



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Gabriel Santos Evangelista

Tem uma cifra na minha combinatória

Recife - PE
Agosto de 2022

Tem uma cifra na minha combinatória

Gabriel Santos Evangelista

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti

Recife - PE
Agosto de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

E92t

Evangelista, Gabriel Santos

Tem uma cifra na minha combinatória / Gabriel Santos Evangelista. - 2022.
57 f. : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
Inclui referências e apêndice(s).

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2023.

1. Educação. 2. Modelagem matemática. 3. Criptografia. 4. Braille. 5. Interdisciplinaridade. I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título

CDD 510

Gabriel Santos Evangelista

Tem uma cifra na minha combinatória

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 10/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Anete Soares Cavalcanti (Orientadora)
Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE

Maria Angela Vasconcelos de Almeida
Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE

Wanderson Aleksander da Silva Oliveira
Universidade Federal Rural de Pernambuco- UFRPE

Recife - PE
Agosto de 2022

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus e aos meus familiares que me apoiaram nessa jornada até aqui. Aos meus amigos que estiveram ao meu lado e aguentaram eu falar sobre a monografia, a faculdade e sobre a minha vida. Não conseguiria nada sem vocês. Agradeço a uma pessoa especial que pediu para não ser citada aqui, saiba que seu apoio foi fundamental para eu conseguir chegar até aqui. É uma conquista nossa. A Escola de Referência em Ensino Médio Padre Osmar Novaes, por ter me aceito a realizar o estágio supervisionado e me acolhido como um membro docente da escola, a todos os professores e colaboradores os meus sinceros agradecimentos. Agradeço também a minha orientadora Anete Soares Cavalcanti que aceitou e me ajudou a fazer esse projeto. A todos que estiveram comigo nessa jornada, um muito obrigado.

Resumo

Vemos códigos todos os nossos dias, nossa escrita é toda cercada desses códigos e sempre com a intenção de se passar uma certa mensagem. Mas nem sempre queremos que essa mensagem seja compreendida por todas as pessoas. Para esse fim, temos formas de esconder essa mensagem de modo que somente as pessoas que queremos a entendam. Uma forma de se fazer isso é se utilizar da Criptografia. A atividade a ser trabalhada tem como objetivo o estudo da Análise Combinatória utilizando da Criptografia como recurso didático, fazendo a ponte entre o conhecimento do objeto de estudo com o conhecimento matemático. Esse recurso, será trabalhado dentro de uma Sequência Didática, onde nas suas etapas, serão explorados essa relação objeto-matemática, vemos a possibilidade de se trabalhar de forma inclusiva, trazendo mais voz para a escrita em Braille. Com esse destaque, o debate acaba não sendo apenas no ambiente matemático, trazendo então outras disciplinas para participarem e serem auxiliares para a formação desse conhecimento matemático e social.

Palavras-Chave: Educação, Modelagem Matemática, Criptografia, Braille, Interdisciplinaridade.

Abstract

We see codes everyday, our writing is all surrounded by these codes and always with the intention of conveying a certain message. But we are not always that this will be understood for everybody. Towards this end, we have ways to hide this message from only those that we want. One way to do this is to use Cryptography. The activity to be worked on aims to study Combinatorial Analysis using Cryptography as a didactic resource, bridging the gap between the knowledge of the object of study and mathematical knowledge. This resource would be worked within a *Didactic Sequence*, where in its steps, exploring this object-mathematics relationship, we see the possibility of working in an inclusive way, bringing more voice to Braille writing system. With this emphasis, the debate ends up escaping the mathematical environment, bringing other courses to participate in the debate and to be auxiliaries for the formation of this mathematical and social knowledge.

Key-Words: Education, Mathematical Modeling, Cryptography, Braille, Interdisciplinary.

Lista de Figuras

1.1 O Alfabeto em Braille como proposto pelo Louis Braille	15
2.1 Visualizando a Cifra de César com uma chave $n=5$	20
2.2 As séries da ordem Braille	28
2.3 O Alfabeto em Braille	31
2.4 Caracteres especiais da língua portuguesa	32
2.5 Símbolos exclusivos do Braille	32
3.1 Registro de um dos grupos	37
3.2 Outra resolução dos alunos a cerca da atividade	37
3.3 Apresentação do problema	39
3.4 Resolução da Questão 1 do aluno 01	40
3.5 Resolução da Questão 2 do aluno 02	40
3.6 Resolução da Questão 3 do aluno 01	41
3.7 Resolução da Questão 4 do aluno 02	41
3.8 Gráfico de acerto dos alunos	43

