_E |\varphi_n| = \int_{A_\epsilon} |\varphi_n| + \int_{E-A_\epsilon} |\varphi_n| \leq \int_{A_\epsilon} |\varphi_n| + M \cdot m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon \cdot m(E) + M \cdot \epsilon.$$

Uma vez que ϵ é arbitrário, segue que $\int \varphi_n \to 0$, como queríamos mostrar.

□

Usando este lema, nós podemos agora definir a integral de Lebesgue de uma função limitada suportada em um conjunto de medida finita.

Definição 3.5. Sendo f uma função limitada suportada em um conjunto de medida finita, definimos a integral de Lebesgue por

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n,$$

onde $\{\varphi_n\}$ é uma sequência de funções simples satisfazendo $|\varphi_n| \leq M$, cada φ_n é suportada no suporte de f e $\varphi_n \to f$ em quase todo lugar.

Agora, devemos primeiro mostrar que $\displaystyle\int f$ é independente da sequência $\{\varphi_n\}$ usada, para que, dessa forma, a integral esteja bem definida.

Proposição 3.6. *Dadas $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sequências de funções simples, limitadas por M, suportadas em supp(f) e tais que $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to f$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n.$$

Demonstração. Defina $\eta_n = \varphi_n - \psi_n$. Assim, $\{\eta_n\}$ é uma sequência de funções simples, limitada por $2M$, suportada em um conjunto de medida finita e $\eta_n \to 0$. Daí, usando o item ii do Lema 3.4, se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int \eta_n \to 0$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n - \psi_n) = 0$. Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n.$$

□

Seja $E \subseteq \mathbb{R}^d$ com $m(E) < \infty$ e f limitada com $m(\text{supp}(f)) < \infty$, então é natural definir

$$\int_E f = \int_E f \cdot \chi_E.$$

Essa extensão da definição da integral satisfaz todas as propriedades das funções simples.

Proposição 3.7. *Suponha que f e g são funções limitadas suportadas em um conjunto de medida finita. Então*

(i) Linearidade. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

(ii) *Aditividade. Se E e F são subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^d$, então*

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

(iii) *Monotonicidade. Se $f \leq g$, então*

$$\int f \leq \int g.$$

(iv) *Desigualdade Triangular. Se $|f|$ é também limitado, suportado em um conjunto de medida finita, então*

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

Demonstração. Na demonstração de cada um dos itens, iremos considerar $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ sequências de funções simples limitadas pelo mesmo termo que limita f, g, respectivamente, suportadas em $\operatorname{supp}(f)$ e $\operatorname{supp}(g)$, e tais que $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to g$ quando $n \to \infty$.

(i) Pela definição da integral de f e g

$$\begin{aligned}\int (af + bg) &= \lim_{n\to\infty} \int (a\varphi_n + b\psi_n)\\ &= a \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + b \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\\ &= a\int f + b\int g.\end{aligned}$$

(ii) Desde que E e F são disjuntos $f \cdot \chi_{E\cup F} = f \cdot \chi_E + f \cdot \chi_F$.

$$\int_{E\cup F} f = \int f \cdot \chi_{E\cup F} = \int f \cdot \chi_E + \int f \cdot \chi_F = \int_E f + \int_F f.$$

(iii) Desde que $f \leq g$ então $\varphi_n \leq \psi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Usando a linearidade

$$\int f - g = \int f - \int g = \lim_n \int \varphi_n - \lim_n \int \psi_n \leq 0.$$

Daí, $\int f - \int g \leq 0$ então, $\int f \leq \int g$.

(iv) A função $|f|$ é mensurável e limitada. Com isso, $-|f| \leq f \leq |f|$ e pela linearidade e monotonicidade,

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|.$$

Portanto,

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

□

Teorema 3.8 (Convergência Limitada)**.** *Suponha que* $\{f_n\}$ *é uma sequência de funções mensuráveis, que são todas limitadas por* M*, e são suportadas no conjunto* E *de medida finita e* $f_n(x) \to f(x)$ *em quase todo* x *quando* $n \to \infty$*. Então* f *é mensurável, limitada, suportada em* E*, e*

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

Consequentemente

$$\int f_n \to \int f.$$

Demonstração. Que f será mensurável já mostramos pois f é o limite de funções mensuráveis, e f tem que ser limitada. Pois $f_n \to f$ e $|f_n(x)| \leq M \ \forall x$, então $\lim |f_n(x)| \leq M$ portanto $|f(x)| \leq M$. Outro ponto importante a se destacar é que se provarmos que $\int |f_n - f| \to 0$, com isso, $\left|\int f_n - \int f\right| \leq \int |f_n - f| \to 0$, o que implica $\int f_n \to \int f$. Logo, nos resta mostrar que $\int |f_n - f| \to 0$. O argumento é parecido com o do lema. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar, pelo Teorema de Egorov 2.48, um conjunto $A_\epsilon \subseteq E$ fechado tal que $m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em A_ϵ. Então, sabemos que para qualquer $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande, temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in A_\epsilon$. Com isso,

$$\int_E |f_n - f| \leq \int_{A_\epsilon} |f_n - f| + \int_{E - A_\epsilon} |f_n - f| \leq \epsilon \cdot m(A_\epsilon) + 2M \cdot m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon \cdot m(E) + 2M \cdot \epsilon$$

para todo n suficientemente grande. Uma vez que ϵ é arbitrário, a prova do teorema está completa.

□

A conclusão simplesmente diz:

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n.$$

quando f_n são funções limitadas.

Observação 3.9. Uma observação útil a se fazer é que, se $f \geq 0$, f é limitada e suportada em um conjunto de medida finita e $\int f = 0$, então $f = 0$ em quase todo lugar. De fato, para cada inteiro $k \geq 1$, defina $E_k = \{x \in E : f(x) \geq 1/k\}$. Então, como $k^{-1}\chi_{E_k}(x) \leq \int f(x)$, implica que

$$k^{-1} \cdot m(E_k) \leq \int f.$$

Pela monotonicidade da integral, uma vez que $m(E_k) = 0$, e desde que $\{x : f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, vemos que $f = 0$ em quase todo lugar.

3.1.1 Um retorno às funções integráveis à Riemann

Agora, iremos fazer um breve retorno as funções Riemann integráveis, mostraremos que as funções definidas em intervalos compactos que são integráveis à Riemann também são integráveis à Lebesgue.

Seja f uma função limitada de valores reais definida em $[a, b]$. Sendo P uma partição de $[a, b]$, definimos a soma inferior e a soma superior de f com respeito a P respectivamente por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

onde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\}$, e $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\}$.

Com isso, definimos a integral inferior de Riemann e a integral superior de Riemann de f em $[a, b]$ respectivamente por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) \mid P \text{ uma partição de } [a, b]\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) \mid P \text{ uma partição de } [a, b]\}.$$

Se a integral superior coincide com a integral inferior, então dizemos que f é Riemann integrável em $[a, b]$ e denotamos a integral por $\int_a^b f$.

Exemplo 3.10. Defina f em $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Seja P uma partição de $[0, 1]$. Pela densidade dos racionais e dos irracionais

$$L(f, P) = 0 \quad \text{e} \quad U(f, P) = 1.$$

Daí,

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f.$$

Logo, f não é Riemann integrável. Mas, f é limitada e a integral de Lebesgue de f é definida por

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f &= \int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f + \int_{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} f \\ &= 1\cdot m([0,1]\cap\mathbb{Q}) + 0\cdot m([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, f é integrável à Lebesgue, mas não é integrável à Riemann.

Definição 3.11. Uma função de valores reais ψ definida em $[a,b]$ é chamada de função escada desde que exista uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ e números $c_1, \dots, c_n$ tais que

$$\psi(x) = c_i \quad \text{se } x_{i-1} < x \leq x_i,$$

onde $1 \leq i \leq n$.

Note que toda função escada é uma função simples, e vale que

$$L(\psi, P) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = U(\psi, P).$$

Com isso, ψ é uma função Riemann integrável e sua integral é

$$\int_a^b \psi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Portanto, podemos reformular a definição da integral superior e inferior de Riemann como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \text{ é uma função escada e } \varphi \leq f \text{ em } [a,b]\right\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \text{ é uma função escada e } \psi \geq f \text{ em } [a,b]\right\}.$$

Teorema 3.12. *Seja f uma função definida em $[a,b]$. Se f é Riemann integrável em $[a,b]$, então f é mensurável e*

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f,$$

onde a integral da esquerda é a integral de Riemann e a integral da direita é a integral de Lebesgue.

Demonstração. Por definição, uma função integrável à Riemann é limitada. Suponha $|f(x)| \leq M$. Queremos mostrar que f é mensurável e estabelecer a igualdade das integrais. Uma vez que f é limitada, existem funções escadas φ_k e ψ_k tais que

$$|\varphi_k(x)| \leq M, \ |\psi(x)| \leq M \text{ e } \varphi_k(x) \leq f(x) \leq \psi_k(x), \quad \forall x \in [a,b], \ \forall k \in \mathbb{N},$$

Além disso,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k. \tag{3.2}$$

Primeiro, notemos, da definição, que para funções escada as integrais de Riemann e Lebesgue são iguais. Portanto,

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Seja $\tilde{\varphi}(x) := \lim_k \varphi_k(x)$ e $\tilde{\psi}(x) := \lim_k \psi_k(x)$. Temos $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$. Além disso, $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ são mensuráveis e, pelo Teorema da Convergência Limitada 3.8, temos

$$\lim_k \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}$$

e

$$\lim_k \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\psi}.$$

Logo,

$$\lim_k \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}) = 0.$$

Dado que $\psi_k - \varphi_k \geq 0$, temos $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} \geq 0$. Assim, pela Observação 3.9 $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} = 0$, daí $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = f$ em quase todo lugar. Isso prova que f é mensurável e, finalmente, desde que $\varphi_k \to f$, temos

$$\lim_k \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f$$

com isso,

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f.$$

Essa última implicação é fruto da junção das equações (3.2) e (3.3). □

Seguindo, iremos proceder integrando funções mensuráveis e não-negativas, mas que não são necessariamente limitadas. Será importante permitir que essas funções possam admitir valores estendidos, isto é, que uma função possa levar no valor $+\infty$. Por convenção, admitimos que o supremo de um conjunto ilimitado seja $+\infty$.

Definição 3.13. Sendo f uma função mensurável não-negativa, definimos a integral de Lebesgue (estendida) por

$$\int f := \sup_g \int g,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções mensuráveis g, tais que $0 \leq g \leq f$ e onde g é limitada e suportada em um conjunto de medida finita.

No caso de tal função f, com essa definição, temos apenas duas possibilidades: o supremo $\int f$ é finito ou infinito. No primeiro caso, isto é, $\int f < \infty$, dizemos que f é integrável à Lebesgue ou simplesmente integrável.

Proposição 3.14. *A integral de funções não-negativas e mensuráveis segue as propriedades:*

(i) Linearidade. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \geq 0$, então

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

(ii) Aditividade. Se E e F são subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^d$ e $f \geq 0$, então

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

(iii) Monotonicidade. Se $0 \leq f \leq g$, então

$$\int f \leq \int g.$$

(iv) Se g é integrável e $0 \leq f \leq g$, então f é integrável.

(v) Se f é integrável, então $f(x) < \infty$ para quase todo x.

(vi) Se $\int f = 0$, então $f = 0$ em quase todo x.

Demonstração. (i) Para $0 < \alpha$, $0 \leq h \leq f$ se e somente se $0 \leq \alpha h \leq \alpha f$. Portanto, pela linearidade da integral de funções limitadas e suportada em um conjunto de medida finita $\int \alpha f = \alpha \int f$.Com isso, precisamos apenas considerar o caso em que $\alpha = \beta = 1$. Dessa maneira, note que se $\varphi \leq f$ e $\psi \leq g$ onde φ e ψ são limitadas e suportadas em conjuntos de medida finita, então $\varphi + \psi \leq f + g$ e $\varphi + \psi$ é também limitada e suportada em um conjunto de medida finita, então pela linearidade de funções limitadas e suportadas em um conjunto de medida finita

$$\int \varphi + \int \psi = \int \varphi + \psi \leq \int f + g.$$

Além disso, uma vez que $\int \varphi + \int \psi \leq \int f + \int g$, o menor limite superior para $\int \varphi + \int \psi$ é $\int f + \int g$, pois é a menor das cotas superiores, assim concluimos que $\int f + \int g \leq \int f + g$. Logo, resta provar a desigualdade reversa. Seja η limitada e suportada em um conjunto de medida finita e $\eta \leq f + g$. Definindo $\eta_1(x) = \min(f(x), \eta(x))$ e $\eta_2(x) = \eta - \eta_1$, temos que $\eta_1 \leq f$ e $\eta_2 \leq g$. Assim, $\int \eta = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leq \int f + \int g$. Tomando o supremo sobre η, concluimos que $\int f + g \leq \int f + \int g$.

(ii) Note que $\int_{E \cup F} f = \int f\chi_{E\cup F} = \int f\chi_E + \int f\chi_F = \int_E f + \int_F f$.

(iii) Observe que $\int f = \sup_{\psi} \int \psi$ onde $0 \leq \psi \leq f$ e $\int g = \sup_{\varphi} \int \varphi$ onde $0 \leq \varphi \leq g$. Assim, $\int \varphi - \psi \geq 0$ então o supremo também será não-negativo, isto é,

$$0 \leq \sup_{\varphi:\, 0\leq\varphi\leq g\ ;\ \psi:\, 0\leq\psi\leq f} \int \varphi - \psi = \int g - f.$$

Com isso, usando a linearidade $\int g - \int f \geq 0$.

(iv) Desde que g seja integrável então o $\sup_{\varphi} \int \varphi$ é finito, onde $0 \leq \varphi \leq g$ e φ é uma função limitada e suportada em um conjunto de medida finita. Por outro lado, sendo ψ uma função limitada e suportada em um conjunto de medida finita tal que $0 \leq \psi \leq f$, note que o $\sup_{\psi} \int \psi$ é limitado por $\sup_{\varphi} \int \varphi$, uma vez que $0 \leq f \leq g$. Portanto, $\sup_{\psi} \int \psi < \infty$, pois $\sup_{\varphi} \int \varphi$ é finito.

(v) Suponha que $E_k = \{x : f(x) \geq k\}$ e $E_\infty = \{x : f(x) = \infty\}$. Então,

$$\int f \geq \int \chi_{E_k} f \geq km(E_k) \geq 0$$

com isso

$$\frac{\int f}{k} \geq m(E_k) \geq 0.$$

Assim, quando $k \to \infty$, temos $m(E_k) \to 0$. Além disso, $E_k \supset E_{k+1}$ pois se $f(x) \geq k+1$, então $f(x) \geq k$ e note que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_\infty$, portanto $E_k \searrow E_\infty$ e usando o item ii do Corolário 2.22.1 segue que $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(E_\infty)$ assim, $m(E_\infty) = 0$.

(vi) Fizemos isso na Observação 3.9.

$\square$

Lema 3.15 (Fatou)**.** *Suponha que* $\{f_n\}$ *seja uma sequência de funções mensuráveis com* $f_n \geq 0$*. Se* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *em quase todo ponto, então*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Suponha $0 \leq g \leq f$ onde g é uma função limitada e suportada em um conjunto E de medida finita. Se tivermos o conjunto $g_n(x) = \min(g(x), f_n(x))$, então g_n é mensurável, suportada em E e $g_n(x) \to g(x)$ em quase todo ponto e pelo teorema da convergência limitada temos $\int g_n \to \int g$, por construção $g_n(x) \leq f_n(x)$ então $\int g_n \leq \int f_n$ e tomando o limite inferior

$$\liminf_n \int g_n = \int g \leq \liminf_n \int f_n.$$

Tomando o supremo por todas as funções g tais que $0 \leq g \leq f$ obtemos

$$\sup_g \int g \leq \sup_g \liminf_n \int f_n = \liminf_n \int f_n.$$

Com isso, $\int f \leq \liminf_n \int f_n$. $\square$

Corolário 3.15.1. *Suponha que* f *seja uma função não-negativa, mensurável e* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções não-negativas, mensuráveis com* $f_n \leq f$ *e* $f_n(x) \to f(x)$ *em quase todo ponto. Então,*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Pelo lema de Fatou, sabemos que $\int f \leq \liminf_n \int f_n$, daí nos resta mostrar que $\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$, pois assim teríamos que $\liminf_n \int f_n \geq \limsup_n \int f_n$, mas já temos a desigualdade reversa, portanto concluiremos que $\liminf_n \int f_n = \limsup_n \int f_n = \int f$. Uma vez que $f_n \leq f$, então $\int f_n \leq \int f$, assim

$$\limsup_n \int f_n \leq \limsup_n \int f = \int f.$$

$\square$

Corolário 3.15.2 (Convergência monótona)**.** *Suponha que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções não-negativas, mensuráveis com $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ em quase todo ponto para todo n, e $f_n(x) \to f(x)$ pontualmente em quase todo lugar e $x \in E$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Demonstração. Desde que $\{f_n\}$ seja uma sequência não-decrecente e $f_n \to f$, segue que $f_n \leq f$ usando o corolário anterior, concluímos o desejado. $\square$

Corolário 3.15.3. *Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, onde $a_k(x) \geq 0$ e mensurável para todo $k \geq 1$. Então,*

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx.$$

Demonstração. Seja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ e $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, note que $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x)$. Logo, usando o Corolário anterior 3.15.2, $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim\limits_{n} f_n$. Além disso, desde que $\int f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int a_k(x)$. Portanto,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx.$$

$\square$

Teorema 3.16 (Desigualdade de Tchebychev)**.** *Suponha que $f \geq 0$ e que f seja integrável. Se $\alpha > 0$ e $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$, então*

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Demonstração. Defina a função $h = \alpha \cdot \chi_{E_\alpha}$. Definida desta forma, temos $h \leq f$, então $\int h \leq \int f$. Dessa forma, $\alpha \cdot m(E_\alpha) \leq \int f$ com isso, $m(E_\alpha) \leq \dfrac{1}{\alpha} \int f$. $\square$

Agora, chegamos no último estágio: iremos supor f qualquer função mensurável de valor real em $\mathbb{R}^d$. Na observação 2.45 percebemos que podemos decompor uma função f em duas partes f^+ e f^- com essas duas partes não-negativas. Note que, por $f^\pm \leq |f|$ então $f^\pm$ são integráveis sempre que f o for (pois a função é limitada por uma integrável conforme foi visto no item iv da Proposição 3.14).

Definição 3.17. Dizemos que f é integrável a Lebesgue se a função mensurável não-negativa for mensurável no sentido do estágio anterior. Com isso, definimos a integral de Lebesgue de f por

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Na prática, encontramos várias decomposições $f = f_1 - f_2$, onde f_1, f_2 são funções não-negativas e integráveis.

Dessa forma, esperamos que a integral não dependa da decomposição da função e de fato não depende. Com efeito, se $f = g_1 + g_2$ outra decomposição de f, com g_1, g_2 não-negativas e integráveis, então $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, por isso, $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, o que implica $\int f_1 + g_2 = \int g_1 + f_2$. Desde que f_1, f_2, g_1, g_2 são não-negativos, vale a linearidade $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$, logo, $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$. Portanto, a integral não depende da decomposição da função.

Algumas observações são úteis a se fazer: o valor da integral de f não muda se modificarmos f em um conjunto de medida nula. Além disso, se f for integrável então pelo item v da Proposição 3.14 então ela é quase finita, assim podemos sempre somar duas funções integráveis.

Proposição 3.18. *A integral de Lebesgue de funções integráveis é linear, aditiva, monótona e satisfaz a desigualdade triangular.*

Proposição 3.19. *Suponha f integrável em $\mathbb{R}^d$. Então, para todo $\epsilon > 0$:*

(i) Existe um conjunto B de medida finita (uma bola, por exemplo) tal que

$$\int_B |f| < \epsilon.$$

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad m(E) < \delta.$$

Demonstração. (i) Substituindo f por $|f|$, podemos assumir sem perda de generalidade que $f \geq 0$. Seja B_N a bola centrada na origem de raio N e note que, definindo $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$, então $f_N \geq 0$ é mensurável, $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$ e

$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$. Assim, pelo teorema da convergência monótona, temos

$$\lim_{N\to\infty}\int f_N = \int f.$$

Em particular, para N grande temos $0 \leq \int f_N - \int f\chi_{B_N} < \epsilon$ desde que $1-\chi_{B_N} = \chi_{B_N^c}$ com isso, $f(x)(1-\chi_{B_N}) = f(x)\chi_{B_N^c}$ então, $\int f_N - \int f\chi_{B_N} < \epsilon$ daí,

$$\int f\chi_{B_N^c} < \epsilon.$$

(ii) Assumindo novamente que $f \geq 0$ e definindo

$$f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}, \text{ onde } E_N = \{x : f(x) \leq N\},$$

de novo note que $(f_N(x)) \leq f_{N+1}(x)$, $f_N \geq 0$ é mensurável e pelo corolário 3.15.2 (Convergência Monótona) dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $\int_E f - f_N < \frac{\epsilon}{2}$. Agora escolhemos $\delta > 0$ tal que $N\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Se $m(E) < \delta$ então

$$\int_E f = \int_E (f-f_N) + \int_E f_N \leq \int (f-f_N) + \int_E f_N \leq \int (f-f_N) + Nm(E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{e\delta}\delta = \epsilon.$$

□

Intuitivamente, as funções integráveis deveriam "desaparecer" no infinito desde que suas integrais sejam finitas e o item i da proposição 3.19 atribui um significado preciso para essa intuição. Agora, iremos provar um teorema que é um pilar da teoria da integração de Lebesgue e ele pode ser visto como uma culminação dos nossos esforços até agora.

Teorema 3.20 (Convergência dominada)**.** *Suponha que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n(x) \to f(x)$ em quase todo ponto quando $n \to \infty$. Se $|f_n(x)| \leq g(x)$ onde $g(x)$ é integrável, então*

$$\int |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty,$$

e consequentemente

$$\int f_n \to \int f \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Demonstração. Para cada $N > 0$ seja $E_N = \{x : |x| \leq N, g(x) \leq N\}$. Dado $\epsilon > 0$, pela primeira parte da proposição anterior, existe N tal que $\int_{E_N^c} g < \epsilon$. Então, a função

$f_n(x)\chi_{E_N}$ são limitadas (por N, pois não limitadas por g e g em E_N é limitada por N) e suportadas em um conjunto de medida finita, então pelo teorema da convergência limitada, temos

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \epsilon \quad \text{para todo } N \text{ suficientemente grande.}$$

Assim,

$$\int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| < \epsilon + 2\int_{E_N^c} g = \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

uma vez que ϵ é arbitrário, o teorema está provado.

□

3.2 O espaço L^1

Com base nas propriedades das funções integráveis enunciadas na seção anterior, podemos concluir que o espaço das funções integráveis constitui um espaço vetorial. Nesta seção iremos mostrar que tal espaço é completo em uma norma apropriada.

Definição 3.21. Para qualquer função integrável f em $\mathbb{R}^d$, define-se a norma de f por

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx.$$

Observação 3.22. Observe que $\|f\|_1 = 0$ se, e somente se, $f = 0$ quase em todo lugar. Essa característica simples da norma reflete a prática, que já adotamos, de não distinguir duas funções que são iguais quase em todo lugar. Com isso em mente, definimos L^1.

Definição 3.23. O espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ é o espaço das classes de equivalência de funções integráveis, onde definimos que duas funções são equivalentes se elas são iguais em quase todo ponto.

Frequentemente, é conveniente manter a terminologia de que um elemento $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ é uma função integrável, mesmo que seja apenas uma classe de equivalência de tais funções.

Além disso, note que a norma $\|f\|_1$ de um elemento $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ é bem definida pela escolha de qualquer função numa classe de equivalência. Com efeito, se $f, g \in L^1$ são tais que g é equivalente a f então $|f(x)| = |g(x)|$, daí $\displaystyle\int |f| = \int |g|$ portanto, $\|f\| = \|g\|$.

Proposição 3.24. *Suponha f e g duas funções em $L^1(\mathbb{R}^d)$, então*

(i) $\|\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |\alpha|\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\|f+g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$;

(iii) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ *se e somente se* $f = 0$ *quase em todo lugar;*

(iv) $d(f,g) := \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *define uma métrica em* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. (i) Note que $\|\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int |\alpha f| = |\alpha| \int |f| = |\alpha|\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

(ii) Usando a monotinicidade da integral obtemos

$$\|f+g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int |f+g| \leq \int |f| + |g| = \int |f| + \int |g| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

(iii) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ equivale a $\displaystyle\int |f| = 0$, daí, $f = 0$, pelo item vi da Proposição 3.14.

(iv) $d(f,g) := \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ de fato é uma métrica. Com efeito, se $d(f,g) = 0$, então $\|f-g\| = 0$ e pelo item 3 segue que $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto x. Além disso, vale a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(f,g) = \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int |f-g| &= \int |f-h+h-g| \\ &\leq \int |f-h| + |h-g| = d(f,g) + d(h,g) \end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Definição 3.25. Um espaço métrico V com a métrica d é dito completo se toda sequência de Cauchy $\{x_k\}$ em V (ou seja, $d(x_k, x_l) \to 0$ quando $k, l \to \infty$) converge em V, ou seja, existe $x \in V$ tal que $\lim_{k\to\infty} v_k = v$, no sentido de que $d(v_k, v) \to 0$ quando $k \to \infty$.

Teorema 3.26 (Riesz-Fischer). *O espaço vetorial L^1 é completo.*

Demonstração. Suponha que $\{f_n\}$ seja uma sequência de Cauchy na norma, tal que $\|f_n - f_m\| \to 0$ quando $n, m \to \infty$. Agora, considere uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ satisfazendo a propriedade:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

A existência dessa subsequência é garantida pelo fato de que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ sempre que $n, m \geq N(\epsilon)$, de modo que basta tomar $n_k = N(2^{-k})$. Agora, considere a série cuja convergência está descrita abaixo:

$$f(x) = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

e

$$g(x) = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Note que

$$\int |f_{n_1}| + \int \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k+1} - f_{n_k}| = \int |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_k+1} - f_{n_k}| \leq \int |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Dessa forma, g é integrável. Desde que, $f \leq |f| \leq g$ então f também é integrável. Além disso, note que a série que define f converge em quase todo lugar e as somas parciais dessa série é precisamente f_{n_k} (por construção da série telescópica). Dessa forma encontramos que

$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$

em quase todo ponto x. Precisamos provar que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ em quase todo lugar em L^1. Para isso, note que $|f - f_{n_k}| \leq g$ para todo k. Aplicando o teorema da convergência dominada temos

$$\|f_{n_k} - f\| = \int |f_{n_k} - f| \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Finalmente, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $n, m > N$ temos $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Se n_k é escolhido de modo que $n_k > N$ e $\|f_{n_k} - f\| < \frac{\epsilon}{2}$ então a desigualdade triangular implica

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \epsilon \quad \text{sempre que } \ n > N.$$

Portanto, $\{f_n\}$ tem o limite f em L^1. □

O argumento usado na demonstração acima produz o seguinte:

Corolário 3.26.1. *Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para L^1, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$

em quase todo ponto x.

Demonstração. Seja $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que n_k é escolhido de modo que $m(A) < 2^{-k}$, onde $A = \{k \in \mathbb{N} : |f_n - f| > 2^{-k}\ \forall n \geq n_k\}$. Uma vez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} m(|f_{n_k} - f| > 2^{-k}) < \infty$ pois n_k foi escolhido de modo que a diferença fosse menor que 2^{-k} e $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$. Assim, segue que o conjunto dos pontos x tais que $|f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}$ tem medida zero. Logo, $f_{n_k}(x) - f(x) \to 0$ em quase todo ponto x. □

Definição 3.27. Dizemos que uma família G de funções integráveis é densa em L^1 se para qualquer $f \in L^1$ e $\epsilon > 0$ existe $g \in G$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$.

Teorema 3.28. *As seguintes família de funções são densas em L^1*

(i) As funções simples;

(ii) As funções escada;

(iii) As funções contínuas de suporte compacto.

Demonstração. (i) Uma vez que podemos escrever uma função como diferença de funções não negativas, é suficiente provar o teorema quando $f \geq 0$. Para o item (i) pelo Teorema de Aproximação por Função Simples 2.46, existe uma sequência $\{\varphi_n\}$ de funções simples que converge pontualmente para f e $\varphi_n \leq f$ para todo n, então usando o Teorema da Convergência Dominada 3.20, segue que

$$\int |\varphi_n - f| \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Portanto, as funções simples são densas em L^1.

(ii) É suficiente aproximar funções simples por funções escada pois sendo ψ uma função escada, escrevendo $|\psi - f| \leq |\varphi - \psi| + |f - \varphi|$, desde que $|f - \varphi| < \epsilon$, basta mostrarmos que $|\varphi - \psi| < \epsilon$. Uma vez que uma função simples é uma combinação linear de funções características de conjuntos de medida finita, então é suficiente mostrar que se E é um conjunto de medida finita, há uma função escada ψ tal que $\|\chi_E - \psi\|_{L^1}$ é pequeno. Usando o primeiro princípio de Littlewood, há uma família disjunta de retângulos $\{R_j\}$ com $m(E \triangle \displaystyle\bigcup_{j=1}^{M} R_j) \leq \epsilon$. Por isso, χ_E e $\psi = \sum \chi_{R_j}$ diferem no máximo em um conjunto de medida ϵ, assim

$$\int |\chi_E(x) - \psi(x)| < \epsilon.$$

(iii) Note que toda função pode ser aproximada por funções simples, assim iremos nos aproximar de funções simples por funções contínuas com suporte compacto. Usando o item (ii), sendo f uma função simples, podemos reduzir ao caso em que f é a função característica de um retângulo. No caso de uma dimensão, onde f é a função característica do intervalo $[a,b]$, podemos escolher uma função contínua g, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x \leq a - \dfrac{\epsilon}{2} \text{ ou } x \geq b + \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall \epsilon > 0. \end{cases}$$

Assim, $\int |f-g| \leq 1 \cdot \epsilon = \epsilon$. Podemos generalizar isso para d dimensões, considerando que a função característica de um retângulo é o produto das funções caraccterísticas dos intervalos, ou seja, sendo R um retângulo em d dimensões da forma $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ temos a função característica de R

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i \leq x \leq b_i \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$\chi_R(x) = \chi_{[a_1,b_1]}(x_1) \cdot \chi_{[a_2,b_2]}(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi_{[a_d,b_d]}(x_d).$$

Dessa forma, podemos definir a função

$$g_i(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i \leq x_i \leq b_i \\ 0 \text{ se } x \leq a_i - \dfrac{\epsilon}{2d} \text{ ou } x \geq b + \dfrac{\epsilon}{2d}. \end{cases}$$

e, finalmente, definimos a função g por

$$g(x) = g_1(x_1) \cdots g_d(x_d)$$

Assim, $\displaystyle\int |f-g| \leq 1 \cdot \frac{\epsilon}{d} \cdot d = \epsilon$.

□

3.2.1 Propriedades de invariância

Definição 3.29. Se f é uma função definida em $\mathbb{R}^d$, a translação de f por um vetor $h \in \mathbb{R}$ é a função f_h, definida por $f_h(x) = f(x-h)$.

Proposição 3.30. *Se f é uma função integrável, então f_h também o é e*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Demonstração. A prova irá ser feita passo a passo, em cada caso iremos estender o resultado para uma classe maior de funções.

Caso 1: Quando $f = \chi_E$, sendo E um conjunto mensurável. Note que $f_h = \chi_{E_h}$, onde $E_h = \{x \in \mathbb{R}^d : x+h \in E\}$. De fato, se $x+h \in E_h$, então $f_h(x) = f(x) = 1$; se $x+h \notin E_h$, então $x \notin E$, logo $f_h(x) = f(x) = 0$. Além disso, sabemos que $m(E) = m(E_h)$ (pela Observação 2.24), assim as integrais também coincidem. Dessa forma, usando a linearidade, o resultado é válido para todas as funções simples. De fato, seja $f = \sum a_i \chi_{E_i}$, com $E_i = f^{-1}(a_i)$, então

$$f_h = \sum (a_i + h)\chi_{E_{hi}}, \quad \text{com} \quad E_{hi} = f_h^{-1}(a_i + h)$$

com isso,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \sum a_i \cdot m(E_{hi}) = \sum a_i \cdot m(E_i) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Caso 2: Quando a função é não-negativa e $\{\varphi_n\}$ é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para f, então $\{(\varphi_n)_h\}$ é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para f_h, assim, usando o Corolário da Convergência Monótona 3.15.2

$$\int f_n \to \int f \quad \text{e} \quad \int \varphi_{n_h} \to \int f_h.$$

Desde que $\int f_n = \int \varphi_{n_h}$ para todo n então pela unicidade do limite $\int f = \int f_h$.

Caso 3: Quando f é uma função integrável, sendo f integrável podemos escrevê-la como $f = f^+ - f^-$ pela Observação 2.45, assim $f_h = f_h^+ - f_h^-$. Como essas partes são não negativas, podemos concluir que

$$\int f^+ = \int f_h^+ \quad \text{e} \quad \int f^- = \int f_h^-.$$

Consequentemente, $\int f = \int f_h$.

□

Analogamente, usando a invariância relativa a dilatações e reflexões da medida de Lebesgue podemos provar a proposição seguinte.

Proposição 3.31. *Se f é integrável, então $f(\delta x), f > 0$, e $f(-x)$ também o são, e*

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,dx.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar a primeira igualdade, para isso dividiremos em casos.

Caso 1a: Se $f(x) = \chi_E(x)$, com E um conjunto mensurável. Note que $x \in E$ se, e somente se, $\delta x \in \delta E$. Portanto, $\delta x \in E$ se, e somente se, $x \in \delta^{-1}E$. Então,

$$f(\delta x) = \chi_E(\delta x) = \chi_{\delta^{-1}E}(x)$$

onde $\delta E = \{\delta x : x \in E\}$. Lembrando, pela Observação 2.24, que $m(\delta x) = \delta^{-d}m(E)$, então podemos escrever

$$\begin{aligned}\int f(\delta x)\,dx &= \int \chi_E(\delta x)\,dx \\ &= \int \chi_{\delta^{-1}E}(x)\,dx \\ &= m(\delta^{-1}E) \\ &= \delta^{-d}m(E) \\ &= \delta^{-d}\int \chi_E(x)\,dx \\ &= \delta^{-d}\int f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta^d \int f(\delta x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

E, usando a linearidade o resultado é válido para todas as funções simples.

Caso 2a: Quando as funções são não negativas e (φ_n) é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para f, então $(\varphi_n(\delta x))$ é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para $f(\delta x)$, assim, usando o Corolário da Convergência Monótona 3.15.2

$$\int \varphi_n(x) \to \int f(x) \quad \text{e} \quad \int \varphi_n(\delta x) \to \int f(\delta x).$$

Sabemos, pelo item anterior, que $\int \varphi_n(\delta x) = \delta^{-d}\int \varphi_n(x)$, para todo n. Assim, como $\displaystyle\int \varphi_n(x) \to \int f(x)$, então $\displaystyle\delta^{-d}\int \varphi_n(x) \to \delta^{-d}\int f(x)$. Assim, pela unicidade do limite devemos ter

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n(\delta x) = \lim_{n\to\infty}\delta^{-d}\int \varphi_n(x).$$

Daí,

$$\int \varphi(\delta x) = \delta^{-d}\int \varphi(x).$$

Caso 3a: Quando f é uma função integrável, podemos escrevê-la como

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{e} \quad f(\delta x) = f^+(\delta x) - f^-(\delta x).$$

Como essas partes são não-negativas, podemos concluir que

$$\int f^+(x) = \delta^{-d}\int f^+(x), \qquad \int f^-(\delta x) = \delta^{-d}\int f^-(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int f(x) &= \delta^d \int f^+(\delta x) - \delta^d \int f^-(\delta x)\\
&= \delta^d \left(\int f^+(\delta x) - \int f^-(\delta x)\right)\\
&= \delta^{-d}\int f(\delta x).
\end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, a demonstração é análoga.

Caso 1b: $f(x) = \chi_E(x)$, sendo E um conjunto mensurável. Temos $x \in E$ então $-x \in -E$. Note que

$$\int \chi_E(x)\,dx = m(E), \qquad \int \chi_{-E}(x)\,dx = m(-E).$$

Como $m(E) = m(-E)$ e $\chi_{-E}(x) = \chi_E(-x)$, então

$$\int \chi_E(x)\,dx = \int \chi_E(-x)\,dx.$$

Caso 2b: Quando as funções são não negativas e φ_n é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para f, então $\{\varphi_n(-x)\}$ é uma sequência de funções simples que cresce pontualmente para $f(-x)$, assim usando o Corolário 3.15.2

$$\int \varphi_n(x) \to \int f(-x) \quad \text{e} \quad \int \varphi_n(-x) \to \int f(-x).$$

Como

$$\int \varphi_n(x) = \int \varphi_n(-x),$$

então, pela unicidade do limite

$$\int f(x) = \int f(-x).$$

Caso 3b: Quando f é uma função integrável, podemos escrevê-la

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

assim

$$f(-x) = f^+(-x) - f^-(-x).$$

Como essas partes são não negativas, podemos concluir que

$$\int f^+(x) = \int f^+(-x) \quad \text{e} \quad \int f^-(x) = \int f^-(-x),$$

logo $\displaystyle\int f(x) = \int f(-x)$. $\square$

Proposição 3.32. *Suponha f, g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^d$, então se para cada $x \in \mathbb{R}^d$ fixo a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável, então a função $y \mapsto f(y)g(x-y)$ é também integrável e temos*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Demonstração. Sendo uma função h definida por $h(x) = f(x-y)g(y)$, para cada $x \in \mathbb{R}^d$, transladamos h e refletimos. Como segue $h(x-y) = f\big(x-(x-y)\big)g(x-y) = f(y)g(x-y)$, que é uma função integrável. Desse que a integral seja invariante por translação, então $\displaystyle\int h(y) = \int h(x-y)$ se, e somente se, $\displaystyle\int f(x-y)g(y)\,dy = \int f(y)g(x-y)\,dy$. $\square$

Definição 3.33. A integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ é denotada por $(f * g)(x)$ e é definida a convolução de f e g.

Note que, a proposição anterior afirma a comutatividade do produto usando a convolução. Usando as relações estabelecidas, podemos estabelecer, para qualquer $\epsilon > 0$

1. $$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \epsilon^{d-a}\int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^a}, \quad \text{sempre que } a > d,$$

2. $$\int_{|x|\leq\epsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \epsilon^{d-a}\int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{|x|^a}, \quad \text{sempre que } a < d.$$

De fato, note que se $|x| \geq \epsilon$ então $\dfrac{|x|}{\epsilon} \geq 1$, neste caso $\delta = \frac{1}{\epsilon}$. Assim,

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^a} = \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\epsilon^{-d}}{|x|^a\epsilon^{-a}}\,dx = \epsilon^{+a-d}\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{1}{|x|^a}\,dx.$$

Portanto,

$$\epsilon^{-a+d}\int_{|x|\geq 1}\frac{dx}{|x|^a}=\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{1}{|x|^a}\,dx$$

3.2.2 Translações e continuidade

Agora iremos examinar como as propriedades de continuidade de f estão relacionadas à forma como as translações f_h variam com h. Note que para qualquer $x\in\mathbb{R}^d$, a afirmação de que $f_h(x)\to f(x)$ quando $h\to 0$ é equivalente a continuidade de f no ponto x.

Proposição 3.34. *Suponha que $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, então*

$$\|f_h-f\|_1\to 0\quad \textit{quando } h\to 0.$$

Demonstração. A demonstração é uma consequência da aproximação de funções integráveis por funções contínuas e suporte compacto que fizemos em 3.28. De fato, dada $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ e qualquer $\epsilon>0$, podemos encontrar uma função g tal que $\|f-g\|<\epsilon$. Agora note que,

$$f_h-f=(f_h-g_h)+(g_h-g)-(f-g)$$

no entanto, $\|f_h-g_h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}<\epsilon$, pois

$$\int|f_h-g_h|=\int|f-g|<\epsilon,$$

dado que g seja contínua com suporte compacto temos

$$\|g_h-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=\int|g(x-h)-g(x)|\to 0,$$

quando $h\to 0$. Com efeito, sendo g contínua dado $\dfrac{\epsilon}{m(supp(g))}>0$ existe $\delta>0$ tal que $|g_h-g|<\dfrac{\epsilon}{m(supp(g))}$ sempre que $|h|<\delta$. Podemos supor, sem perca de generalidade, a integral no suporte da g. Com isso,

$$\|g_h-g\|=\int_{supp(g)}|g(x-h)-g(x)|<\frac{\epsilon}{m(supp(g))}\cdot m(supp(g))=\epsilon$$

sempre que h é suficientemente pequeno. □

3.3 O espaço L^2

Nesta seção, estudaremos o espaço L^2 de funções quadrado-integráveis, tal espaço constitui um espaço vetorial cuja diferença com o espaço L^1 será destacada a seguir. Um dos objetivos do estudo desta seção é nos fornecer ferramentas para provar o Teorema de Radon- Nikodyn 6.37.

Definição 3.35. A coleção das funções com quadrado integrável em $\mathbb{R}^d$ é denotada por $L^2(\mathbb{R}^d)$ e consiste em todas as funções que valor real que satisfaz $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty$, tal espaço é munido com a norma

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Uma diferença crucial de entre L^2 e L^1 é que L^2 é naturalmente equipado com o produto interno:

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx, \quad \text{sempre que } f,g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

Proposição 3.36. *Se $f,g \in L^2$ então $f(x)g(x)$ é integrável e vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$.*

Demonstração. Sabemos que $2|f(x)||g(x)| \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2$, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)||g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) dx.$$

Assim,

$$\int |f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}\left[\int |f(x)|^2 dx + \int |g(x)|^2 dx\right].$$

Portanto,

$$\int |fg| \leq \frac{1}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right]. \tag{3.5}$$

Para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, comecemos vendo que se $\|f\| = 0$ ou $\|g\| = 0$ então $(fg)(x) = 0$ em quase todo ponto e, portanto, $(f,g) = 0$. Assumindo que $\|f\| = \|g\| = 1$, pela desigualdade (3.5) obtemos $\int |fg| \leq 1$. Finalmente, no caso em que $\|f\|$ e $\|g\|$ são diferentes de zero, normalizamos f, g:

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|} \quad \text{e} \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|}.$$

Então, $\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = 1$ Assim, $|(\tilde{f},\tilde{g})| \leq 1$, multiplicando por $\|f\|\|g\|$,

$$\|f\|\|g\|\left|\left(\frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|}\right)\right| \leq \|f\|\|g\|.$$

Portanto, concluimos que $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$ $\square$

A norma em L^2 induz uma métrica, assim se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos a distância entre f e g por

$$d(f,g) = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema 3.37. *O espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$ é completo.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [13] p. 159–160. □

Definição 3.38. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial $\mathcal{H}$ munido de um produto interno tal que $\mathcal{H}$ é completo na norma induzida pelo produto interno.

Exemplo 3.39. O espaço L^2 é um espaço de Hilbert.

4

Diferenciação e integração

Do cálculo sabemos que a diferenciação e integração são operações inversas. Aqui queremos rever essa ideia básica no contexto da teoria que vem sendo estudada.

Nosso objetivo é a formulação e a prova do teorema fundamental do cálculo neste cenário. Tentaremos fazer isso respondendo duas questões, cada uma expressando a reciprocidade entre diferenciação e integração.

A primeira questão é a seguinte: suponha f integrável em $[a, b]$ e F uma integral indefinida, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(y)\, dy$. Isso implica que F é diferenciável (pelo menos em quase todo ponto) e que $F' = f$?. E a segunda é: Em quais condições uma função F em $[a, b]$ garante que $F'(x)$ existe (em quase todo ponto), que essa função é integrável e que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\, dx \text{ ?}$$

Comecemos avaliando a primeira questão.

4.1 Diferenciação da integral

Se f dado em $[a, b]$ e integrável nesse intervalo, chamemos

$$F(x) = \int_a^x f(y)\, dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Para lidar com $F'(x)$, relembremos a definição de derivada como o limite do quociente

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad \text{quando } h \to 0.$$

Notemos que esse quociente leva a forma (digamos no caso $h > 0$)

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\, dy = \frac{1}{|I|} \int_I f(y)\, dy$$

usando a notação $I = (x, x+h)$ e $|I|$ o tamanho do intervalo.

Note que a expressão acima representa o valor médio de f sobre I e que no limite em que $|I| \to 0$ podemos esperar que as médias tenda a $f(x)$. Ou seja, podemos nos perguntar se

$$\lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)\, dy = f(x)$$

é válido para quase todo x.

Em dimensões superiores podemos pensar numa questão semelhante. Inicialmente veremos esse problema onde os conjuntos envolvidos são as bolas B contendo x, com volume $m(B)$. Assim, reformulando o problema no contexto de $\mathbb{R}^d$:

Suponha que f seja integrável em $\mathbb{R}^d$. É verdade que

$$\lim_{m(B)\to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x) \quad \text{para quase todo } x?$$

O limite é tomado quando o volume das bolas abertas B contendo x tende a 0. Iremos nos referir a esse problema como problema da média.