Sumário

Introdução	9
1 Uma espiada nos bastidores da Sequência Didática	10
1.1 A Criptografia como um modelo matemático	12
1.2 A Cifra de César	13
1.3 Um novo problema	14
1.4 O diálogo do Braille para além da matemática	15
1.4.1 Por que o Braille?	16
1.5 A interação com as outras disciplinas	17
1.6 A interdisciplinaridade na Sequência Didática	17
2 Proposta de Sequência Didática	19
2.1 Etapa 01: A familiarização da Cifra de César	19
2.2 Etapa 02: Enraizando conceitos	23
2.2.1 As questões formuladas para o exercício	26
2.3 Etapa 03: Partindo do Braille, chegando na combinação	27
2.4 Etapa 04	30
2.5 Um esquema reduzido para a Sequência Didática	33
3 Um relato sobre a vivência da Sequência Didática em sala de aula	36
3.1 Sobre a aplicação da Sequência	36
3.2 Estudo estatístico/ Avaliação de Aprendizagem	42
3.3 Opinião geral da participação dos discentes	43
Considerações Finais	45
Referências Bibliográficas	45

A Frases utilizadas na atividade	48
B Ficha de registro Atividade 1	50
C Ficha de registro da atividade avaliativa	53
D Ficha de registro da atividade avaliativa em grupo	56

Introdução

“Ser um bom professor”. Como todo profissional, sempre buscamos ser bons no que fazemos. Escolhemos a licenciatura porque queremos ser bons professores de matemática. Mas o que faz o professor ser um bom professor? Seria um bom professor aquele professor ríspido que cobra que você resolva tudo do jeito que ele ensinou? Seria aquele professor que não passa prova e não cobra nada do aluno? Seria o professor que dá aula só por dar aula? Segundo D’Ambrosio (2012) [1], um bom professor se caracteriza nas qualidades emocionais, políticas e de conhecimento. Não saber pelo saber, mas saber passar esse conhecimento. Quando nos voltamos a nossa prática docente, pensamos em como vamos trabalhar o conhecimento matemático de uma forma onde trabalhamos o nosso papel como cidadão. Ainda segundo D’Ambrosio (2012) [1], a educação é um ato político e essencial para a formação do cidadão, fazendo com que o papel do professor não seja apenas passar o conteúdo, mas também relacionar ele com o mundo atual. É pensando nisso que desenvolvemos esse trabalho para o ensino da Análise Combinatória, trazendo a relação entre ela e conceitos de criptografia. O nosso objetivo então é buscar uma forma de se trabalhar matemática, onde o aluno consiga entender o conteúdo sem que a aula seja trabalhada de uma forma tradicional e que o mesmo consiga compreender os conceitos que regem o estudo da Análise Combinatória. Para isso, primeiramente, vamos falar sobre que nos motivou a trabalhar e desenvolver uma atividade que além de falar de matemática dialoga com outras disciplinas. Depois, destrinchar ainda mais o nosso modelo matemático. O que é a Cifra de César? O que faz do Braille tão especial? Por que falar de Braille? Respondida as perguntas, trazemos a nossa proposta de Sequência Didática em sua totalidade, mostrando detalhes sobre cada uma das etapas. E finalizamos dando a nossa opinião e mostrando como se deu a aplicação dessa atividade numa Escola da região metropolitana do Recife.

Capítulo 1

Uma espiada nos bastidores da Sequência Didática

“Por que estudar matemática?” Talvez essa seja uma das perguntas que mais escutamos quando estamos em sala de aula e, muita das vezes, não sabemos responder. O estudo da matemática tem sua importância para a formação do raciocínio lógico no aluno, bem como a capacidade de resolver problemas. Vemos que, a matemática se encontra em tudo em que interagimos, seja na ida ao mercado, no lançamento de uma bola, na velocidade do carro, num jogo de cartas, etc. Tudo com o que interagimos pode ser modelado numa linguagem matemática e cabe ao professor buscar trabalhar esse conteúdos que se ocultam no dia a dia. Mas por qual motivo ainda assim a matemática é tão odiada pelos alunos? Bem, o que cerca discussão seria conteúdo para um outro trabalho, com isso não é o centro da nossa discussão. Contudo, a partir dessa pergunta vamos fazer uma que tentaremos responder no decorrer do trabalho, “como deixar a aula de matemática menos odiada?”