Observação 4.1. Note que se f é contínua em x o limite de fato converge para $f(x)$.

De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Uma vez que

$$f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = \frac{1}{m(B)} \int_B (f(x) - f(y))\, dy.$$

Sempre que B for uma bola de raio menor que $\frac{\delta}{2}$ que contenha x, temos

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy \right| &= \left| \frac{1}{m(B)} \int_B \big(f(x) - f(y)\big)\, dy \right| \\
&\leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f(y)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{m(B)} \int_B \epsilon\, dy \\
&= \frac{1}{m(B)} \cdot \epsilon \cdot m(B) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Como desejado.

4.2 A função maximal de Hardy-Littlewood

O conceito de função máxima foi introduzido no contexto unidimensional por G. H. Hardy e J. E. Littlewood.

Figura 6 – Hardy e Littlewood

Fonte: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hardy/pictdisplay/`

A ideia foi formalizada no artigo de 1930, *"A Maximal Theorem with Function-Theoretic Applications"* [7] (Um Teorema Maximal com Aplicações da Teoria das Funções). Nele, os autores, na página 3, introduzem o problema com a seguinte analogia:

> "O problema é mais facilmente entendido quando expresso na linguagem do críquete, ou de qualquer outro jogo em que um jogador acumula uma série de pontuações, das quais uma média é registrada."

Com essa analogia, os autores introduzem a Função Maximal – uma função que, em cada ponto, registra o valor máximo que a média das pontuações (ou valores da função) pode atingir em qualquer intervalo.

A partir desta analogia, a definição relevante para o entendimento é a seguinte:

Definição 4.2. Se f é integrável em $\mathbb{R}^d$, definimos a função maximal f^* por

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

onde o supremo é tomado por todas as bolas que contêm x.

Lema 4.3. *Suponha $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ uma coleção finita de bolas em $\mathbb{R}^d$. Então, existe uma subcoleção $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ que satisfaz*

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [13] p. 102–103. □

Teorema 4.4. *Se f é integrável em $\mathbb{R}^d$ então*

(i) f^* é mensurável;

(ii) $f^*(x) < \infty$ em quase todo ponto x;

(iii) f^* satisfaz

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \le \frac{A}{\alpha}\|f\|,$$

para $\alpha > 0$, onde $A_d = 3^d$.

Demonstração. (i) O conjunto $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ é aberto, pois se $x \in E_\alpha$ então existe uma bola B tal que $x \in B$ e

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy > \alpha.$$

assim, para qualquer ponto $\bar{x}$ suficientemente próximo de x também vai pertencer a B.

(iii) Seja, $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$. Para cada $x \in E_\alpha$ existe uma bola B_x contendo x tal que

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha.$$

Assim, para cada bola temos

$$\frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|dy > m(B_x).$$

Fixe um compacto K de E_α. Uma vez que K é coberto por $\bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$ podemos selecionar uma subcobertura finita de K, digamos $K \subset \bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell$. Pelo lema anterior, existe uma subcoleção $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ de $\{B_1, \cdots, B_N\}$ de bolas disjuntas com

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Assim, desde que as bolas sejam disjuntas

$$\begin{aligned} m(K) \leq m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}) &\leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\cup^k B_{i_j}} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Em virtude de a desigualdade ser válida para todo compacto K de E_α, então vale para E_α, uma vez que podemos nos aproximar de E_α por compactos.

(ii) Note que $\{x : f^*(x) = \infty\} \subset \{x : f^*(x) > \alpha\}$, pelo item (iii) se tomarmos o limite quando $\alpha \to \infty$ temos $m(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$

□

Teorema 4.5 (Diferenciação de Lebesgue). *Se f é integrável em $\mathbb{R}^d$, então*

$$\lim_{\substack{\mathrm{m}(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{\mathrm{m}(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x) \quad \textit{em quase todo } x \tag{4.1}$$

Demonstração. É suficiente mostrarmos que

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{\substack{\mathrm{m}(B)\to 0 \\ x\in B}} \left| \frac{1}{\mathrm{m}(B)} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$$

tem medida zero, pois se isso acontecer, temos para quase todo x,

$$\left| \frac{1}{\mathrm{m}(B)} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| \leq 2\alpha \quad \text{quando } \mathrm{m}(B) \to 0.$$

E essa aproximação garante que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$ tem medida zero. Logo, o limite em (4.1) mantém em E^c. Com efeito, fixando ϵ, pela densidade das funções contínuas com suporte compacto, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma função contínua com suporte compacto tal que $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$. E pela continuidade da função g, temos

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B g(y)\, dy = g(x) \quad \forall x.$$

Note que

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy - f(x) = \frac{1}{m(B)} \int_B (f(y) - g(y))\, dy + \frac{1}{m(B)} \int_B \Big(g(y) - g(x)\Big)\, dy + g(x) - f(x).$$

Encontramos que,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,dy - b(x) \right| \\
&= \limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B (f(y)-g(y))\,dy + \frac{1}{m(B)} \int_B g(y)\,dy - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\
&\le \limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-g(y)|\,dy + \limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B g(y)\,dy - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\
&= (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $F_\alpha := \{x : (f(x)-g(x))^* > \alpha\}$ e $G_\alpha := \{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\}$. Então, $E_\alpha \subseteq (F_\alpha \cup G_\alpha)$, pois se u_1 e u_2 são positivos, então $u_1 + u_2 > 2\alpha$ se $u_1 > \alpha$ ou $u_2 > \alpha$. Por outro lado, da Desigualdade de Tchebyshev 3.16 nos dá

$$\mathrm{m}(G_\alpha) \le \frac{1}{\alpha} \int |f(x)-g(x)| = \frac{1}{\alpha} \|f(x)-g(x)\|_{L^1}$$

e, pelo item (iii) do Teorema 4.4

$$\mathrm{m}(F_\alpha) \le \frac{A}{\alpha} \|f-g\|_{L^1}.$$

Logo,

$$\mathrm{m}(E_\alpha) \le \frac{A}{\alpha} \cdot \epsilon + \frac{1}{\alpha} \cdot \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos que $\mathrm{m}(E_\alpha) = 0$ e a prova está completa.

$\square$

Até o momento, partimos do pressuposto de que f é integrável. O limite no teorema de Lebesgue é calculado em bolas que se contraem até o ponto x, fazendo com que o comportamento de f distante de x não tenha influência. Por isso, esperamos que o resultado seja válido mesmo que consideremos a integrabilidade de f apenas em cada bola.

Definição 4.6. Dizemos que uma função f em $\mathbb{R}^d$ é localmente integrável se para toda bola B a função $f(x) \cdot \chi_B(x)$ é integrável. Denotamos por $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ o espaço de todas as funções integráveis.

Assim, a suposição do último teorema se mantém sob uma suposição mais fraca.

Teorema 4.7. *Se $f \in L^1_{loc}$ então*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x)$$

para quase todo x.

A aplicação seguinte desse teorema fornece-nos uma visão sobre a natureza dos conjuntos mensuráveis.

Definição 4.8. Seja E um conjunto mensurável e $x \in \mathbb{R}^d$, dizemos que x é um ponto de densidade de Lebesgue de E se

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1.$$

Uma aplicação do teorema anterior aplicada a função característica de E produz:

Corolário 4.8.1. *Suponha E um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^d$. Então,*

(i) Quase todo $x \in E$ é um ponto de densidade de E;

(ii) Quase todo $x \notin E$ não é um ponto de densidade de E.

Demonstração. Aplicando o teorema com $f = \chi_E$, temos

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B \chi_E(y)\, dy = \chi_E(x) \quad \text{a.e. } x,$$

então

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} m(B\cap E) = \chi_E(x) \quad \text{a.e. } x.$$

(i) Se $x \in E$, então $\chi_E(x) = 1$

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1.$$

(ii) Se $x \notin E$, então $\chi_E(x) = 0$

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 0.$$

$\square$

Agora vamos analisar um conceito que, para funções integráveis, funciona como uma alternativa à continuidade pontual.

Definição 4.9. Seja f localmente integrável em $\mathbb{R}^d$. O conjunto de Lebesgue de f consiste de todos os pontos $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ tal que $f(\bar{x})$ é finito e

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy = 0.$$

Observe que, se f é contínua em $\bar{x}$, então $\bar{x}$ pertence ao conjunto de Lebesgue pela observação 4.1. Além disso, se $\bar{x}$ pertence ao conjunto de Lebesgue então

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(\bar{x}).$$

Corolário 4.9.1. *Se f é localmente integrável em $\mathbb{R}^d$, então quase todo ponto pertence ao conjunto de Lebesgue de f.*

Demonstração. Uma aplicação do teorema à função $|f(y) - r|$, mostra que para cada racional r, existe um conjunto E_r de medida zero tal que

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r|\, dy = |f(\bar{x}) - r| \quad \text{sempre que } x \notin E_r.$$

Assim, se $E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$. Suponha que $\bar{x} \notin E$ e $f(\bar{x})$ é finito. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe um racional r tal que

$$|f(\bar{x}) - r| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desde que

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r| + |f(\bar{x}) - r|\, dy.$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy \\
&\leq \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r|\, dy + \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ \bar{x}\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(\bar{x}) - r|\, dy \\
&< |f(\bar{x}) - r| + \frac{1}{m(B)} \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot m(B) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\bar{x}$ não está no conjunto de Lebesgue.

$\square$

Note que, a teoria da diferenciação desenvolvida até agora usa médias sobre bolas, podemos nos perguntar se resultados semelhantes são válidos para outras famílias de conjuntos. A seguir, iremos mostrar uma condição para a resposta afirmativa dessa pergunta.

Definição 4.10. Uma coleção de conjuntos $\{U_\alpha\}$ encolhe regularmente para $\bar{x}$ ou tem excentricidade limitada em $\bar{x}$ se existe uma constante $c > 0$ tal que para cada $\{U_\alpha\}$ existe uma bola B com $\bar{x} \in B$, $U_\alpha \subset B$ e $m(U_\alpha) \geq cm(B)$.

U_α está contido em B mas sua média é comparável com a medida de B. Por exemplo, o conjunto de todos os cubos abertos contendo $\bar{x}$ encolhe regularmente para $\bar{x}$. Entretanto, em dimensões maiores do que ou iguais a dois a coleção de todos os retângulos abertos contendo $\bar{x}$ não contrai regularmente para $\bar{x}$.

Corolário 4.10.1. *Suponha f localmente integrável em $\mathbb{R}^d$. Se $\{U_\alpha\}$ contrai regularmente para $\bar{x}$ então*

$$\lim_{\substack{U_\alpha \to 0 \\ \bar{x} \in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)\, dy = f(\bar{x}).$$

Demonstração. Para todo conjunto que pertence ao conjunto de Lebesgue, se $\bar{x} \in B$ com $U_\alpha \subset B$ e $m(U_\alpha) \geq c\,m(B)$ para algum $c > 0$, então

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(\bar{x})|\, dy \leq \frac{1}{c\,m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy.$$

Por $\bar{x}$ estar no conjunto de Lebesgue, para todo $\epsilon > 0$ tem-se, para $m(B)$ suficientemente pequena

$$\frac{1}{c\,m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy < \epsilon.$$

Logo,

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(\bar{x})|\, dy < \frac{1}{c\,m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|\, dy < \epsilon.$$

Como queríamos demonstrar. □

4.3 Diferenciabilidade de funções

Passemos agora para segunda questão. Queremos encontrar uma condição ampla para a função F que garanta a identidade

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Há alguns problemas para a formulação da identidade. Primeiro devido a existência de funções não diferenciáveis, o lado direito de (4.2) pode não ser significativo se assumirmos F contínua. Segundo que mesmo $F'(x)$ existindo para todo x, a função F' pode não ser integrável, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 4.11. Considere a função real F, definida por $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{se } x = 0 \end{cases}$

Afirmamos de $F'(x)$ existe para todo x, mas F' não é integrável em $[-1,1]$. Com efeito, a derivada de $F(x)$ quando $x \neq 0$ é:

$$F'(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} + 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Já quando $x = 0$:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Assim, note que $F'(x)$ não é limitado em $[-1,1]$, pois quando $x \to 0$ temos $F'(x) \to \infty$. Além disso, $\left|2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 2$ e é contínua, portanto integrável. Assim, é suficiente mostrar que $\dfrac{-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$ não é integrável. Defina

$$g(x) = \left|\frac{-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right|.$$

Note que para todo $y \in [2k\pi - \dfrac{\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}]$ temos $\cos y \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $k \geq 1$. Assim, para $k \geq 1$ defina

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{4}}}, \quad \underline{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{4}}}.$$

Se $x \in [\underline{x}(k), \bar{x}(k)]$, então

$$g(x) \geq \frac{2}{\underline{x}(k)} \cdot \cos\left(\underline{x}(k)\right) \geq \frac{2}{\underline{x}(k)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\underline{x}(k)}.$$

Então, para k arbitrário tomando $I_k := [\underline{x}(k), \bar{x}(k)]$, temos

$$g \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{\sqrt{2}}{\underline{x}(k)} \cdot \chi_{I_k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int g &\geq \sum_{k=1}^{K} \frac{\sqrt{2}}{\underline{x}(k)} \cdot \mathrm{m}(I_k) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\sqrt{2}}{\underline{x}(k)} \cdot (\bar{x}(k) - \underline{x}(k)) \\
&= \sum_{k=n}^{K} \sqrt{2} \left(1 - \frac{\underline{x}(k)}{\bar{x}(k)}\right) \\
&= \sum_{k=n}^{K} \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{4}}}\right).
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\sqrt{\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}}.$$

Daí, aplicando a desigualdade

$$\sqrt{1-a} \leq 1 - \frac{a}{2},$$

com $a = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$, temos

$$\sqrt{1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} \leq 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2(2k\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

Assim,

$$-\sqrt{\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} \geq -1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4k\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Logo,

$$1 - \sqrt{\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} \geq 1 - 1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4k\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{K} \sqrt{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2k\pi - \frac{\pi}{4}}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}}\right) \geq \sum_{k=1}^{K} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{4k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\sqrt{2}}{8k+1}.$$

Finalmente, temos $\displaystyle\int g \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{\sqrt{2}}{8k+1}$ e fazendo $K \to \infty$ a série diverge, concluindo, assim, que g não é integrável.

Para superar essas dificuldades encontradas estudaremos uma nova classe de funções: As Funções de Variação Limitada, que irá manipular melhor essa problemática.

4.4 Funções de variação limitada

Definição 4.12. Seja γ uma curva parametrizada no plano dada por $z(t) = (x(t), y(t))$, onde $a \leq t \leq b$, com $x(t), y(t)$ funções contínuas de valores reais em $[a, b]$. A curva γ é retificável se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ de $[a, b]$, temos

$$\sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| \leq M.$$

Por definição, o comprimento $L(\gamma)$ da curva é o supremo sobre todas as partições da soma do lado esquerdo, ou seja

$$L(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b} \sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})|.$$

Naturalmente, podemos nos perguntar: qual condição analítica em $x(t)$ e $y(t)$ garante a retificabilidade da curva γ? As derivadas de $x(t)$ e $y(t)$ devem existir? Em caso afirmativo, temos a fórmula

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,?$$

A resposta à primeira questão está diretamente ligada à classe de funções de variação limitada, uma classe que desempenha papel importante na teoria da diferenciação.

Definição 4.13. Dizemos que f é uma função de valor complexo em $\mathbb{R}^d$ se podemos escrever

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

onde u, v são funções de valores reais chamadas de parte real e parte imaginária, respectivamente.

Definição 4.14. Suponha $F(t)$ uma função de valor complexo definida em $[a, b]$ e $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ é uma partição do intervalo. A variação de F nessa partição é definida por

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

A função F é dita de variação limitada se as variações de F sobre todas as partições são limitadas, isto é, existe $M < \infty$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq M,$$

para toda partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$.

Nesta definição não assumimos que F seja contínua, entretanto ao aplicar ao caso de curvas suporemos que $F(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ é contínua.

Observamos que se uma partição $\tilde{P}$ de $[a, b]$ é um refinamento da partição P, então a variação de F em $\tilde{P}$ é maior do que ou igual à variação de F em P.

Teorema 4.15. *Uma curva parametrizada por $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, é retificável se e somente se $x(t)$ e $y(t)$ são de variação limitada.*

Demonstração. Se $F(t) = x(t)+iy(t)$, então $F(t_j)-F(t_{j-1}) = (x(t_j)-x(t_{j-1}))+i(y(t_j)-y(t_{j-1}))$. Daí,

$$\sum |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq \sum |x(t_j) - x(t_{j-1})| + \sum |y(t_j) - y(t_{j-1})| \leq 2\sum |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

Assim, F é retificável se, e somente se, $x(t)$ e $y(t)$ o são. □

Iremos fixar a terminologia.

Definição 4.16. Uma função de valor real F definida em $[a, b]$ é crescente se $F(t_1) \leq F(t_2)$ sempre que $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Se a desigualdade é estrita dizemos que F é estritamente crescente.

Exemplo 4.17. Se F é de valor real, monótona e limitada, então F é de variação limitada. De fato, se F é crescente e limitada por M, vejamos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{N} F(t_j) - F(t_{j-1}) \\ &= F(t_N) - F(t_0) = F(b) - F(a) < 2M,\end{aligned}$$

para qualquer partição $\{a = t_1, \cdots t_N = b\}$.

Exemplo 4.18. Se F é diferenciável em todo ponto e F' limitada então F é de variação limitada. De fato, se $|F'| \leq M$, o teorema do valor médio implica

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Também,

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{N} M|t_j - t_{j-1}| = M\sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1}) = M(b - a).$$

Definição 4.19. A Variação Total de F em $[a, x]$ onde $a \leq x \leq b$ é definida por

$$T_F(a, x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

onde o sup é em todas as partições de $[a, x]$.

A definição anterior faz sentido se F é de valor complexo. As definições a seguir irão requerer que F seja de valor real.

Definição 4.20. A variação positiva de F em $[a, x]$ é

$$P_F(a, x) = \sup \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}),$$

onde a soma é sobre todos j tais que $F(t_j) \geq F(t_{j-1})$ e o supremo é sobre todas as partições de $[a, x]$. E, a variação negativa de F em $[a, b]$ é definido por

$$N_F(a, b) = \sup \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})]$$

onde a soma é sobre todos j tais que $F(t_j) \leq F(t_{j-1})$ e o supremo é sobre todas as partições de $[a, x]$.

Lema 4.21. *Suponha F é de valor real e de variação limitada em $[a, b]$. Então para todo $x \in [a, b]$ temos*

$$F(x) - F(a) = P_F(a, x) - N_F(a, x)$$

e

$$T_F(a, x) = P_F(a, x) + N_F(a, x).$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P da forma $a = p_0 < \cdots < p_m = x$ de $[a, x]$ tal que

$$\left| P_F - \sum_{(+)} (F(p_j) - F(p_{j-1})) \right| < \epsilon.$$

Analogamente, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição Q da forma $a = q_0 < \cdots < q_m = x$ de $[a, x]$ tal que

$$\left| N_F - \sum_{(-)} (F(q_j) - F(q_{j-1})) \right| < \epsilon.$$

Daí, se tomarmos a partição $P \cup Q$, da forma $a = t_0 < \cdots < t_N = x$, que é um refinamento de P e Q. Uma vez que quando refinamos a partição a variação positiva e a variação negativa aumenta ou permanece igual podemos concluir que dado $\epsilon > 0$ temos,

$$\left| P_F - \sum_{(+)} (F(t_j) - F(t_{j-1})) \right| < \epsilon$$

e

$$\left| N_F - \sum_{(-)} (F(t_j) - F(t_{j-1})) \right| < \epsilon.$$

Agora note que

$$F(x) - F(a) = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) - \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})].$$

Temos que

$$|F(x) - F(a) - [P_F - N_F]| < 2\epsilon,$$

o que prova a primeira identidade. Para a segunda identidade, note que para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$ de $[a, x]$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| &= \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \\ &\leq \sup_{(+)} \sum F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sup_{(-)} \sum -[F(t_j) - F(t_{j-1})]. \end{aligned}$$

Daí, $T_F \leq P_F + N_F$. Além disso,

$$\sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) \leq \sum_{(+)} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

e

$$\sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \leq \sum_{(-)} |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \leq T_F.$$

Logo, $P_F + N_F \leq T_F$. Portanto, vale a segunda igualdade. Assim, segue o resultado. □

Teorema 4.22. *Uma função de valor real F em $[a, b]$ é de variação limitada se, e somente se, F é a diferença de duas funções crescentes limitadas.*

Demonstração. Claramente, se $F = F_1 - F_2$ onde F_1, F_2 são limitadas e crescentes, então F é de variação limitada. Por outro lado, se F é de variação limitada, então, seja $F_1(x) = P_F(a,x)+F(a)$ e $F_2(x) = N_F(a,x)$. Note que F_1 e F_2 são crescentes e de variação limitada e pelo Lema $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. □

Retornando à curva γ parametrizada por uma função contínua $z(t) = x(t) + iy(t)$, iremos fazer alguns comentários sobre sua função comprimento associada.

Definição 4.23. Assumindo que a curva é retificável, definimos $L[A, B]$ como o comprimento do segmento de γ que surge como imagem de t, para que $A \leq t \leq B$ com $a \leq A \leq B \leq b$.

Note que $L(A, B) = T_F(A, B)$ onde $F(t) = z(t)$. Note também que $L(A, C) + L(C, B) = L(A, B)$.

Além disso, observamos que $L(A, B)$ é uma função contínua de B (e também de A). Com efeito, como a função é crescente, para provar sua continuidade em B pela esquerda, basta ver que para cada B e $\epsilon > 0$ podemos encontrar $B_1 < B$ tal que

$$L(A, B_1) > L(A, B) - \epsilon.$$

Fazemos isso primeiro encontrando uma partição $A = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = B$ tal que o comprimento da linha poligonal correspondente é maior do que $L(A, B) - \epsilon/2$. Pela continuidade de $z(t)$, podemos encontrar um B_1, com $t_{N-1} < B_1 < B$, tal que

$$|z(B) - z(B_1)| < \epsilon/2.$$

Agora, para a partição refinada $t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < B_1 < B$, o comprimento correspondente ainda é maior do que $L(A, B) - \epsilon/2$, pois quando refina não diminui. Portanto, o comprimento para a partição $t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < B_1$ é maior do que $L(A, B) - \epsilon$. Daí, $L[A, B_1] \geq L[A, B] - \epsilon$.

Para provar a continuidade do lado direito de B, seja $\epsilon > 0$. Escolha uma partição $B = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = C$ tal que

$$L(B, C) - \epsilon/2 < \sum_{j=0}^{N-1} |z(t_{j+1}) - z(t_j)|.$$

Considerando um refinamento dessa partição, se necessário, podemos assumir, já que z é contínua, que

$$|z(t_1) - z(t_0)| < \epsilon/2.$$

Se denotarmos $B_1 = z(t_1)$, então obtemos

$$L(B, C) - \epsilon/2 < \epsilon/2 + L(B_1, C).$$

Como $L(B, B_1) + L(B_1, C) = L(B, C)$, temos $L(B, B_1) < \epsilon$ e portanto $L(A, B_1) - L(A, B) < \epsilon$.

Observou-se que uma função contínua e de variação limitada é, então, uma função de variação total.

A seguir iremos enunciar e definir objetos que irão nos ajudar a provar o Teorema 4.28, que é um resultado importante na teoria da diferenciação e integração.

Lema 4.24 (F. Riesz)**.** *Suponha que G é de valor real e contínua em $\mathbb{R}$. Seja E o conjunto dos pontos x tais que*

$$G(x + h) > G(x) \quad \textit{para algum } h = h_x > 0.$$

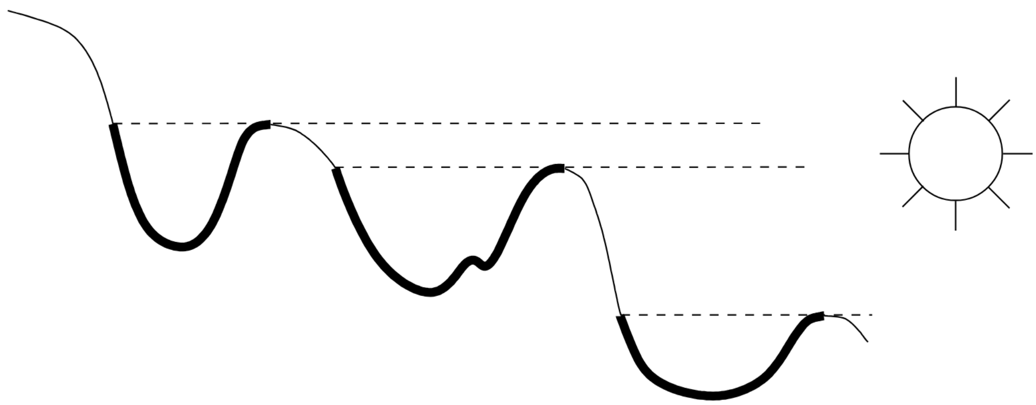
Se E não é vazio, então deve ser aberto, e, portanto, pode ser escrito como uma união enumerável disjunta de intervalos abertos $E = \bigcup (a_k, b_k)$. Se (a_k, b_k) é um intervalo finito nesta união, então

$$G(b_k) - G(a_k) = 0.$$

Demonstração. A prova para este Lema pode ser localizada em [13] p. 121–122. □

Observação 4.25. Essse resultado é conhecido como "Lema do sol nascente" devido a seguinte interpretação geométrica: se imaginarmos o sol surgindo no horizonte à direita e seus raios de luz paralelos ao eixo x, os pontos $(x, G(x))$ do gráfico pertencentes ao conjunto E corresponde as regiões sombreadas da figura.

Figura 7 – Lema do sol nascente



Fonte: STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009. p. 122.

Uma pequena modificação no lema produz o seguinte:

Corolário 4.25.1. *Suponha que G é de valor real e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se E denota o conjunto de pontos x em (a, b) tais que $G(x+h) > G(x)$ para algum $h > 0$, então E é vazio ou aberto. No último caso, é uma união disjunta de intervalos enumeráveis (a_k, b_k), e $G(a_k) = G(b_k)$, exceto possivelmente quando $a = a_k$, em cujo caso temos apenas $G(a_k) \leq G(b_k)$.*

Defina

$$\Delta_h(F)(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Definição 4.26. Iremos considerar quatro Números de Dini, definidos por

$$D^+(F)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(F)(x);$$

$$D_+(F)(x) = \liminf_{h \to 0^+} \Delta_h(F)(x);$$

$$D^-(F)(x) = \limsup_{h \to 0^-} \Delta_h(F)(x);$$

$$D_-(F)(x) = \liminf_{h \to 0^-} \Delta_h(F)(x).$$

Proposição 4.27. *Se F é contínua em $[a, b]$ então*

$$D^+(F)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(F)(x)$$

é mensurável.

Demonstração. Primeiro, estendemos F continuamente em toda a reta da seguinte forma

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(a) & \text{se } x \leq a \\ F(x) & \text{se } a \leq x \leq b \\ F(b) & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Note que $\bar{F}$ é mensurável, pois a função F é contínua. Agora, defina

$$F_n(x) = \sup_{0<h<1/n} \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{h}.$$

Afirmamos que se F é contínua e $D \subset [a,b]$ é denso em $[a,b]$, então $\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in D} F(x)$. De fato, por $D \subset [a,b]$ então $\sup\limits_{x\in[a,b]} F(x) \geq \sup\limits_{x\in D} F(x)$. Mas por D ser denso em $[a,b]$, para todo $\epsilon > 0$ existe $x_D \in D$ tal que $F(x_D) > \sup\limits_{x\in[a,b]} F(x) - \epsilon$, assim $\sup\limits_{x\in[a,b]} F(x) \leq \sup\limits_{x\in D} F(x)$. Daí, se considerarmos

$$G_n(x) = \sup_{\mathbb{Q}\cap(0,1/n)} \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{h},$$

então $F_n(x) = G_n(x)$. Além disso, se $\{h_j\}$ é uma sequência que converge para para o supremo, isto é,

$$\frac{\bar{F}(x+h_j) - \bar{F}(x)}{h_j} \xrightarrow{j\to\infty} \sup_{0<h<1/n} \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{h},$$

então como $g(h) = \frac{\bar{F}(x+h)-\bar{F}(x)}{h}$ é contínua em $(0,1/n)$, por densidade, obtemos uma sequência $\{q_j\} \subset \mathbb{Q} \cap (0,1/n)$ tal que

$$\frac{\bar{F}(x+q_j) - \bar{F}(x)}{q_j} \xrightarrow{j\to\infty} \sup_{0<h<1/n} \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{h}.$$

Portanto, uma vez que $\lim G_n(x) = D^+(\bar{F})(x)$, então $D^+(\bar{F})(x)$ é mensurável e a restrição ao intervalo $[a,b]$ também será mensurável, o que prova a proposição. □

O teorema a seguir é de suma importância na teoria que vem sendo estudada.

Teorema 4.28. *Se F é contínua e de variação limitada em $[a,b]$, então F é diferenciável em quase todo ponto. Em outras palavras, o quociente*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

existe em quase todo ponto.

Demonstração. É suficiente considerar o caso em que F é crescente e limitada. Para provar o teorema é suficiente mostrar que:

(i) $D^+(F)(x) < \infty$ em em quase todo ponto x;

(ii) $D^+(F) \leq D_-(F)$.

De fato, pois uma vez que

$$D^+(F) \geq D_+(F) \geq D^-(F) \geq D_-(F).$$

Assim, se mostrarmos que $D^+(F)(x) < \infty$ e $D^+(F) \leq D_-(F)$ teremos a igualdade dos quatro Números de Dini e, portanto, o limite do quociente $\Delta_h(F)(x)$ quando $h \to 0$ existe. Então comecemos provando o item i). Aplicando o corolário 4.25.1 a função $G(x) = F(x) - \gamma x$ e perceba que $G(x+h) > G(x)$ com isso $F(x+h) - F(x) > \gamma h$ daí, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} > \gamma$, pelo corolário os pontos $x \in (a,b)$ em que isso ocorre é uma união enumerável de intervalos disjuntos (a_k, b_k), daí $E_\gamma \subset (\cup_k (a_k, b_k))$ onde $G(a_k) \leq G(b_k)$, consequentemente $F(b_k) - F(a_k) \geq \gamma(b_k - a_k)$. Com isso,

$$m(E_\gamma) \leq \sum_k m((a_k, b_k) = \sum_k b_k - a_k \leq \frac{1}{\gamma} \sum_k F(b_k) - F(a_k) \leq \frac{1}{\gamma}(F(b) - F(a)).$$

Assim, quando $\gamma \to \infty$ temos $m(E_\gamma) \to 0$. Uma vez que $\{x : D^+(F)(x) < \infty\} \subset E_\gamma$ para todo $\gamma > 0$ segue que $D^+(F)(x) < \infty$ em quase todo ponto x. Passemos agora para a prova do item ii). Para um número real r, R fixados tais que $R > r$. Seja

$$E = \{x \in [a,b] : D^+(F)(x) > R \text{ e } r > D_-(F)(x)\}$$

queremos mostrar que $D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x)$ em quase todo ponto. Para isso mostraremos que $m(E) = 0$. Assuma que $m(E) > 0$, daí, por E ser mensurável, podemos encontrar um conjunto aberto $\mathcal{O}$ tal que $E \subset \mathcal{O} \subset (a,b)$ e

$$m(\mathcal{O}) < m(E)\frac{r}{R}.$$

Por $\mathcal{O}$ ser aberto, podemos escrever $\mathcal{O}$ como $\bigcup I_n$ com I_n sendo intervalos abertos e disjuntos para todo n. Fixando n e aplicando o Corolário 4.25.1 à função $G(x) = -F(-x) + rx$ no intervalo $-I_n$ e refletindo novamente pela origem obtemos um conjunto aberto $\bigcup_k (a_k, b_k)$ contido em I_n onde (a_k, b_k) não disjuntos com $G(-a_k) \leq G(-b_k)$, daí, $-F(a_k) + ra_k \leq -F(b_k) + rb_k$, consequentemente, $F(b_k) - F(a_k) < r(b_k - a_k)$. No entanto, em cada intervalo (a_k, b_k) aplicamos novamente o corolário desta vez para $G(x) = F(x) - Rx$ Assim, obtemos um conjunto aberto $\mathcal{O}_n = \bigcup_{k,j}(a_{k,j}, b_{k,j})$ intervalos abertos disjuntos $(a_{k,j}, b_{k,j})$ com $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ para todo j e $G(a_{k,j}) \leq G(b_{k,j})$, então, $F(a_{k,j}) - Ra_{k,j} \leq F(b_{k,j}) - Rb_{k,j}$, com isso, $F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \geq R(b_{k,j} - a_{k,j})$. Então, usando o fato em que F é crescente encontramos

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{O}_n) = \sum_{k,j}(b_{k,j} - a_{k,j}) &\leq \frac{1}{R}\sum_{k,j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \\
&\leq \frac{1}{R}\sum_{k} F(b_k) - F(a_k) \\
&\leq \frac{r}{R}\sum_{k}(b_k - a_k) \leq \frac{r}{R}m(I_n).
\end{aligned}$$

Note que $(E \cap I_n) \subset \mathcal{O}_n$,pois para cada $x \in E \cap I_n$, temos , $x \in I_n$, logo, $x \in \mathcal{O}_n$.. E por construção $O_n \subset I_n$ daí,

$$m(E) = \sum_n m(E \cap I_n) \leq \sum_n m(\mathcal{O}_n) \leq \sum_m \frac{r}{R}m(I_n) = \frac{r}{R}m(\mathcal{O}) < m(E).$$

□

Corolário 4.28.1. *Se F é crescente e contínua, então F' existe em quase todo ponto. Além disso, F' é mensurável, não negativa e*

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b) - F(a).$$

Em particular, se F é limitada em $\mathbb{R}$, então F' é integrável em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Para $n \geq 1$, consideramos o quociente

$$G_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Pelo teorema anterior $G_n(x) \to F'(x)$ para quase todo x, o que mostra que F' é mensurável e não negativa. Pelo Lema de Fatou 3.15

$$\int_a^b F' \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b G_n(x)\,dx.$$

Daí, note que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b G_n(x)\,dx &= \int_a^b \frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}\,dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_a^b F\left(x+\frac{1}{n}\right)\,dx - \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_a^b F(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(y)\,dy - \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_a^b F(x)dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)\,dx - \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,dx
\end{aligned}
$$

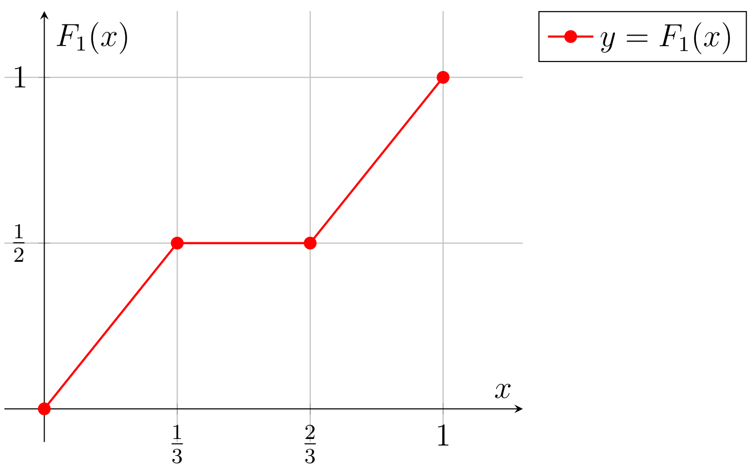
Uma vez que a função é contínua então a, b pertencem ao conjunto de Lebesgue e, portanto, o primeiro termo converge para $F(b)$ e o segundo termo converge para $F(a)$, o que conclui a prova. □

4.4.1 A função de Cantor-Lebesgue

Iremos, agora, contruir uma função $F : [0,1] \to [0,1]$, crescente, com $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$, mas $F'(x) = 0$ em quase todo lugar. Além disso, teremos F de variação limita, mas $\int_a^b F'(x) \neq F(b) - F(a)$.

Com efeito, considere o conjunto de cantor, descrito no Exemplo 2.9. Dessa forma, seja $F_1(x)$ uma função crescente contínua que satisfaz $F_1(0) = 0$, $F_1(x) = \frac{1}{2}$ se $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, $F_1(1) = 0$ e F_1 é linear em C_1, conforme o gráfico abaixo:

Figura 8 – Gráfico da Função $F_1(x)$



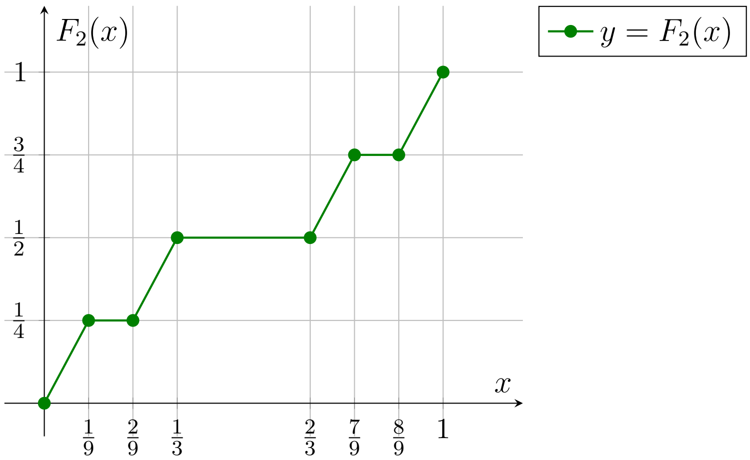
Fonte: Produzido pela autora

Similarmente, definimos $F_2(x)$ contínua, crescente e tal que:

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3}{4} & \text{se } \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9}, \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

e F_2 é linear em C_2, veja a figura abaixo.

Figura 9 – Gráfico da função $F_2(x)$.



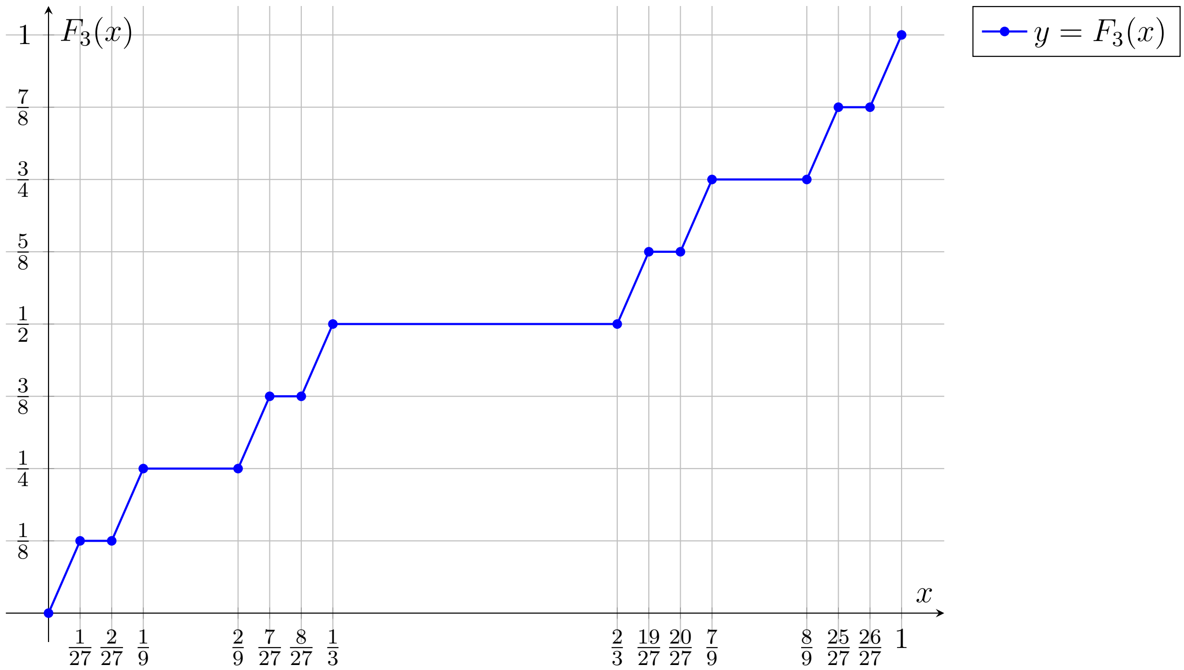
Fonte: Produzido pela autora

Para fixar as ideias, explicitaremos F_3. Similarmente, definimos F_3 contínua, crescente e tal que:

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{8} & \text{se } \frac{1}{27} \leq x \leq \frac{2}{27}, \\ \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9}, \\ \frac{3}{8} & \text{se } \frac{7}{27} \leq x \leq \frac{8}{27}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{5}{8} & \text{se } \frac{19}{27} \leq x \leq \frac{20}{27}, \\ \frac{3}{4} & \text{se } \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9}, \\ \frac{7}{8} & \text{se } \frac{25}{27} \leq x \leq \frac{26}{27}, \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

e $F_3(x)$ é linear em C_3, conforme o gráfico abaixo

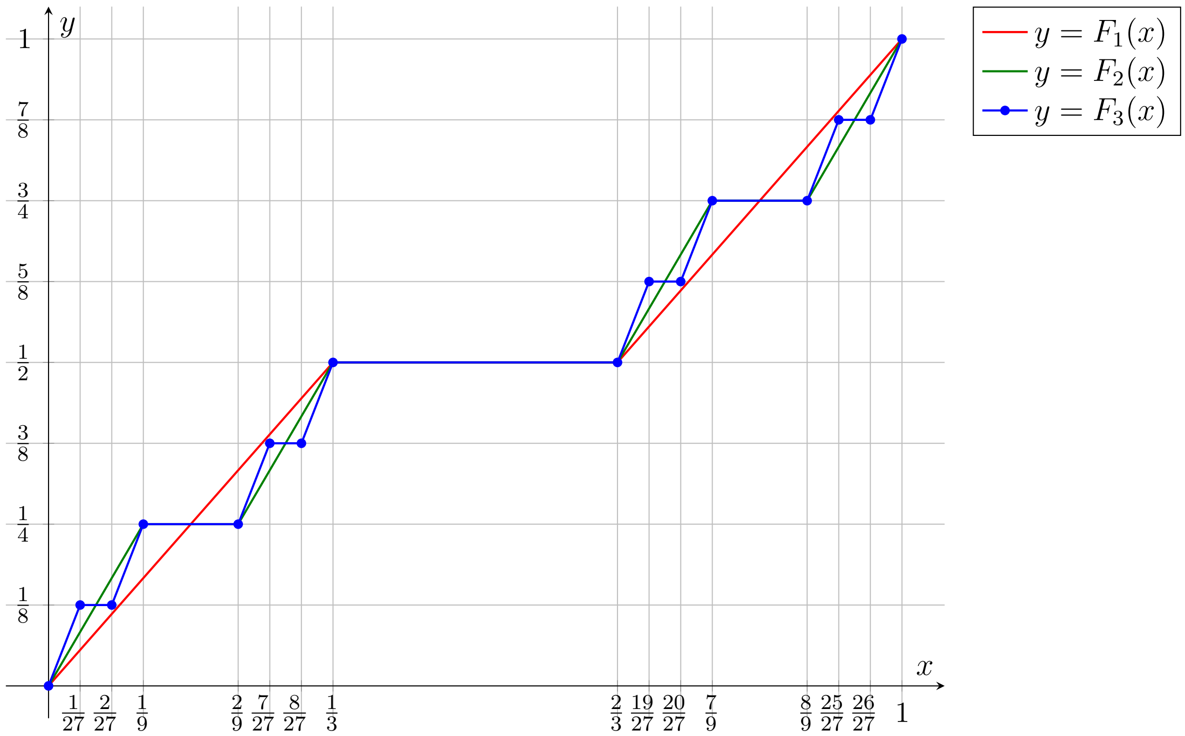
Figura 10 – Gráfico da função $F_3(x)$.



Fonte: Produzido pela autora

Assim, temos:

Figura 11 – Gráficos das funções $F_1(x)$, $F_2(x)$ e $F_3(x)$.



Fonte: Produzido pela autora

Esse processo cria uma sequência de funções crescentes tal que

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n-1}.$$

Assim, para cada $m > 0$ e cada $x \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned}
|F_k(x) - F_{k+m}(x)| &\leq |F_k(x) - F_{k+1}(x)| + \cdots + |F_{k+m-1}(x) - F_{k+m}(x)| \\
&\leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+m-1}} \\
&< \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Daí, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$. Assim, para quaisquer $k, j \geq N$, podemos supor, sem perca e generalidade, que $k < j$, assim temos

$$|F_k(x) - F_j(x)| < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$$

Portanto, $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ é de cauchy em $[0, 1]$, e, logo, é uniformemente convergente e o limite F dessa função é chamado de função de Cantor-Lebesgue. Da construção, F é crescente e F é constante em cada intervalo do complementar do conjunto de Cantor, uma vez que o conjunto de Cantor tem medida nula, concluimos que $F'(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in [0, 1]$.

4.5 Funções absolutamente contínuas

A classe das funções de variação limitada é fundamental por garantir a diferenciabilidade em quase todo ponto. Contudo, observamos anteriormente que esta classe inclui funções contínuas que, apesar de terem variação finita, não são expressas pela integral de suas derivadas. Essa falha em satisfazer o Teorema Fundamental do Cálculo motiva a introdução de uma condição mais estrita: as funções absolutamente contínuas.

Definição 4.29. Uma função F definida em $[a,b]$ é absolutamente contínua se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$$

sempre que

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta$$

e os intervalos (a_k, b_k), $k = 1, 2, \cdots, N$, são disjuntos.

Da definição tiramos algumas observações importantes:

Observação 4.30. 1) Da definição, uma função absolutamente contínua é uniformemente contínua.

2) Se F é absolutamente contínua em um intervalo limitado, então também é de variação limitada neste intervalo. Além disso, sua variação total é contínua (e, de fato, absolutamente contínua). Com efeito, se F é absolutamente contínua em $[a,x]$, se para $P = \{a = t_0 < \cdots < t_n = x\}$ partição de $[a,x]$ temos $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) < \delta$, então

$$\sum_{i=1}^{n}(F(t_i) - F(t_{i-1})) < \epsilon$$

com isso

$$\sup \sum_{i=1}^{n}(F(t_i) - F(t_{i-1})) < \epsilon.$$

Portanto, F é de variação limitada. Uma consequência da decomposição de F em duas funções monótonas mostra que cada função é contínua.

Proposição 4.31. *Se $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ onde f é integrável, então F é absolutamente contínua.*

Demonstração. Usando a Proposição 3.19, se $\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$ são disjuntos e $\sum_{k=1}^{n} m((a_k, b_k)) < \delta$, então

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f(y)|\, dy < \epsilon.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left| \int_{(a_k,b_k)} f(y)\, dy \right| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f(y)\, dy \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| -\int_{x}^{a_k} f(y)\, dy + \int_{x}^{b_k} f(y)\, dy \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)|\,.
\end{aligned}$$

Para qualquer $x \in (a_k, b_k)$, logo $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$. □

O fato da continuidade absoluta é uma condição necessária para impor em F se esperamos provar

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Para isso, iremos enunciar alguns resultados importantes para a prova.

Definição 4.32. Uma coleção $\mathcal{B}$ de bolas $\{B\}$ é dita uma cobertura de Vitali de um conjunto E se para todo $x \in E$ e qualquer $\eta > 0$ existe uma bola $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $m(B) < \eta$. Isto é, cada ponto é coberto por bolas arbitrariamente pequenas.

Lema 4.33. *Suponha E um conjunto de medida finita e $\mathcal{B}$ uma cobertura de Vitali de E. Para qualquer $\delta > 0$ podemos encontrar uma quantidade finita de bolas $B_1, \ldots, B_N$ em $\mathcal{B}$ que são disjuntas e tal que*

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \geq m(E) - \delta.$$

Demonstração. A demonstração pode ser acessada em [13] p. 128–129. □

Corolário 4.33.1. *Podemos arranjar a escolha das bolas de modo que*

$$m\left(E - \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta.$$

Teorema 4.34. *Se F é absolutamente contínua em $[a, b]$, então $F'(x)$ existe em quase todo ponto. Além disso, se $F'(x) = 0$ em quase todo ponto então F é constante.*

Demonstração. Por F ser absolutamente contínua em $[a,b]$, então é de variação limitada em $[a,b]$, logo $F'(x)$ existe em quase todo ponto. Para completar a Prova é suficiente mostrar que $F(b) = F(a)$, uma vez que se isso acontece podemos substituir o intervalo $[a,b]$ por qualquer subintervalo. Agora, seja E o conjunto de $x \in [a,b]$ tal que $F'(x)$ existe e é zero, pela nossa suposição $m(E) = b - a$. Daí, fixe momentaneamente, $\epsilon > 0$ para cada $x \in E$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(x+h) - F(x)|}{|h|} = 0,$$

então para cada $\eta > 0$ temos um intervalo aberto $I = (a_x, b_x) \subset [a,b]$ contendo x e com

$$|F(b_x) - F(a_x)| \leq \epsilon(b_x - a_x)$$

e $b_x - a_x < \eta$ A coleção desses intervalos forma um recobrimento de Vitali de E e pelo Lema, para $\delta > 0$ podemos selecionar finitos I_i, $1 \leq i \leq N$, $I_i = (a_i, b_i)$ que são disjuntos e tais que

$$\sum_{i=1}^{N} m(I_i) \geq m(E) - \delta = b - a - \delta$$

entretanto,

$$|F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon(b_i - a_i).$$

Ao somar obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |F(b_i) - F(a_i)| &\leq \sum_{i=1}^{N} \epsilon(b_i - a_i) \\ &= \epsilon(b-a).\end{aligned}$$

Já que os intervalos são disjuntos e estão em $[a,b]$. Agora considere o complementar de $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ em $[a,b]$ que é uma coleção finita de intervalos fechados $\bigcup_{k=1}^{M} [\alpha_k, \beta_k]$ com comprimento total menor que δ. Assim, pela continuidade absoluta de F,

$$\sum_{k=1}^{M} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \epsilon.$$

Ao todo, então

$$\begin{aligned}|F(b) - F(a)| &\leq \sum |F(b_i) - F(a_i)| + \sum |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \\ &\leq \epsilon(b-a) + \epsilon.\end{aligned}$$

uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $F(b) = F(a)$, como queríamos provar. $\square$

O ápice de nossos esforços está no próximo teorema, ele resolve nosso segundo problema de estabelecer a reciprocidade entre diferenciação e integração.

Teorema 4.35. *Suponha que F é absolutamente contínua em $[a,b]$. Então F' existe em quase todo ponto e é integrável. Além disso*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)\,dy \quad \textit{para todo } a \leq x \leq b.$$

Selecionando $x = b$ temos $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(y)\,dy$. Reciprocamente, se f é integrável em $[a,b]$ então há uma função absolutamente contínua F tal que $F'(x) = f(x)$ em quase todo ponto e de fato podemos fazer $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$.

Demonstração. Uma vez que sabemos que uma função real absolutamente contínua é a diferença entre duas funções crescentes, temos que F' é integrável em $[a,b]$ pelo Corolário 4.28.1. Agora seja $G(x) = \int_a^x F'(y)\,dy$. Desde que F' é integrável pela Proposição 4.31 então G é absolutamente contínua, e também a diferença $G(x) - F(x)$. Pelo teorema da diferenciação de Lebesgue sabemos que $G'(x) = F'(x)$ em quase todo ponto, pois

$$\begin{aligned} G'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x F'(y)\,dy - \int_a^{x_0} F'(y)\,dy}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x F'(y)\,dy}{x - x_0} \\ &= F'(x_0). \end{aligned}$$

Com isso, a derivada da diferença $F - G$ é nula em quase todo ponto. E pelo teorema anterior concluímos que $F - G$ é constante e avaliando a expressão em $x = a$, digamos $-G(a) + F(a) = K$ para alguma constante $K \in \mathbb{R}$, como $G(a) = 0$ então $K = F(a)$, logo $F(x) - \int_a^x F'(y)\,dy = F(a)$, como queríamos mostrar. A recíproca é uma consequência de observar que $\int_a^x f(y)\,dy$ é absolutamente contínua e pelo teorema da diferenciação de Lebesgue $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ satisfaz $F'(x) = f(x)$ em quase todo ponto. □

Agora, iremos ver alguns resultados que serão úteis para demonstrar o teorema 7.10, cuja importância será destacada na seção.

Proposição 4.36. *Toda função continuamente diferenciável com suporte compacto é absolutamente contínua.*

Demonstração. Seja h continuamente diferenciável com suporte compacto K, assim h' é contínua no compacto, logo é limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|h'(x)| \leq M$ para todo x. Assim sendo, h cumpre a condição de Lipschitz. Assim, para quaisquer dois pontos x_k e y_k existe $c_k \in (x_k, y_k)$ tal que

$$|h(x_k) - h(y_k)| \leq M|y_k - x_k|.$$

A coleção de todos intervalos(x_k, y_k) cobre o domínio da função, mas uma vez que tal função é suportada em um conjunto compacto podemos extrair uma coleção finita que cobre o suporte. Assim, dado $\epsilon > 0$ escolha $\delta = \epsilon/M$, daí se $\sum |y_k - x_k| < \delta$ então $\sum |f(y_k) - f(x_k)| < M \cdot \delta = \epsilon$ □

Proposição 4.37. *Se f é contínua com suporte compacto e sua integral é zero, então existe apenas uma primitiva com suporte compacto.*

Demonstração. Seja $\operatorname{supp} f \subset [a, b]$, definimos $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. $G(x)$ é uma primitiva, pelo que já mostramos, além disso G tem suporte compacto, pois se $x < a$ então $G(x) = -\displaystyle\int_x^a f(t)\, dt = 0$, e se $x > b$ então

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0.$$

Logo, $\operatorname{supp} G \subset [a, b]$, e, por conseguinte, é limitado e por definição fechado. Dessa maneira, se existir outra primitiva com suporte compacto, digamos que G_1, G_2 sejam primitivas de f e ambas com suporte compacto. Com isso, conseguimos eximir um compacto, digamos $[c, d]$, que contém o suporte das duas. Por G_1 e G_2 serem primitivas, elas diferem por uma constante assim $G_1 = G_2 + C$, se $x \notin [c, d]$ então $G_1(x) = G_2(x) = 0$ e concluimos que $C = 0$. Portanto, $G_1 = G_2$. □

4.6 Diferenciabilidade de funções salto

Agora iremos examinar funções monótonas que não são necessariamente contínuas, essa abordagem que nos permitirá retirar a hipótese de continuidade do Teorema 4.28.

Assumindo que F é crescente e limitada. Essas duas condições garantem a existência dos limites:

$$F(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y) \qquad F(x^+) = \lim_{y \to x^+} F(y)$$

Por F ser crescente temos $F(x^-) \leq F(x) \leq F(x^+)$ e a função F é contínua em x se $F(x^-) = F(x^+)$. Caso contrário, dizemos que tem uma descontinuidade de salto.

Lema 4.38. *Uma função limitada crescente F em $[a, b]$ tem uma quantidade enumerável de descontinuidades.*

Demonstração. Seja D o conjunto dos pontos em que F é descontínua, para cada descontinuidade, defina $I_x = (\lim_{y \to x^-} F(y), \lim_{y \to x^+} F(y))$. Se $a \neq b$ temos $I_a \cap I_b = \emptyset$. Daí, definindo $h : D \to \mathbb{Q}$, por $h(a) = I_a \cap \mathbb{Q}$, vemos que a função é injetiva, portanto D é enumerável. $\square$

Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ os pontos em que F é descontínua e seja α_n os saltos de F em x_n, isto é

$$\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$$

então $F(x_n^+) = F(x_n^-) + \alpha_n$ e $F(x_n) = F(x_n^-) + \theta_n \alpha_n$ para algum θ_n com $0 \leq \theta_n \leq 1$. Se tivermos

$$j_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_n \\ \theta_n & \text{se } x = x_n \\ 1 & \text{se } x > x_n. \end{cases}$$

Então definimos a função salto associada a F por

$$J_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

Por simplicidade, algumas vezes, escreveremos J ou J_F.

Nossa primeira observação é que se F é crescente e limitada então temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq F(b) - F(a) < \infty.$$

Ademais, essa série converge absolutamente e uniformemente.

Lema 4.39. *Se F é crescente e limitada em $[a, b]$ então*

(i) $J(x)$ é descontínua precisamente nos pontos $\{x_n\}$ e tem um salto em x_n igual ao de F;

(ii) A diferença $F(x) - J(x)$ é crescente e contínua.

Demonstração. (i) Se $x \neq x_n$ para todo n, cada j_n é contínua e uma vez que a série converge uniformemente, J deve ser contínua em x, pois

$$\lim_{y\to x} J_F(y) = \lim_{y\to x} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y\to x} \alpha_n j_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x) = J_F(x).$$

Já se $x = x_N$ para algum N então, escrevemos

$$J(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n j_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

O lado direito converge uniformemente e o lado esquerdo é uma soma finita, assim

$$\lim_{x\to x^-} J(x) = \lim_{x\to x^-} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n j_n(x) + \lim_{x\to x^-} \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n j_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n j_n(x)$$

e

$$\lim_{x\to x^+} J(x) = \lim_{x\to x^+} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n j_n(x) + \lim_{x\to x^+} \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n j_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n j_n(x) + \alpha_n.$$

Portando, no ponto x_N tem-se uma descontinuidade de salto de tamanho α_N.

(ii) Pelo item (i) $F - J$ é contínua, pois supondo que F, J sejam descontínuas em x_N, então

$$F(x_N^+) \neq F(x_N^-) \quad \text{e} \quad J(x_N^+) \neq J(x_N^-)$$

mas, sabemos que os saltos são iguais,

$$F(x_N^+) - F(x_N^-) = J(x_N^+) - J(x_N^-)$$

e portanto,

$$\Big(F(x_N^+) - J(x_N^+)\Big) - \Big(F(x_N^-) - J(x_N^-)\Big) = 0.$$

Logo, a função $F - J$ não tem salto em x_N. Assim, se $y > x$ temos

$$J(y) - J(x) = \sum_{x<x_n<y} \alpha_n(j_n(y) - j_n(x)) = \sum_{x<x_n<y} \alpha_n,$$

daí, $J(y) - J(x) = \sum_{x<x_n<y} \alpha_n \leq F(y) - F(x)$, por isso, $J(y) - J(x) \leq F(y) - F(x)$. Assim, temos $F(y) - J(y) \geq F(x) - J(x)$, portanto $F - J$ é crescente.

$\square$

Uma vez que podemos escrever $F(x) = [F(x) - J(x)] + J(x)$ iremos provar que J é diferenciável em quase toda parte.

Proposição 4.40. *Se* $J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_n(x)$ *é a função salto considerada acima, então*

$$\limsup_{h \to 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$$

é mensurável.

Teorema 4.41. *Se* J *é a função salto considerada acima, então* $J'(x)$ *existe e desaparece em quase toda parte.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, pela proposição anterior o conjunto E dos x onde

$$\limsup_{h \to 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h} > \epsilon \tag{4.3}$$

é um conjunto mensurável. Suponha $\delta = m(E)$, precisamos mostrar que $\delta = 0$. Agora observe que a série $\sum \alpha_n$ decorrente da definição de J converge, então para qualquer η, que escolheremos posteriormente podemos encontrar N suficientemente grande que $\sum_{n>N} \alpha_n < \eta$. Então escrevemos $J_0(x) = \sum_{n>N} \alpha_n j_n(x)$, e por causa da escolha de N temos

$$J_0(b) - J_0(a) < \eta. \tag{4.4}$$

Daí, $J - J_0$ é uma soma finita de termos, $\alpha_n j_n(x)$, e portanto o conjunto de pontos onde a condição (4.3) vale com J substituído por J_0 difere de E no máximo em um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Assim, podemos encontrar um conjunto compacto K, com $m(K) \geq \delta/2$, de modo que

$$\limsup_{h \to 0} \frac{J_0(x+h) - J_0(x)}{h} > \epsilon$$

para cada $x \in K$. Assim, existem intervalos (a_x, b_x) contendo x, $x \in K$, de modo que $J_0(b_x) - J_0(a_x) > \epsilon(b_x - a_x)$. Agora, primeiro escolhemos uma coleção finita de intervalos que cobrem K e então aplicar o lema para selecionar intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ disjuntos com $\sum_{j=1}^{n} m(I_j) > \frac{m(K)}{3}$. Os intervalos naturalmente satisfazem $J_0(b_j) - J_0(a_j) > \epsilon(b_j - a_j)$. Daí,

$$\begin{aligned} J_0(b) - J_0(a) &\geq \sum_{j=1}^{N} (J_0(b_j) - J_0(a_j)) \\ &> \epsilon \sum (b_j - a_j) \\ &\geq \epsilon \frac{m(K)}{3} > \frac{\epsilon\delta}{6} \end{aligned}$$

e por (4.4), $\frac{\epsilon\delta}{6} < \eta$, como a escolha de η foi arbitrária, segue que $\delta = 0$. $\square$

Usando este Teorema podemos estender o Teorema 4.28, retirando a hipótese de continuidade.

Teorema 4.42. *Se F é uma função de variação limitada em $[a, b]$ então F' existe em quase todo ponto.*

Demonstração. Basta observar que nos pontos que F é descontínua, usando o teorema anterior, tem-se F' igual a zero. □

5

Retificabilidade de curvas e a desigualdade isoperimétrica

Passamos mais a fundo ao estudo das curvas retificáveis e abordamos primeiro a validade da fórmula:

$$L = \int_a^b \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{1/2} dt \tag{5.1}$$

Para o tamanho L da curva parametrizada por $(x(t), y(t))$.

Já vimos que as curvas retificáveis não são justamente as curvas que, além da continuidade assumida de $x(t)$ e $y(t)$, essas funções são de variação limitada. No entanto, um exemplo bastante simples mostra que a fórmula (5.1) nem sempre é válida neste contexto.

Exemplo 5.1. Seja $x(t) = F(t)$ e $y(t) = F(t)$ onde F é a função de Cantor-Lebesgue e $0 \leq t \leq 1$. Então a curva parametrizada traça a linha reta de $(0,0)$ a $(1,1)$ e tem comprimento $\sqrt{2}$ mas $x'(t) = y'(t) = 0$ para quase todo ponto x.

A fórmula integral que expressa o comprimento de L é de fato válida se assumirmos, além disso, que as funções de coordenadas do parametrizador são absolutamente contínuas.

Lema 5.2. *Suponha F uma função de valor complexo e absolutamente contínua em $[a, b]$. Então*

$$T_F(a, b) = \int_a^b |F'(t)|\, dt.$$

Demonstração. De fato, pelo teorema 4.35 para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \cdots <$

$t_N = b$ de $[a, b]$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(t)\, dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |F'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b |F'(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Uma vez que, tomando o supremo sobre todas as partições, obtemos a desigualdade

$$T_F(a, b) \leq \int_a^b |F'(t)|\, dt. \tag{5.2}$$

Para provar a desigualdade reversa, fixe $\epsilon > 0$ e pela densidade de funções escada podemos encontrar uma função escada g tal que $\int_a^b |F'(t) - g(t)| dt < \epsilon$, definindo $F' = g + h$ temos $\int_a^b |h(t)| dt < \epsilon$. Defina $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ e $H(x) = \int_a^x h(t) dt$, então $F = H + G$ e

$$T_F(a, b) \geq T_G(a, b) - T_H(a, b).$$

Como $T_H(a, b) < \epsilon$ (usando (5.2)), então

$$T_F(a, b) \geq T_G(a, b) - \epsilon.$$

Agora, para a partição do intervalo $[a, b]$ dada por $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ em que a função escada g é constante em cada intervalo (t_{j-1}, t_j), $j = 1, \ldots, N$, então

$$\begin{aligned}T_G(a, b) &\geq \sum_{j=1}^{N} |G(t_j) - G(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t)\, dt \right| \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |g(t)|\, dt \quad \text{(pois } g \text{ é uma função escada)} \\ &= \int_a^b |g(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Sendo que $\int_a^b |g(t)|\, dt \geq \int_a^b |F'(t)|\, dt - \epsilon$, assim nós obtemos que

$$T_F(a, b) \geq \int_a^b |F'(t)|\, dt - 2\epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ estabelecemos a desigualdade e o lema fica provado. □

Teorema 5.3. *Suponha $(x(t), y(t))$ uma curva definida em $a \leq t \leq b$. Se ambos $x(t), y(t)$ são absolutamente contínuos então a curva é retificável e se L denota o tamanho, temos*

$$L = \int_a^b \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{1/2} dt.$$

Demonstração. Por ser absolutamente contínua então é de variação limitada e, logo, retificável. Assim, o tamanho da curva L a variação total da função que, pelo lema anterior, é igual a $\int_a^b |(x(t), y(t))'|dt = \int_a^b \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{1/2} dt.$

$\square$

Embora uma curva, definida como a imagem de um mapeamento $t \mapsto z(t)$, possa ser descrita por muitas parametrizações diferentes, uma curva retificável se destaca por possuir uma parametrização natural e única: a parametrização por comprimento de arco.

Para construí-la, definimos a função comprimento de arco, $s(t)$, como o comprimento da curva do ponto inicial $z(a)$ até o ponto $z(t)$, ou seja $L(a, t) = s(t)$. Esta função $s(t)$ é contínua e crescente, mapeando do intervalo $[a, b]$ para o intervalo $[0, L]$, onde L é o comprimento total da curva.

Podemos então reparametrizar a curva em termos do comprimento de arco s. A nova parametrização, $\tilde{z}(s)$, é definida por $\tilde{z}(s(t)) = z(t)$. Esta função é bem definida porque, se $s(t_1) = s(t_2)$ para $t_1 < t_2$, o comprimento da curva no intervalo $[t_1, t_2]$ é zero, o que implica que $z(t)$ é constante nesse intervalo. Portanto, $z(t_1) = z(t_2)$, e um único valor de s corresponde a um único ponto na curva.

Além disso, a desigualdade

$$|\tilde{z}(s_1) - \tilde{z}(s_2)| \leq |s_1 - s_2| \quad \text{para todo } s_1, s_2 \in [0, L]$$

nos diz que a distância em linha reta entre dois pontos na curva (o lado esquerdo) nunca pode ser maior que a distância percorrida ao longo da curva entre eles (o lado direito).

Finalmente, vale notar que a reparametrização não altera o traçado da curva. À medida que s varia de 0 a L, a função $\tilde{z}(s)$ percorre exatamente os mesmos pontos que $z(t)$ percorre quando t varia de a a b.

O próximo teorema revela a vantagem da parametrização por comprimento de arco, dentre outras vantagens, uma delas é que, apesar da função não ser absolutamente contínua, as funções coordenas de $\tilde{z}(s)$ são absolutamente contínuas.

Teorema 5.4. *Suponha que $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, é uma curva retificável de tamanho L. Considere a parametrização por comprimento de arco $\tilde{z}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ descrita acima.*

Então $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ são absolutamente contínuas, $|\tilde{z}'(s)| = 1$ para quase todo $s \in [0, L]$ e

$$L = \int_0^L \left((\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2\right)^{1/2} ds.$$

Demonstração. Notamos que

$$|\tilde{z}(s_1) - \tilde{z}(s_2)| \leq |s_1 - s_2|.$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\sum_{i=1}^{n} |s_i - s_{i+1}| < \delta$. Basta tomar $\epsilon = \delta$, então

$$\sum |\tilde{z}(s_i) - \tilde{z}(s_{i+1})| < \sum |s_i - s_{i+1}| < \epsilon.$$

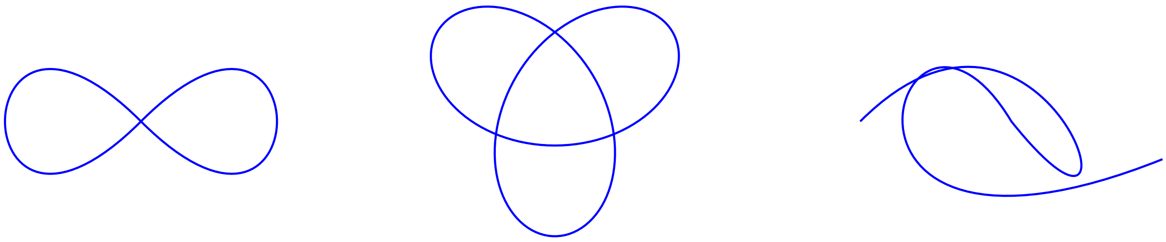
Portanto, é de variação limitada e logo diferenciável em quase todo ponto. Essa desigualdade mostra também que $|\tilde{z}'(s)| \leq 1$, pois $|\tilde{z}(s+h) - \tilde{z}(s)| \leq |h|$ implica que $\left|\frac{\tilde{z}(s+h) - \tilde{z}(s)}{h}\right| \leq 1$ em quase todo ponto $s \in [0, L]$. Por definição, a variação total de $\tilde{z}$ é igual a L e pelo teorema $L = \int_0^L |\tilde{z}'(s)|\, ds$. A identidade é possível quando $|\tilde{z}'(s)| = 1$ em quase todo ponto.

□

A prova que apresentaremos para a desigualdade isoperimétrica depende do conceito conteúdo de Minkowski de uma curva. Para nós será bastante útil, pois a retificabilidade de uma curva equivale a ter conteúdo de Minkowski (finito), sendo que essa quantidade é a mesma que o comprimento de curva.

Definição 5.5. Uma curva parametrizada por $z(t) = (x(t), y(t))$ com $a \leq t \leq b$ é dita ser simples se o mapeamento $t \mapsto z(t)$ for injetivo para $t \in [a, b]$. É uma curva simples fechada se o mapeamento $t \mapsto z(t)$ for injetivo em $[a, b)$ e $z(a) = z(b)$. Mais geralmente, uma curva é quase-simples se o mapeamento for injetivo para t no complemento de um número finito de pontos em $[a, b]$.

Figura 12 – Curvas quase-simples



Fonte: Produzido pela autora

Denotando por $\Gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$, para qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ (usaremos $K = \Gamma$ abaixo) denotamos por K^δ o conjunto aberto que consiste em todos os pontos a uma distância menor do que δ de K, isto é

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,k) < \delta\}.$$

Definição 5.6. Dizemos que o conjunto K tem conteúdo de Minkowski se o limite

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}$$

existe.

Quando existe, denotamos por $M(K)$. Além disso, denotamos

$$M^*(K) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{m(K^\delta)}{2\delta} \quad \text{e} \quad M_*(K) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}.$$

Os resultados a seguir serão de grande utilidade na prova do Teorema 5.11, as demonstrações que estão omitidas podem ser localizadas em [13] p. 138–143.

Lema 5.7. *Se $\Gamma = \{z(t), a \leq t \leq b\}$ é qualquer curva e $\Delta = |z(b) - z(a)|$ é a distância entre os pontos finais, então*

$$m(\Gamma^\delta) \geq 2\delta\Delta.$$

Proposição 5.8. *Suponha $\Gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$ uma curva quase-simples. Se $M_*(\Gamma) < \infty$ então a curva é retificável e se L denota o tamanho, então $L \leq M_*(\Gamma)$.*

Proposição 5.9. *Suponha $\Gamma = \{z(t), a \leq t \leq b\}$ uma curva retificável com tamanho L, então $M^*(\Gamma) \leq L$.*

Teorema 5.10. *Suponha* $\Gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$ *é uma curva quase-simples. O conteúdo de Minkowski de* Γ *existe se, e somente se,* Γ *é retificável. Quando é o caso e* L *é o tamanho da curva, então* $M(\Gamma) = L$.

Agora passamos a desigualdade isoperimétrica. Segundo a mitologia romana, a princesa Dido, que era filha de um rei fenício. Após ter sua vida ameaçada e presenciar a morte de seu marido em uma disputa de poder, Dido e seus seguidores buscou refúgio na costa norte-africana do Mar Mediterrâneo. Nesse exílio, foi-lhe prometida uma extensão de terra equivalente à área que pudesse ser circundada com o couro de um boi. A partir deste ponto da lenda, surge o problema matemático: com um perímetro fixo (o comprimento do couro de boi), como maximizar a área de terra cercada? Este é, basicamente, o problema isoperimétrico.

A desigualdade isoperimétrica no plano afirma, em essência, que dentre todas as curvas de um dado comprimento, é o círculo que delimita a área máxima.

Suponha que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$, e que sua borda $\bar{\Omega} - \Omega$ é uma curva retificável Γ, com comprimento $\ell(\Gamma)$. Aqui não exigimos que Γ seja uma curva simples fechada.

O teorema isoperimétrico então afirma o seguinte:

Teorema 5.11. $4\pi m(\Omega) \leq \ell(\Gamma)^2$.

Demonstração. Para cada $\delta > 0$, consideramos o conjunto externo

$$\Omega_+(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, \bar{\Omega}) < \delta\}$$

e o conjunto interno

$$\Omega_-(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, \Omega^c) \geq \delta\}.$$

Note que,

$$\Omega_-(\delta) \subset \Omega \subset \Omega_+(\delta).$$

Pois se $x \notin \Omega$ então $x \in \Omega^c$ daí $d(x, \Omega^c) = 0$ por isso $x \notin \Omega_-(\delta)$. A outra inclusão é por definição do conjunto. Notamos que para $\Gamma^\delta = \{x : d(x, \Gamma) < \delta\}$ temos

$$\Omega_+(\delta) = \Omega_-(\delta) \cup \Gamma^\delta. \tag{5.3}$$

De fato, pois se $x \in \Omega_+(\delta)$ então $d(x, \bar{\Omega}) < \delta$ por isso $d(x, \Omega^c) \geq \delta$ ou $x \in \bar{\Omega} - \Omega$ então, $x \in \Omega_-(\delta)$ ou $x \in \Gamma^\delta$. A outra inclusão é trivial. Note também que a união é disjunta. Além disso, se $D(\delta)$ é uma bola aberta de raio δ centrado na origem $D(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \delta\}$ então

$$\Omega_+(\delta) \supset \Omega + D(\delta) \quad \text{e}$$

$$\Omega \supset \Omega_-(\delta) + D(\delta).$$

Aplicando a desigualdade de Brunn-Minkowski, descrita em 2.53, para a primeira inclusão, obtemos

$$m(\Omega_+(\delta)) \geq \left((m(\Omega))^{1/2} + (m(D(\delta)))^{1/2}\right)^2$$

uma vez que $m(D(\delta)) = \pi\delta^2$ e $(A+B)^2 \geq A^2 + 2AB$ sempre que A e B são positivos, encontramos que

$$\begin{aligned} m(\Omega_+(\delta)) &\geq \left((m(\Omega))^{1/2} + (\pi\delta^2)^{1/2}\right)^2 \\ &= \left((m(\Omega))^{1/2} + \pi^{1/2}\delta\right)^2 \\ &\geq m(\Omega) + 2(m(\Omega))^{1/2}\pi^{1/2}\delta. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} m(\Omega) &\geq \left((m(\Omega_-(\delta)))^{1/2} + (m(D(\delta)))^{1/2}\right)^2 \\ &= \left((m(\Omega_-(\delta)))^{1/2} + \pi^{1/2}\delta\right)^2 \\ &\geq m(\Omega_-(\delta)) + 2(m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\pi^{1/2}\delta \end{aligned}$$

então,

$$-m(\Omega_-(\delta)) \geq -m(\Omega) + 2(m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\pi^{1/2}\delta.$$

Assim, por (14), $m(\Omega_+(\delta)) = m(\Omega_-(\delta)) + m(\Gamma^\delta)$ dessa forma

$$\begin{aligned} m(\Gamma^\delta) &= m(\Omega_+(\delta)) - m(\Omega_-(\delta)) \\ &\geq \left(m(\Omega) + 2(m(\Omega))^{1/2}\pi^{1/2}\delta\right) + \left(-m(\Omega) + 2(m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\pi^{1/2}\delta\right) \\ &= 2(m(\Omega))^{1/2}\pi^{1/2}\delta + 2(m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\pi^{1/2}\delta \\ &= 2\pi^{1/2}\delta\left((m(\Omega))^{1/2} + (m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Daí, $m(\Gamma^\delta) \geq 2\pi^{1/2}\delta\left((m(\Omega))^{1/2} + (m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\right)$ então

$$\frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \pi^{1/2}\left((m(\Omega))^{1/2} + (m(\Omega_-(\delta)))^{1/2}\right)$$

assim sendo, obtemos

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \limsup_{\delta\to 0} \pi^{1/2}\left((m(\Omega))^{1/2} + m(\Omega_-(\delta))^{1/2}\right)$$

e isso implica que $M^*(\Gamma) \geq \pi^{1/2}(2(m(\Omega))^{1/2})$. Pois, $\Omega_-(\delta) \nearrow \Omega$ quando $\delta \to 0$. Mas, pela Proposição 5.9 sabemos que $M^*(\Gamma) \leq \ell(\Gamma)$, então $\ell(\Gamma) \geq 2\pi^{1/2}(m(\Omega))^{1/2}$, equivalentemente $\ell(\Gamma)^2 \geq 4\pi m(\Omega)$. $\square$

Um resultado similar se aplica mesmo sem a suposição de que a fronteira é uma curva retificável. De fato, a prova mostra que para qualquer conjunto aberto limitado Ω temos $4\pi m(\Omega) \leq M^*(\Gamma)^2$.

Note que a igualdade só ocorre se a região Ω for um círculo, pois se Ω é um círculo de raio r, $m(\Omega) = \pi r^2$ e $\ell(\Gamma) = 2\pi r$, assim $4\pi m(\Omega) = 4\pi^2 r^2$ e $\ell(\Gamma)^2 = 4\pi^2 r^2$, logo $\pi m(\Omega) = \ell(\Gamma)^2$.

6

Teoria da medida abstrata

No início do século por volta de 1915, a Teoria da Medida e Integração de Lebesgue já era bastante conhecida entre os matemáticos, ela solucionou algumas limitações da integral de Riemann, permitindo a integração de uma classe maior de funções e estabelecendo resultados fortes de convergência. No entanto, a construção de Lebesgue dependia da estrutura métrica e topológica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, baseando-se em noções de intervalos e conjuntos abertos. Foi a necessidade de expandir essa ideia para contextos mais gerais que motivou Constantin Carathéodory, que buscou uma formulação abstrata.

Constantin Carathéodory (1873–1950) foi um matemático de origem grega que exerceu sua carreira na Alemanha. Carathéodory estudou engenharia na Bélgica. Posteriormente, dedicou-se à matemática e se formou na Universidade de Göttingen, na Alemanha, onde concluiu seu doutorado em 1904 e foi orientado por Hermann Minkowski.

Figura 13 – Constantin Carathéodory

Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Constantin_Carath%C3%A9odory`

Carathéodory formalizou sua abordagem no livro *"Vorlesungen über Reelle Funktionen"*[4] (Curso sobre Funções Reais), publicado em 1918 . No prefácio, ele expõe a motivação do trabalho:

> "A revolução que a teoria das funções reais sofreu por meio das investigações de H. Lebesgue é um processo que hoje pode ser considerado completo em suas linhas gerais. Uma tentativa de construir esta teoria de forma fundamental e sistemática me pareceu, portanto, necessária; isso me levou a elaborar e apresentar ao público(...). Esforcei-me por desenvolver os fatos necessários à apresentação de uma teoria das funções reais diretamente a partir dos axiomas sobre os números reais. (...). O fundamento sobre o qual repousa toda a teoria das funções reais é a teoria dos conjuntos de pontos, esta criação imperecível de Georg Cantor."

O objetivo de Carathéodory era desenvolver uma teoria axiomática da medida, conforme ele próprio descreve na mesma obra:

> "O que se sugere imediatamente, então, é que estas propriedades características sejam tratadas como o objeto principal de investigação, definindo e lidando com objetos abstratos que não precisam satisfazer nenhuma outra condição além daquelas exigidas pela própria teoria a ser desenvolvida. Este procedimento tem sido utilizado — mais ou menos conscientemente — por matemáticos de todas as eras. A geometria de Euclides e a álgebra literal dos séculos XVI e XVII surgiram desta forma. Mas só em tempos mais recentes este método, chamado método axiomático, foi consistentemente desenvolvido e levado à sua conclusão lógica. É nossa intenção tratar as teorias de medida e integração por meio do método axiomático que acabamos de descrever."

Para isso, comecemos definindo os objetos de estudo deste capítulo.

6.1 Espaços de medida abstrata

Definição 6.1. $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida se Ω é um conjunto e

(i) $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em Ω, isto é, $\mathcal{M}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω tal que

  (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$;

  (b) Se $A \in \mathcal{M}$ então $A^c \in \mathcal{M}$;

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{M}$ para todo n.

(ii) μ é uma medida, isto é, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ satisfaz

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que (A_n) é uma família contável disjunta de membros de $\mathcal{M}$.

Uma característica que um espaço de medida frequentemente possui é a de ser σ-finito, isto é, existe uma família contável (Ω_n) em $\mathcal{M}$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty$ para todo n.

Exemplo 6.2. Se $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}$ é a coleção de conjuntos mensuráveis de Lebesgue, e $\mu(E) = \int_E f\,dx$, onde f é uma dada função mensurável não negativa em $\mathbb{R}^d$. O caso $f = 1$ corresponde à medida de Lebesgue, que foi desenvolvida anteriormente.

6.1.1 Medida exterior e teorema de Carathéodory

Assim como a construção da Medida de Lebesgue exigiu a noção de medida exterior, essa mesma noção se mostra necessária para o desenvolvimento de medidas em um cenário mais geral.

Definição 6.3. Seja X um conjunto. Uma medida exterior μ_* em X é uma função μ_* da coleção de todos os subconjuntos de X para $[0, \infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mu_*(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $E_1 \subset E_2$, então $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$;

(iii) Se $E_1, E_2, \ldots$ é uma família enumerável de conjuntos, então

$$\mu_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j).$$

Com uma medida exterior (μ_*) definida, o passo seguinte é estabelecer a noção de conjuntos mensuráveis. Como foi feito antes, na medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, essa definição baseava-se na relação dos conjuntos com os abertos, usando a própria μ_*. Para generalizar essa ideia a qualquer espaço, Carathéodory propôs uma condição de substituição. Essa condição é a seguinte:

Definição 6.4. Um conjunto E em X é Carathéodory mensurável ou simplesmente mensurável se tivermos

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \quad \text{para todo } A \subset X.$$

Observação 6.5. Para provar que um conjunto E é mensurável, basta verificar

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \quad \text{para todo } A \subset X,$$

uma vez que adesigualdade inversa é verificada pela subatividade enumerável da medida exterior. Com efeito, qualquer conjunto A pode ser expresso como a união disjunta

$$A = (E \cap A) \cup (E^c \cap A).$$

Pela subaditividade enumerável (a propriedade iii)

$$\mu_* \left((E \cap A) \cup (E^c \cap A)\right) \leq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$$

ou seja,

$$\mu_*(A) \leq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).$$

Teorema 6.6. *Dada uma medida exterior μ_* em um conjunto X, a coleção $\mathcal{M}$ de conjuntos* Carathéodory *mensuráveis forma uma σ-álgebra. Além disso, μ_* restrita a $\mathcal{M}$ é uma medida.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra. $\emptyset \in \mathcal{M}$, pois para qualquer $A \subset X$, temos $\mu_*(\emptyset \cap A) = \mu_*(\emptyset) = 0$ e $\mu_*(\emptyset^c \cap A) = \mu_*(X \cap A) = \mu_*(A)$, então $\mu_*(A) = \mu_*(\emptyset \cap A) + \mu_*(\emptyset^c \cap A) = \mu_*(A)$. Além disso, $X \in \mathcal{M}$, pois para qualquer $A \subset X$: $\mu_*(X \cap A) = \mu_*(A)$ e $\mu_*(X^c \cap A) = \mu_*(\emptyset \cap A) = \mu_*(\emptyset) = 0$, então $\mu_*(A) = \mu_*(X \cap A) + \mu_*(X^c \cap A) = \mu_*(A)$. E, se $E \in \mathcal{M}$ então $E^c \in \mathcal{M}$, pois se $E \in \mathcal{M}$ então para qualquer $A \subset X$ temos

$$\begin{aligned} \mu_*(A) &= \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \\ &= \mu_*((E^c)^c \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \end{aligned}$$

então $E^c \in \mathcal{M}$. Agora vamos mostrar que $\mathcal{M}$ é fechado para união finita de conjuntos disjuntos. Sejam $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ e disjuntos e $A \subset X$ qualquer. Então

$$\mu_*(A) = \mu_*(E_2 \cap A) + \mu_*(E_2^c \cap A). \tag{6.1}$$

Por $E_1 \in \mathcal{M}$, $E_2 \cap A \subset X$ e $E_2^c \cap A \subset X$ temos

$$\mu_*(E_2 \cap A) = \mu_*(E_1 \cap (E_2 \cap A)) + \mu_*(E_1^c \cap (E_2 \cap A)),$$
$$\mu_*(E_2^c \cap A) = \mu_*(E_1 \cap (E_2^c \cap A)) + \mu_*(E_1^c \cap (E_2^c \cap A)).$$

Substituindo em 6.1

$$\begin{aligned}\mu_*(A) &= \mu_*(E_1 \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1 \cap E_2^c \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2^c \cap A)\\ &\geq \mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu_*((E_1 \cup E_2)^c \cap A).\end{aligned}$$

Então, $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ e se E_1 e E_2 são disjuntos temos

$$\begin{aligned}\mu_*(E_1 \cup E_2) &= \mu_*(E_2 \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_*(E_2^c \cap (E_1 \cup E_2))\\ &= \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2).\end{aligned}$$

Assim, μ_* é finitamente aditivo e por indução mostramos que $\mathcal{M}$ é fechado para união finita de conjuntos disjuntos. Agora vamos mostrar que $\mathcal{M}$ é fechado para união enumerável de conjuntos disjuntos, e que μ_* é aditiva para uniões disjuntas e enumeráveis. Seja $E_1, E_2, \ldots$ uma coleção disjunta de conjuntos em $\mathcal{M}$ e defina

$$G_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \quad \text{e} \quad G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Para cada n, o conjunto G_n é uma união finita de conjuntos em $\mathcal{M}$, logo $G_n \in \mathcal{M}$. Além disso, para qualquer $A \subset X$ temos

$$\begin{aligned}\mu_*(G_n \cap A) &= \mu_*(E_n \cap (G_n \cap A)) + \mu_*(E_n^c \cap (G_n \cap A))\\ &= \mu_*(E_n \cap A) + \mu_*(G_{n-1} \cap A).\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\mu_*(E_n \cap A) + \mu_*(G_{n-1} \cap A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_*(E_j \cap A).$$

Fazendo indução em n, vemos que para $n = 2$

$$\mu_*(E_2 \cap A) + \mu_*(E_1 \cap A) = \sum_{j=1}^{2} \mu_*(E_j \cap A).$$

Supondo válido para n, então

$$\begin{aligned}
&\mu_*(E_{n+1}\cap A)+\mu_*(G_n\cap A)\\
&=\mu_*(E_{n+1}\cap A)+\mu_*((E_n\cap A)\cup(G_{n-1}\cap A))\\
&=\mu_*(E_{n+1}\cap A)+\mu_*(E_n\cap A)+\mu_*(G_{n-1}\cap A)\\
&=\mu_*(E_{n+1}\cap A)+\sum_{j=1}^{n}\mu_*(E_j\cap A)\\
&=\sum_{j=1}^{n+1}\mu_*(E_j\cap A).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\mu_*(G_n\cap A)=\sum_{j=1}^{n}\mu_*(E_j\cap A)$. Uma vez que $G_n\in\mathcal{M}$ e $G^c\subset G_n^c$, encontramos que

$$\mu_*(A)=\mu_*(G_n\cap A)+\mu_*(G_n^c\cap A)\geq\sum_{j=1}^{n}\mu_*(E_j\cap A)+\mu_*(G^c\cap A).$$

Fazendo $n\to\infty$ obtém-se

$$\mu_*(A)\geq\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)\geq\mu_*(G\cap A)+\mu_*(G^c\cap A).$$

Então, $G\in\mathcal{M}$, como desejado. Além disso, fazendo $A=G$ encontramos que μ_* tem a aditividade enumerável em $\mathcal{M}$, pois

$$\mu_*(G)\geq\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j\cap G)+\mu_*(G^c\cap G)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j).$$

$\square$

6.1.2 Medidas exteriores métricas

Ao equipar uma métrica no conjunto X definimos uma categoria especial de medidas exteriores. Essas medidas são importantes por gerarem medidas na σ-álgebra inerente a X, que é gerada por seus conjuntos abertos.

Definição 6.7. Um espaço métrico é um conjunto X equipado com uma função $d: X\times X\to[0,\infty)$ que satisfaz:

(i) $d(x,y)=0$ se e somente se $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ para todo $x,y\in X$;

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Exemplo 6.8. 1) O espaço $\mathbb{R}^d$ com a métrica euclidiana $d(x,y) = |x-y|$ é um espaço métrico.

2) O espaço de funções contínuas em um conjunto compacto K, com a métrica do supremo $d(f,g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$.

Um espaço métrico (X,d) é naturalmente equipado com uma família de bolas abertas.

Definição 6.9. O conjunto

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

define a bola aberta de raio r centrada em x.

Definição 6.10. Dizemos que um conjunto $\mathcal{O} \subset X$ é aberto se para qualquer $x \in \mathcal{O}$ existe $r > 0$ de modo que a bola aberta $B_r(x)$ esteja contida em $\mathcal{O}$.

Definição 6.11. Um conjunto é fechado se seu complemento for aberto.

Com essas definições, verifica-se que uma união arbitrária de conjuntos abertos é aberta e intersecção arbitrária de conjuntos fechados é fechada.

Definição 6.12. Definimos a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_X$, como a menor σ-álgebra de conjuntos em X que contém os conjuntos abertos de X. Em outras palavras, $\mathcal{B}_X$ é a interseção de todas as σ-álgebras que contêm os conjuntos abertos. Os elementos em $\mathcal{B}_X$ são chamados de conjuntos de Borel.

Definição 6.13. Dados dois conjuntos A e B em um espaço métrico (X,d), a distância entre A e B é definida por

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Definição 6.14. Uma medida exterior μ_* em X é uma medida exterior métrica se satisfaz

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \quad \text{sempre que } d(A,B) > 0.$$

Teorema 6.15. *Se μ_* é uma medida exterior métrica em um espaço métrico X, então os conjuntos de Borel em X são mensuráveis. Consequentemente, μ_* restrita a $\mathcal{B}_X$ é uma medida.*

Demonstração. Mostraremos que os conjuntos fechados em X são mensuráveis. Seja F um conjunto fechado e A subconjunto de X com $\mu_*(A) < \infty$. Para cada $n > 0$, seja

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : d(x, F) > 1/n\}.$$

Note que $A_n \subset A_{n+1}$ e uma vez que F é fechado, temos $F^c \cap A = \bigcup_n A_n$, pois se $x \in F^c \cap A$, uma vez que F é fechado $d(x, F) > 0$ então, $d(x, F) > 1/n$ para algum n. Além disso, a distância entre $F \cap A$ e A_n é maior do que ou igual a $1/n$. Assim, desde que $(F \cap A) \cup A_n \subset A$,

$$\mu_*(A) \geq \mu_*((F \cap A) \cup A_n) = \mu_*(F \cap A) + \mu_*(A_n). \tag{6.2}$$

Agora, afirmamos que $\lim_{n\to\infty} \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A)$. Para provar isso, defina $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$, ou seja

$$B_n = \left\{x \in A : \frac{1}{n+1} \leq d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Note que, $d(B_{n+1}, A_n) \geq \dfrac{1}{n(n+1)}$. Pois, $\dfrac{1}{n(n+1)}$ é cota inferior, de fato, dados $x \in B_{n+1}$ então $d(x, F) \leq \dfrac{1}{n+1}$ e $y \in A_n$ então $d(y, F) > \dfrac{1}{n}$, assim $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$ equivale a $\left|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Com isso, $d(x, y) > \dfrac{1}{n(n+1)}$. Logo, uma vez que o ínfimo é a maior das cotas inferiores, $d(B_{n+1}, A_n) \geq \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$. Dessa forma,

$$\mu_*(B_{2k} \cup A_{2k-1}) = \mu_*(B_{2k}) + \mu_*(A_{2k-1}).$$

Além disso, vejamos que $B_{2k} \cup A_{2k-1} \subset A_{2k+1}$, essa inclusão segue a definição dos conjuntos, pois se $x \in B_{2k}$ então $x \in A_{2k+1}$ por definição, e se $x \in A_{2k-1}$, desde que $A_m \subset A_{m+1}$ para todo m, então $x \in A_{2k}$. Dessa forma,

$$\mu_*(A_{2k+1}) \geq \mu_*(B_{2k} \cup A_{2k-1}) = \mu_*(B_{2k}) + \mu_*(A_{2k-1}).$$

Assim, podemos ver também que

$$\mu_*(A_{2k-1}) \geq \mu_*(B_{2k-2}) + \mu_*(A_{2k-3}).$$

Substituindo na anterior,

$$\mu_*(A_{2k+1}) \geq \mu_*(B_{2k}) + \mu_*(B_{2k-2}) + \mu_*(A_{2k-3}).$$

Fazendo este processo k vezes obtemos

$$\begin{aligned}\mu_*(A_{2k+1}) &\geq \mu_*(B_{2k}) + \mu_*(B_{2k-2}) + \cdots + \mu_*(B_2)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mu_*(B_{2j}).\end{aligned}$$

E usando um argumento similar obtemos

$$\mu_*(A_{2k}) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu_*(B_{2j-1}).$$

Desde que $\mu_*(A)$ é finito, as séries $\sum \mu_*(B_{2j})$ e $\sum \mu_*(B_{2j-1})$ convergem. Dessa forma, para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(B_j) < \epsilon.$$

Assim,

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c \cap A) \leq \mu_*(A_n) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu_*(B_j).$$

Portanto, $\mu_*(A_n) - \mu_*(F^c \cap A) < \epsilon$. Isso prova que $\lim \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A)$.Assim, passando o limite em (6.2) obtemos

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A).$$

O que implica que F é mensurável. Ou seja, se F é fechado e $F \in \mathcal{B}_X$ então $F \in \mathcal{M}$, uma vez que sendo $F \in \mathcal{M}$ então $F^c \in \mathcal{M}$, com F^c aberto. Dessa maneira, $\mathcal{M}$ contém os abertos e, pela definição de σ-álgebra de Borel, segue que $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$. E de fato é uma medida pelo Teorema 6.6. □

Lema 6.16. *Seja $\{C_k\}$ uma sequência crescente de mensuráveis com $C_k \nearrow C$, então $\mu(C) = \lim_k \mu(C_k)$*

Demonstração. Perceba que

$$C_1 \cup (C_2 \setminus C_1) \cup (C_3 \setminus C_2) \ldots (C_{n+1} \setminus C_n) \ldots$$

é uma união disjunta e $C = \bigcup_n (C_{n+1} \setminus C_n)$, dessa forma temos

$$\mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_{n+1} \backslash C_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(C_{n+1} \backslash C_n) = \lim_{k \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} (C_{n+1} \setminus C_n)\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(C_k).$$

□

Dado um espaço métrico X, a medida μ definida nos conjuntos de Borel de X será referida como uma medida de Borel.

Proposição 6.17. *Suponha que a medida de Borel μ seja finita em todas as bolas de X de raio finito. Então, para qualquer conjunto de Borel E e qualquer $\epsilon > 0$, existe um conjunto aberto $\mathcal{O}$ e um conjunto fechado F tais que $E \subset \mathcal{O}$ e $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \epsilon$, enquanto $F \subset E$ e $\mu(E \setminus F) < \epsilon$.*

Demonstração. Inicialmente, iremos provar a seguinte afirmação: se $F^* = \bigcup_k F_k$ onde F_k são conjuntos fechados, então, para qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar $F \subset F^*$ tal que $\mu(F^* \setminus F) < \epsilon$. Com efeito, assuma que $F_k \nearrow F^*$. Fixe um ponto $x_0 \in X$ e seja $B_n = \{x : d(x, x_0) < n\}$ com $B_0 = \emptyset$. Desde que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, temos

$$F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})).$$

De fato, se $x \in F^*$então $n - 1 < d(x, x_0) \leq n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $F_k \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}) \nearrow F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})$ assim, uma vez que para todo n $\mu(F_k \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}))$ é finita usando o lema anterior obtemos

$$\mu\left(F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})\right) = \lim_k \mu\left(F_k \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})\right).$$

Assim sendo, então existe $N(n)$ tal que

$$\mu\left(F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})\right) - \mu\left(F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})\right) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

daí,

$$\mu\left((F^* \setminus F_{N(n)}) \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})\right) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Se considerarmos $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}))$ então,

$$F^* \setminus F = F^* \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(F^* \setminus F_{N(n)}) \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})]$$

por isso

$$\mu(F^* \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

Note também que $F \cap \overline{B_k}$ é fechado, pois é união finita de conjuntos fechados, de fato, uma vez que

$$F \cap \overline{B_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})) \cap \overline{B_k},$$

se $n - 1 > k$ então $(\overline{B_n} \setminus B_{n-1}) \cap \overline{B_k} = \emptyset$, porque se $x \in \overline{B_k}$ então $d(x, x_0) \leq k < n - 1$, com isso $x \in B_{n-1}$ e, logo, $x \notin \overline{B_n} \setminus B_{n-1}$. Dessa maneira, a expressão se transforma em

$$F \cap \overline{B_k} = \bigcup_{n=1}^{k+1} \left[(F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})) \cap \overline{B_k}\right].$$

Desse modo, concluimos que para todo k, $F \cap \overline{B_k}$ é fechado, e de fato F é fechado pois se $\{x_j\}$ é uma sequência de F com $x_j \to x$, então $\{x_j\} \cup \{x\} \subset \overline{B_k}$ para algum k pois $\{x_j\}$ é limitada, então $\{x_j\} \subset \overline{B_k} \cap F$, por $\overline{B_k} \cap F$ ser fechado, então $x \in \overline{B_k} \cap F$ e, portanto, $x \in F$. Sendo assim, F é fechado. Havendo estabelecido essa afirmação, denotamos por $\mathcal{C}$ a coleção de todos os conjuntos que satisfazem esta proposição. Note que se $E \in \mathcal{C}$ então vai haver um conjunto aberto $\mathcal{O}$ tal que $E \subset \mathcal{O}$ e $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \epsilon$ e vai haver um fechado F tal que $F \subset E$. Inicialmente, notemos que $\mathcal{C}$ é fechado para complementar, de fato se existe um conjunto aberto $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O} \subset E$ e $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \epsilon$, então $F = \mathcal{O}^c \subset E^c$, onde F é fechado, e

$$\mu(E^c \setminus F) = \mu(E^c \cap (O^c)^c) = \mu(E^c \cap O) = \mu(O \setminus E) < \epsilon.$$

Usando o mesmo argumento, mas supondo que existe o conjunto fechado F contido em E com $\mu(E \setminus F) < \epsilon$, concluimos que existirá um aberto que contém E com tal propriedade da medida. Assim, $E^c \in \mathcal{C}$. Agora suponha $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ com cada $E_k \in \mathcal{C}$. Então existem conjuntos abertos $\mathcal{O}_k$, com $E_k \subset \mathcal{O}_k$ e $\mu(\mathcal{O}_k \setminus E_k) < \dfrac{\epsilon}{2^k}$. Escrevendo $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$ então

$$\mathcal{O} \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{O}_k \setminus E_k)$$

com isso,

$$\mu(\mathcal{O} \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Além disso, existe um conjunto fechado $F_k \subset E_k$ com $\mu(E_k \setminus F_k) < \dfrac{\epsilon}{2^k}$. Escrevendo $F^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ então $\mu(E \setminus F^*) < \epsilon$. F^* não é necessariamente fechado, então usamos a afirmação inicial para encontrar um conjunto fechado $F \subset F^*$ tal que $\mu(F^* \setminus F) < \epsilon$. Com isso,

$$\mu(E \setminus F) = \mu((E \setminus F^*) \cup (F^* \setminus F)) = \mu(E \setminus F^*) + \mu(F^* \setminus F) < 2\epsilon$$

isso prova que $E \subset \mathcal{C}$. Finalmente, para qualquer $\mathcal{O}$ aberto em $\mathcal{C}$ então $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$ e, obviamente, $\mu(\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}) = 0 < \epsilon$. Agora, encontraremos o fechado $F \subset \mathcal{O}$ tal que $\mu(\mathcal{O} \setminus F) < \epsilon$. Seja $F_k = \left\{x \in \overline{B_k} : d(x, \mathcal{O}^c) \geq \dfrac{1}{k}\right\}$, então cada F_k é fechado, pois a distância é uma função contínua, e

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

De fato, pois se $x \in \mathcal{O}$ então $d(x, \mathcal{O}^c) > 0$ por isso, $d(x, \mathcal{O}^c) \geq \dfrac{1}{k}$ para algum k, daí $x \in F_k$, e se a distância de x para $\mathcal{O}^c$ é positiva com $\mathcal{O}$ aberto, então $x \in \mathcal{O}$. Assim, aplicando a afirmação preliminar novamente, conseguimos encontrar F fechado com $F \subset \mathcal{O}$ tal que $\mu(\mathcal{O} \setminus F) < \epsilon$. Desta forma $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ contém os abertos, e por conseguinte contém os conjuntos de Borel, como queríamos demonstrar. $\square$

6.2 Integração em um espaço de medida

Uma vez definidas as propriedades de um espaço de medida X, a teoria sobre funções mensuráveis e sua integração é análoga ao caso da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Os resultados dos capítulos anteriores se estendem para este contexto, com demonstrações parecidas. Por isso, não repetiremos os argumentos e apenas enunciaremos as conclusões.

Daqui em diante, iremos assumir que todo espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ será considerado σ-finito.

6.2.1 Funções mensuráveis

Definição 6.18. Uma função f em X com valores nos números reais estendidos é mensurável se

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

A definição apresentada permite generalizar os resultados conhecidos para funções mensuráveis no contexto da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Isso significa que as características principais são mantidas, como o fato de que a coleção de funções mensuráveis é fechada sob as operações algébricas básicas. Além disso, outra propriedade crucial que se preserva é que o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis também resulta em uma função mensurável. A demonstração desses fatos segue, de maneira quase idêntica, as feitas anteriormente.

Definição 6.19. Se f e g são funções mensuráveis em X, dizemos que f, g são iguais em quase todo ponto e escrevemos $f = g \quad$ q.t.p. ou $f = g\;$ a.e. se

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

onde μ é uma medida.

Definição 6.20. Uma função s em X é uma função simples se pode ser escrita na forma

$$s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k},$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$ e os $E_k \subset X$ são conjuntos mensuráveis de medida finita.

A aproximação por funções simples foi um resultado importante no contexto da integral de Lebesgue e continua válido nesse contexto.

Teorema 6.21. *Suponha que f seja uma função mensurável não negativa em um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Então existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz*

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \quad \textit{e} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \textit{para todo } x.$$

Em geral, se f é apenas mensurável, existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)| \quad \textit{e} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \textit{para todo } x.$$

Outro resultado importante, que se generaliza nesse contexto é o Teorema de Egorov:

Teorema 6.22 (Egorov)**.** *Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ seja uma sequência de funções mensuráveis definida em um conjunto mensurável $E \subset X$ com $\mu(E) < \infty$, e $f_k(x) \to f(x)$ em quase todo ponto. Então, para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto A_ϵ com $A_\epsilon \subset E$, $\mu(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$, e tal que $f_k \to f$ uniformemente em A_ϵ.*

6.2.2 Definição e propriedades de integral

Os estágios que fizemos para definir a integral de Lebesgue, se estende à situação de um espaço de medida σ-finito $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Isto leva à noção da integral, com respeito à medida μ, de uma função mensurável não negativa f em X. Esta integral é denotada por

$$\int_X f(x)\, d\mu(x),$$

que por vezes escreveremos $\int_X f\, d\mu$, $\int f\, d\mu$ ou $\int f$. Finalmente, dizemos que uma função mensurável f integrável se

$$\int_X |f(x)|\, d\mu(x) < \infty.$$

As propriedades básicas da integral, como linearidade, monotonicidade e aditividade são, também, satisfeitas nesse contexto. Além disso, continuam a valer resultados importantes sobre o limite, como os demonstrados com a medida de Lebesgue. São eles:

- Lema do Fatou (3.15): Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas em X, então

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

- Teorema da Convergência Monótona (3.15.2): Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas com $f_n \nearrow f$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

- Teorema da Convergência Dominada (3.20): Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis com $f_n(x) \to f(x)$ em quase todo ponto e tal que $|f_n| \leq g$ para alguma função g integrável, então

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

e consequentemente

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu \quad \text{quando } n \to \infty.$$

6.2.3 Os espaços $L^1(X,\mu)$ e $L^2(X,\mu)$

Vimos anteriormente que o espaço $L^1(\mathbb{R})$ é definido pelo conjunto das funções mensuráveis (à Lebesgue) tais que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx < \infty$ quocientado pela relação de equivalência que é definida pela igualdade de duas funções em quase todo ponto. Diante disto, definimos analogamente o espaço $L^1(X,\mu)$.

Definição 6.23. As classes de equivalência (módulo funções que se anulam quase por toda parte) de funções integráveis em $(X,\mathcal{M},\mu)$ formam um espaço vetorial munido de uma norma. Este espaço é denotado por $L^1(X,\mu)$ e sua norma é

$$\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f(x)| \, d\mu(x).$$

Também observamos anteriormente, que o espaço $L^2(\mathbb{R})$ é definido pelo conjunto das funções mensuráveis (à Lebesgue) que têm quadrado integrável, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx < \infty$ quocientado pela relação de equivalência descrita acima. De modo parecido definimos $L^2(X,\mu)$.

Definição 6.24. Definimos $L^2(X,\mu)$ como a classe de equivalência de funções mensuráveis para as quais $\int_X |f(x)|^2\,d\mu(x) < \infty$. A norma é então

$$\|f\|_{L^2(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^2\,d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Há também um produto interno neste espaço dado por

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x).$$

A demonstração que fizemos em 3.26 provando a completude de $L^1(\mathbb{R})$, com alguns ajustes, pode ser estendida para o caso geral. De modo semelhante, podemos estender o resultado de $L^2(X,\mu)$. Obtendo:

- O espaço $L^1(X,\mu)$ é um espaço vetorial normado completo.
- O espaço $L^2(X,\mu)$ é um espaço de Hilbert.

Um fato que nos será útil, é a desigualdade de Cauchy-Schawarz em $L^2(X,\mu)$ cuja demonstração que fizemos em 3.36 para o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser adaptada e estendida para $L^2(X,\mu)$.

6.3 Continuidade absoluta das medidas

A generalização da continuidade absoluta (tema da seção 4.5 do capítulo 4) requer uma ampliação do conceito de medida. Isso se torna necessário para abranger funções de conjunto que admitem valores positivos ou negativos, permitindo que a teoria abranja a decomposição de outras estruturas de medida. Assim, comecemos definindo essa noção.

Definição 6.25. Uma medida com sinal ν em uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ é uma função que satisfaz:

(i) A função de conjunto ν é de valor estendido, no sentido de que $-\infty < \nu(E) \leq \infty$ para todo $E \in \mathcal{M}$;

(ii) Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ são subconjuntos disjuntos de $\mathcal{M}$, então

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Perceba que do item (ii) podemos concluir que se $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ é finito, então $\sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$é absolutamente convergente, pois é independente do arranjo dos termos. Para ver isso, basta notar que a mudança de ordem dos conjuntos da união não altera o conjunto final que tem medida bem definida.

Exemplo 6.26. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e f uma função μ-mensurável em X e não-negativa. Podemos definir o sinal da medida ν por

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto mensurável $E \in \mathcal{M}$. De fato, uma vez que f é não-negativa cumpre a condição (i) e pela aditividade da integral cumpre a condição ii. Mas, se f for apenas integrável, para garantir que ν satisfaça (i) e (ii) devemos pedir que $\int f^-$ seja finita enquanto $\int f^+$ pode ser ilimitada.

Definição 6.27. Definimos uma função $|\nu|$ em $\mathcal{M}$, chamada de variação total de ν, por

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições de E, isto é, sobre todas as uniões contáveis $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, onde os conjuntos E_j são disjuntos e pertencem a $\mathcal{M}$.

Proposição 6.28. *A variação total $|\nu|$ de uma medida com sinal ν é ela própria uma medida (positiva) que satisfaz $\nu \leq |\nu|$.*

Observação 6.29. Com essa proposição fica possível escrever ν como a diferença de duas medidas positivas. Para ver isso, definimos a variação positiva e a variação negativa de ν respectivamente por:

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) \quad \text{e} \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu).$$

Pela proposição, $\nu+$ e ν^- são medidas e

$$v^+ - v^- = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) - \frac{1}{2}(|\nu| - \nu) = \frac{1}{2} \cdot 2\nu = \nu$$

$$\nu^+ + \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) + \frac{1}{2}(|\nu| - \nu) = \frac{1}{2}2|\nu| = |\nu|$$

No caso acima, se se $\nu(E) = \infty$ para um conjunto E, então $|\nu|(E) = \infty$, e $\nu^-(E)$ é definida como zero.

Definição 6.30. Dizemos que a medida com sinal ν é σ-finita se a medida $|\nu|$ é σ-finita.

Já que $\nu \leq |\nu|$ e $-\nu \leq |\nu|$, encontramos que

$$-|\nu| \leq \nu \leq |\nu|.$$

E como resultado, se ν é σ-finita, ν^+ e ν^- também o são.

Definição 6.31. Dizemos que uma medida ν é suportada num conjunto A, se $\nu(E) = \nu(E \cap A)$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

Dadas duas medidas definidas numa σ-álgebra comum, delinearemos as possíveis interações entre elas. Dadas duas medidas ν e μ definidas na σ-álgebra $\mathcal{M}$; dois cenários extremos são:

(a) ν e μ são suportadas em partes separadas de $\mathcal{M}$.

(b) O suporte de ν é uma parte essencial do suporte de μ, no sentido de que $\mu(\text{supp}(\nu)) > 0$.

Definição 6.32. Duas medidas com sinal ν e μ em $(X, \mathcal{M})$ são mutualmente singulares se existirem subconjuntos disjuntos A e B em $\mathcal{M}$ tal que

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{e} \quad \mu(E) = \mu(E \cap B) \quad \text{para todo} \ \ E \in \mathcal{M}.$$

Portanto, ν e μ são suportadas em subconjuntos disjuntos. Usamos o símbolo $\nu \perp \mu$ para denotar o fato de que as medidas são mutualmente singulares.

Definição 6.33. Se ν é uma medida com sinal e μ é uma medida (positiva) em $\mathcal{M}$, dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ se

$$\nu(E) = 0 \quad \text{sempre que } E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) = 0.$$

Usamos o símbolo $\nu \ll \mu$ para indicar que ν é absolutamente contínua com respeito a μ.

Assim, da definição, se ν tem suporte em um conjunto A, então A deve ser uma parte essencial do suporte de μ no sentido de que $\mu(A) > 0$.

Exemplo 6.34. Se $f \in L^1(X,\mu)$ ou f é integrável com $\int f^- < \infty$ e $\int f^+ = \infty$ então o sinal da medida, definido por

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \tag{6.3}$$

é absolutamente contínua com respeito a μ. Claramente, pois se $\mu(E) = 0$ então $\nu(E) = \int_E f d\mu = 0$.

Iremos usar a notação $dv = f d\mu$ para indicar que ν é definido por (6.3) Para provar o Teorema de Radon-Nikodym, vamos utilizar o Teorema da Representação de Riesz que será enunciado abaixo.

Definição 6.35. Um funcional linear ℓ é uma transformação linear. $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 6.36 (Representação de Riesz)**.** *Seja ℓ um funcional linear contínuo num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, existe um único $g \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\ell(f) = (f,g) \quad \textit{para todo } f \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|\ell\| = \|g\|$.

Demonstração. A demonstração pode ser acessada em [13] p. 182–183. □

Teorema 6.37 (Radon-Nikodym)**.** *Suponha que μ é uma medida positiva σ-finita no espaço de medida $(X, \mathcal{M})$ e ν uma medida com sinal σ-finita em $\mathcal{M}$. Então existem medidas com sinal únicas ν_a e ν_s em $\mathcal{M}$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$. Além disso, a medida ν_a assume a forma $d\nu_a = f\, d\mu$; isto é,*

$$\nu_a(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

para alguma função f estendida μ-integrável.

Demonstração. Começemos com o caso em que ν e μ são positivas e finitas. Seja $\rho = \nu + \mu$ e considere a transformação em $L^2(X,\rho)$ definida por

$$\ell(\psi) = \int_X \psi(x) d\nu(x).$$

A função acima define um funcional linear em $L^2(X,\rho)$, assim aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz 3.36, obtemos

$$|\ell(\psi)| \leq \int_X |\psi(x)| d\nu(x) \leq \int_X |\psi(x)| d\rho(x) \leq (\rho(X))^{1/2} \left(\int_X |\psi(x)|^2 d\rho(x) \right)^{1/2}.$$

Onde a segunda desigualdade vem de $\rho \geq \nu$. Desde que L^2 seja uma espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riez 6.36, existe $g \in L^2(X, \rho)$ tal que

$$\int_X \psi(x) d\nu(x) = \int_X \psi(x) g(x) d\rho(x) \tag{6.4}$$

para todo $\psi \in L^2(X, \rho)$. Se $E \in \mathcal{M}$, com $\rho(E) > 0$, quando tomamos $\psi = \chi_E$ em (6.4) obtemos

$$\nu(E) = \int_E g(x) d\rho(x).$$

Como $\nu(E) \leq \rho(E)$, temos

$$0 \leq \int_E g(x) d\rho(x) \leq \rho(E).$$

Dado que $\rho(E) > 0$, então

$$0 \leq \frac{1}{\rho(E)} \int_E g(x) d\rho(x) \leq 1.$$

Com isso, observamos que $0 \leq \int_E g(x) d\rho(x)$ para qualquer conjunto $E \in \mathcal{M}$, e então $g(x) \geq 0$ em quase todo lugar. Além disso, $\int_E (1 - g(x)) d\rho(x) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ Logo, $1 - g(x) \geq 0$, concluindo, assim, que $g(x) \leq 1$. Dessa forma, podemos assumir que

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

para todo x que satisfaz (6.4). Sendo assim, observe que

$$\begin{aligned} \int \psi(x) d\nu(x) &= \int \psi(x) g(x) d\rho(x) \\ &= \int \psi(x) g(x) d(\mu + \nu)(x) \\ &= \int \psi(x) g(x) d\mu + \int \psi(x) g(x) d\nu. \end{aligned}$$

Em vista disso, podemos afirmar que

$$\int \psi(1 - g) d\nu = \int \psi g \; d\mu. \tag{6.5}$$

Agora, considere os dois conjuntos

$$A = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

E defina duas medidas ν_a e ν_s em $\mathcal{M}$ por

$$\nu_a(E) = \nu(A \cap E) \quad \text{e} \quad \nu_s(E) = \nu(B \cap E).$$

Note que $\nu_s \perp \mu$, pois quando $\psi = \chi_B$ em (6.5), conseguimos afirmar que

$$\int_B 0 d\nu = \int \chi_B \cdot 1 d\mu = \mu(B)$$

Isso conclui que $\nu_s \perp \mu$. Agora, mostraremos que $\nu_a \ll \mu$. Seja $\psi = \chi_E(1 + g + \cdots + g^n)$ em (6.5) temos

$$\int_E g \cdot (1 + \cdots + g^n) d\mu = \int_E (1-g)(1 + g + \cdots + g^n) d\nu \tag{6.6}$$

$$= \int_E (1 - g^{n+1}) d\nu. \tag{6.7}$$

Se $x \in B$ então $(1 - g^{n+1})(x) = 0$ e se $x \in A$ $(1 - g^{n+1}) \to 1$, assim pelo teorema da convergência dominada, uma vez que $1 - g^{n+1}(x) \leq \chi_A$, (6.7) converge para

$$\int_E \lim (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_E \chi_A d\nu = \nu(A \cap E) = \nu_a(E).$$

Além disso, uma vez que $g(x) < 1$ para $x \in A$, $1 + g + g^2 + \cdots + g^n + \ldots$ converge para $\dfrac{1}{1-g}$, e (6.6) converge para $\displaystyle\int_E \frac{g}{1-g} d\mu$ então,

$$\nu(A \cap E) = \int_E \frac{g}{1-g} d\mu.$$

Daí, $\nu_a(E) = \displaystyle\int_E f d\mu$ onde $f = \dfrac{g}{1-g}$. Em virtude disso, se $\mu(E) = 0$ então $\nu_a(E) = 0$. Isso prova que $\nu_a \ll \mu$. Ademais, note que $f \in L^1(X, \mu)$, pois $\nu_a(X) \leq \nu(X) < \infty$.. Finalmente, $\nu_a(E) + \nu_s(E) = \nu(E)$ pois

$$\begin{aligned} \nu_a(E) + \nu_s(E) &= \nu(A \cap E) + \nu(B \cap E) \\ &= \nu((A \cup B) \cap E) \\ &= \nu(E). \end{aligned}$$

Agora passaremos ao caso geral, supondo que μ e ν são σ-finitas e positivas. Sendo σ-finitas podemos encontrar conjuntos $E_j \subset \mathcal{M}$ disjuntos tais que

$$X = \bigcup_j E_j, \quad \mu(E_j) < \infty \quad \text{e} \quad \nu(E_j) < \infty \quad \forall j.$$

E podemos definir as medidas positivas em $\mathcal{M}$ por

$$\mu_j(E) = \mu(E \cap E_j) \quad \text{e} \quad \nu_j(E) = \nu(E \cap E_j).$$

Daí, para cada j, pelo caso anterior podemos escrever

$$\nu_j = \nu_{j,a} + \nu_{j,s} \quad \text{onde} \quad \nu_{j,s} \perp \mu_j \quad \text{e} \quad d\nu_{j,a} = f_j d\mu_j.$$

Dessa forma, basta definirmos

$$f = \sum f_j, \quad \nu_s = \sum_j \nu_{j,s} \quad \text{e} \quad \nu_a = \sum_j \nu_{j,a}.$$

De fato $\nu = \nu_s + \nu_a$, pois

$$\begin{aligned}
\nu(E) = \nu(E \cap X) &= \nu\left(E \cap \left(\bigcup_j E_j\right)\right) \\
&= \bigcup_j \nu(E \cap E_j) \\
&= \sum_j \nu(E \cap E_j) \\
&= \sum_j \nu_j(E) \\
&= \sum_j (\nu_{j,a}(E) + \nu_{j,s}(E)) \\
&= \sum_j \nu_{j,a}(E) + \sum_j \nu_{j,s}(E) \\
&= \nu_a(E) + \nu_s(E).
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que $\nu_a \ll \mu$. Para provar isso, primeiramente perceba que para cada j sabemos que $\nu_{j,a} \ll \mu$, assim usando o Teorema da Convergência Monótona 3.15.2, uma vez que $f_j \geq 0$

$$\nu_a(E) = \sum_j \nu_{j,a}(E) = \sum_j \int_{E \cap E_j} f_j d\mu = \int_E \left(\sum_j f_j\right) d\mu = \int_E f d\mu.$$

Isso mostra que $\nu_a \ll \mu$. Para mostrar que $\nu_s \perp \mu$, ou seja, que ν_s e μ são medidas suportadas em conjuntos disjuntos. Primeiro devemos ver que para cada j, existe $B_j \subset E_j$ com $B_j \in \mathcal{M}$ tal que $\mu_j(B_j) = 0$ e $\nu_{j,s}(B_j^c) = 0$. Com isso, definindo $B = \bigcup_j B_j$ uma vez que $\bigcup E_j$ é disjunta então $\bigcup B_j$ também o é. Definindo assim, mostraremos que $\mu(B) = 0$ e $\nu_s(B^c) = 0$. De fato $\mu(B) = 0$, porque

$$\mu(B) = \mu\left(\sum_j B_j\right) = \sum_j \mu(B_j) = 0.$$

Para provar a segunda parte, vejamos que $B^c = \bigcap_j B_j^c$. Como B^c é a interseção de todos os B_j^c, ele deve ser um subconjunto de cada um. Em particular, para um j fixo, temos $B^c \subseteq B_j^c$. Pela propriedade de monotonicidade da medida $\nu_{j,s}$, se $B^c \subseteq B_j^c$, então $0 \leq \nu_{j,s}(B^c) \leq \nu_{j,s}(B_j^c)$. Da premissa inicial, sabemos que $\nu_{j,s}(B_j^c) = 0$. Portanto,

$\nu_{j,s}(B^c) = 0$. Visto que isto vale para todo j, concluimos que $\nu_s(B^c) = \sum_j 0 = 0$, isso completa a prova de que $\nu_s \perp \mu$. Por fim, provaremos a unicidade. Para isso suponha que existe outra ν'_a e ν'_s tais que $\nu = \nu'_a + \nu'_s$, $\nu'_a \ll \mu$ e $\nu'_s \perp \mu$. Assim sendo,

$$\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$$

o lado esquerdo é uma medida absolutamente contínua com respeito a μ e o lado direito é uma medida singular com respeito a μ. Com isso, defina $\lambda = \nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$. λ é singular em relação a μ, sendo singular, existe $C \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(C) = 0$ e $\lambda(C^c) = 0$ e como λ é absolutamente contínua em relação a μ e $\mu(C) = 0$ então $\lambda(C) = 0$. Diante disso, veja que para qualquer conjunto $E \in \mathcal{M}$

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap C) + \lambda(E \cap C^c) = 0.$$

Logo, $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$. Segue daí que $\nu_a = \nu'_a$ e $\nu_s = \nu'_s$. E isso conclui a prova.

$\square$

7

Apêndice

7.1 $W^{1,p}(I)$ e funções absolutamente contínuas

Aqui, denotaremos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ = o espaço de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}^d$ com suporte compacto e por C^k o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis e C^∞ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com todas as derivadas contínuas.

Neste apêndice iremos fazer uma aplicação do teorema 4.35, neste teorema vimos que as funções que satisfazem o Teorema Fundamental do Cálculo são as funções absolutamente contínuas, aqui pretendemos mostrar que toda função pertencente ao espaço $W^{1,p}(I)$, chamado Espaço de Sobolev, admite uma função absolutamente contínua na sua classe de equivalência. Assim sendo, iremos começar definindo elementos importantes para esse objetivo e enunciando alguns resultados adequados.

Definição 7.1. Definição Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$ definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

Proposição 7.2. *Seja (f_n) uma sequência em L^p e seja $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ em quase todo ponto em Ω;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k, em quase todo ponto em Ω.

Demonstração. A demonstração para esse fato pode ser encontrada em [3] p. 94–95. □

Definição 7.3. Uma sequência de mollifiers $(\rho_n)_{n\geq 1}$ é qualquer sequência de funções em $\mathbb{R}^d$ tal que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp}\ \rho_n \subset \overline{B(0,1/n)}, \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^d.$$

Teorema 7.4. *Assuma que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ com $1 \leq p < \infty$. Então $(\rho_n * f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [3] P. 109. □

Corolário 7.4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega uf\,dx = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ em quase todo ponto em Ω.

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uma função tal que $\operatorname{supp} g$ é compacto contido em Ω. Definimos $g_n = \rho_n * g$, temos: $g_n \in C_c^\infty$ desde que n seja suficientemente grande. Dessa maneira, $\int ug_n = 0$ para todo n. Uma vez que $g_n \to g$, pelo teorema anterior, podemos então pela Proposição 7.2 passar para subsequência, de modo que $g_n(x) \to g(x) \quad$ em $\mathbb{R}^d$. Além disso, temos $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. Supondo a convergência monótona e passando o limite, concluimos que $\displaystyle\int u \cdot g = 0$. Sendo K compacto, escolhemos g tal que

$$g = \begin{cases} \text{sgn } u & \text{em } K \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^d \setminus K \end{cases}$$

onde

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \\ -1, & \text{se } u < 0 \end{cases}$$

Daí,

$$0 = \int u \cdot g = \int_K u \cdot g + \int_{\mathbb{R}^d \setminus K} u \cdot g = \int_K u \cdot g = \int_K |u|.$$

Portanto, $u = 0$ em quase todo lugar em K, uma vez que isso acontece para qualquer compacto, concluimos que $u = 0$ em quase todo lugar em Ω. □

Seja $I = (a,b)$ um intervalo aberto, podendo ser ilimitado, e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 7.5. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido como

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Exemplo 7.6. A função $u(x) = |x|$ pertence a $W^{1,p}$. De fato, para ver isso provemos os itens abaixo.

- $u \in L^p$:

$$\int_{-1}^{1} |u|^p = \int_{-1}^{0} |x|^p + \int_{0}^{1} |x|^p = \frac{(-1)^p}{p+1} + \frac{1}{p+1} < \infty.$$

Portanto, $|u|^p \in L^1$, o que implica $u \in L^p$.

- $g(x) = u'(x) \in L^p$:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |g|^p &= \int_{-1}^{0} |g(x)|^p \, dx + \int_{0}^{1} |g(x)|^p \, dx \\ &= \int_{-1}^{0} (-1)^p \, dx + \int_{0}^{1} 1^p \, dx < 2 < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $g \in L^p$.

- $\displaystyle\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x) \, dx = \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x) \, dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x) \, dx.$$

Fazendo por partes, $\displaystyle\int ab' = ab - \int a'b$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x) \, dx &= [-x\varphi(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x) \, dx + [x\varphi(x)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= (0 - (1)\varphi(-1)) + \int_{-1}^{0} \varphi(x) \, dx + (1 \cdot \varphi(1) - 0) - \int_{0}^{1} \varphi(x) \, dx \\ &= \cancel{-\varphi(-1)} + \int_{-1}^{0} \varphi(x) \, dx + \cancel{\varphi(1)} - \int_{0}^{1} \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^{0} g(x)\varphi(x) \, dx - \int_{0}^{1} g(x)\varphi(x) \, dx \\ &= -\int_{-1}^{1} g \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Portanto, $u(x) = |x| \in W^{1,p}$.

Lema 7.7. *Seja $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que $\int_I f\varphi' = 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Então existe uma constante c tal que $f = c$ em quase todo ponto pertencente a I.*

Demonstração. Fixe $\psi \in C_c(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$, para qualquer função $w \in C_c(I)$ defina

$$h = w - \left(\int_I w\right)\psi.$$

Note que h é contínua com suporte compacto e

$$\begin{aligned}
\int_I h &= \int_I \left[w - \psi\left(\int_I w\right)\right] \\
&= \int_I w - \int_I \psi\left(\int_I w\right) \\
&= \int_I w - \left(\int_I w\right)\int_I \psi \\
&= \int_I w - \left(\int_I w\right)\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 4.37 existe uma primitiva com suporte compacto, isto é, existe $\varphi' \in C_c^1$ tal que $\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi$. Substituindo φ' na hipótese obtemos $\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0$. Mas,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_I (fw - f\cdot\psi\cdot\int_I w) \\
&= \int_I fw - \int_I \left[f\cdot\psi\cdot\left(\int_I w\right)\right] \\
&= \int_I fw - \left(\int_I w\right)\left(\int_I f\cdot\psi\right) \\
&= \int_I fw - \int_I w\left(\int_I f\psi\right) \\
&= \int_I \left[fw - w\left(\int_I f\psi\right)\right] \\
&= \int_I w\left(f - \int_I f\psi\right).
\end{aligned}$$

Dessa maneira concluímos que $\int_I w\left(f - \int_I f\psi\right) = 0$ para qualquer função $w \in C_c(I)$, usando o resultado 7.4.1 obtemos $f - \int_I f\psi = 0$, sendo $c = \int_I f\psi$ o lema está provado. □

Iremos enunciar o Teorema de Fubini para demonstrar o Lema 7.9.

Teorema 7.8 (Fubini)**.** *Sejam* $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ *dois espaços de medida* σ*-finitos. Pode-se definir de maneira padrão a estrutura de espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *no produto Cartesiano* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$*. Assuma que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Então, para quase todo ponto* $x \in \Omega_1$*,* $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *e* $\int_{\Omega_2} F(x,y)\,d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$*. Similarmente, para q.t.* $y \in \Omega_2$*,* $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *e* $\int_{\Omega_1} F(x,y)\,d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$*. Além disso, tem-se*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)\,d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)\,d\mu_1 = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,d\mu_1 d\mu_2.$$

Lema 7.9. *Seja $g \in L^1_{loc}(I)$; para y_0 fixo em I, defina*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Então $v \in C(I)$ e

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Demonstração. Suponhamos $I = [a, b]$, assim, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx = \int_a^b \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx \\
&= \int_a^{y_0} \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^{b} \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx \\
&= \underbrace{-\int_a^{y_0} \left[\int_{x}^{y_0} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{y_0}^{b} \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right] \varphi'(x)dx}_{\text{(II)}}.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, note que em (I) temos $x \leq t < y_0$ e $a \leq x \leq y_0$, com isso t varia de a até y_0 e para cada valor de t, x varia de a até t. Analogamente para (II), temos $y_0 \leq t \leq x \leq b$, daí $y_0 \leq t \leq b$ e para cada valor de t temos $t \leq x \leq b$. Dessa forma, usando o Teorema de Fubini

$$\int_I v\varphi' = -\int_a^{y_0} \left(\int_a^{t} g(t)\varphi'(x)dx\right) dt + \int_{y_0}^{b} \left(\int_t^{b} g(t)\varphi'(x)dx\right) dt.$$

Uma vez que a função $\varphi \in C_c^\infty$. Obtemos, então

$$= -\int_a^{y_0} g(t)(\varphi(t) - \varphi(a))dt + \int_{y_0}^{b} g(t)(\varphi(t) - \varphi(b))dt.$$

E, desde que o suporte de φ está no interior de $[a, b]$ então $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Com isso,

$$\int_a^b v\varphi' = -\int_a^{y_0} g(t)\varphi(t)dt + \int_{y_0}^{b} g(t)\varphi(t)dt = \int_a^b g(t)\varphi(t)dt.$$

□

Teorema 7.10. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e I sendo um intervalo limitado ou ilimitado, então existe uma função $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$u(x) = \tilde{u}(x) \quad \text{em quase todo ponto pertencente a } I$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \bar{I}$$

Observação 7.11. Primeiro, façamos algumas observações acerca desse teorema. São elas:

1) Se $u \in W^{1,p}$, então todas as funções v, tais que $v = u$ em quase todo lugar em I, também pertencem a $W^{1,p}$.

2) O teorema afirma que cada função $u \in W^{1,p}$ admite um representante contínuo em $\bar{I}$, ou seja, existe uma função absolutamente contínua em $\bar{I}$ que pertence à classe de equivalência de u.

3) Esse teorema é útil, pois, embora as funções u possam ter "saltos" e não satisfazer o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos encontrar outra função na sua classe de equivalência que é "mais" "bem comportada".

Agora, passemos à demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 7.10. Fixe $y_0 \in I$ e seja $\tilde{u}(x) := \displaystyle\int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Pelo lema, obtemos

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Assim,

$$\int_I (u-\bar{u})\varphi' = -\int_I u'\varphi - \left(-\int_I u'\varphi\right) = -\int_I u'\varphi + \int_I u'\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Logo, $u - \bar{u} = C$, assim definindo $\tilde{u} = \bar{u} + C$ então $\tilde{u} = u$ em quase todo ponto em I e note que

$$\tilde{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt + C \quad \text{e} \quad \tilde{u}(y) = \int_{y_0}^{y} u'(t)dt + C.$$

Dessa maneira,

$$\tilde{\tilde{u}}(x) - \tilde{\tilde{u}}(y) = \int_y^x u'(t)dt$$

como queríamos mostrar. $\square$

8

Considerações finais

Neste estudo, desenvolvemos a teoria da medida e integração de Lebesgue e, em seguida, generalizamos para um contexto abstrato que culminou na demonstração do Teorema de Radon-Nikodym. Foram introduzidos conceitos da Análise Real, como a diferenciação de funções de variação limitada e a continuidade absoluta, que serviram como base para reexaminar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Notamos que, a integral de Riemann é um caso particular da integral de Lebesgue quando as funções estão definidas em compactos. Assim sendo, é natural que a integral de Lebesgue abranja uma classe maior de funções, conforme foi exibido no texto existem funções que são integráveis á Lebesgue e não são integráveis à Riemann.

Além disso, foi observado que embora a abordagem de Lebesgue tenha sido uma revolução em relação às formulações anteriores, sua generalização axiomática por Carathéodory permitiu sua aplicação em contextos além do espaço euclidiano.

Hoje em dia, a teoria da medida é fundamental para diversas áreas de investigação e aplicação, como a Teoria da Probabilidade, a Análise Funcional e a teoria de Equações Diferenciais Parciais. Assim, o avanço da teoria da medida deu oportunidade para novas pesquisas e aplicações, consolidando sua importância na matemática moderna.

Referências

[1] BOREL, Émile. Sur quelques points de la théorie des fonctions. **Annales scientifiques de l'École normale supérieure**, 1895. p. 9-55.

[2] BOREL, Émile. **Leçons sur la théorie des fonctions**. Gauthier-Villars et fils, 1914.

[3] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[4] CARATHÉODORY, Constantin. **Vorlesungen über Reelle Funktionen**. [S. l.]: 1918. Disponível em: <https://books.google.com/books?id=9rJXAAAAYAAJ>. Acesso em: 20 out. 2025.

[5] CAUCHY, Augustin Louis. **Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal**. Paris: A Paris: de l'Imprimerie Royale chez Debure Frères, 1823.

[6] DARBOUX, Gaston. Mémoire sur les fonctions discontinues. **Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série**, Paris, v. 4, p. 57-112, 1875.

[7] HARDY, Godfrey Harold; LITTLEWOOD, John Edensor. A maximal theorem with function-theoretic applications. **Acta Mathematica**, v. 54, n. 1, p. 81-116, 1930.

[8] LEBESGUE, Henri. **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**. American Mathematical Soc., 2003.

[9] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Godfrey Harold Hardy's pictures. In: MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hardy/pictdisplay/>. Acesso em: 8 ago. 2025.

[10] PESIN, Ivan N. **Classical and Modern Integration Theories**. New York: Academic Press, 1970. (Probability and Mathematical Statistics: A Series of Monographs and Textbooks).

[11] RIEMANN, Bernhard. **Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass**. BG Teubner, 1876.

[12] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. **Real Analysis**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010.

[13] STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. **Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces**. Princeton University Press, 2009.

[14] VITALI, Giuseppe. Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta: Nota. **Tip. Gamberini e Parmeggiani**, 1905.

[15] WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. **Émile Borel**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel>. Acesso em: 8 ago. 2025.

[16] WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. **Henri Lebesgue**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue>. Acesso em: 8 ago. 2025.

[17] WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. **John Edensor Littlewood**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Edensor_Littlewood>. Acesso em: 8 ago. 2025.

[18] WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. **Giuseppe Vitali**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Vitali>. Acesso em: 8 ago. 2025.