Vamos começar. Para isso, iremos precisar de um plano de ação. Queremos então uma série de atividades sequenciadas que sejam articuladas para o mesmo objetivo, ou seja, uma Sequência Didática (SD) seguindo a visão de Zabala (1998)[10]. Onde, o mesmo afirma que uma sequência didática é definida como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”(1998, p.24)[10]. Logo nos surge uma outra pergunta, “Por que utilizar de uma SD?” A resposta para isso é bem simples, a organização e a possibilidade de trabalhar de maneiras didá-

ticas diferentes, conteúdos matemáticos. Apesar da matemática ser uma ciência exata, ensinar matemática não é, então devemos sempre nos questionar sobre a forma como trabalhamos essa matemática em sala de aula. Quando olhamos para uma aula, vemos que os conteúdos algébricos são bem mais trabalhados pelos professores que os geométricos e estatístico. Isso pode ser visto até mesmo pela forma em que o livro didático aborda esses outros conteúdos, colocando-os para os últimos capítulos, ocasionando as vezes na não abordagem dos mesmos nas aulas de matemática pelo professor. Para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], para a formação discente, os conteúdos algébricos são apenas uma das áreas que devem ser abordadas durante a aula de matemática. Ainda pela BNCC [2], o professor deve buscar trabalhar esses conteúdos de forma em que os relacionem com o cotidiano. Dessa forma, a importância de se estudar todas as áreas da matemática. Então, nosso plano de ação tem o objetivo de se trabalhar com esses conteúdos pouco abordados, sendo especificamente o estudo da Análise Combinatória. Com isso em mente, vamos estruturar nossa SD, de modo que o conteúdo não é visto de uma forma tradicional, mas sim utilizando de modelos matemáticos para a construção do conhecimento. Devemos então, nos fazer uma pergunta que o próprio Zabala (1998) [10] faz para a estruturação da Sequência Didática, “O que pretendemos abordar é apropriado para o que queremos ensinar?” A resposta vem de encontro com a que propomos trazer com a colocação que norteia o nosso trabalho, temos agora um ponto de partida. Se buscamos então trabalhar de uma forma não tradicional, nos vem a seguinte pergunta. Qual a melhor forma para se abordar Análise Combinatória? Para a resposta dessa pergunta, nossa intenção é fazer com que o aluno tenha a participação direta com o conteúdo, alcançando as competências esperadas e observando que a medida que ele vai sendo capaz de resolver os problemas propostos, ele note que o aprendizado gerado possui um diálogo para além da nossa disciplina. Portanto, temos a ideia de como vai ficar a nossa SD, trazer em uma série de etapas, atividades que realizem o diálogo entre a Criptografia, mais especificamente as cifras, com a Análise Combinatória gerando, durante a realização dessas atividades, uma interação com outras disciplinas da grade curricular do aluno. Além disso, o trabalho também vem buscar um desenvolvimento social, fazendo com que o aluno, através do desenvolvimento das etapas metodológicas, comece a questionar as ações sociais necessárias para a acessibilidade para pessoas que as necessitam. Devemos começar então descrevendo os objetos que incorporam o corpo da nossa SD.

1.1 A Criptografia como um modelo matemático

A escrita é uma das maiores invenções da humanidade. O registro de uma mensagem é uma necessidade constante, seja ela num papel, numa parede, em uma casca de árvore ou em uma pedra. A escrita se torna um marco em uma civilização e deixa um registro histórico para que possa ser estudado e apreciado no futuro. Mas nem sempre na história, uma mensagem escrita tinha a intenção de que muitas pessoas a pudessem ler. O autor Singh (1999) [14] conta em seu livro uma das histórias que traz um pouco da origem da criptografia. Nessa história, será que Histieus tinha a intenção de que sua mensagem transmitida a Aristágoras de Mileto fosse lida por outras pessoas? Obviamente que não. A mensagem foi escrita então no couro cabeludo de um escravo e só foi lida quando rasparam a cabeça do mensageiro. Esse tipo de ocultação de mensagem se denomina esteganografia, tendo sua origem do grego vindo das palavras *steganós* (oculto) e *graphein* (escrita), sendo a forma de se ocultar uma mensagem dentro de um meio. Contudo, embora engenhoso, esse método acaba sendo muito frágil, tendo a capacidade de ser descoberto muito facilmente. Visto esse problema, foi se observado a necessidade de um novo método, agora a mensagem não é apenas ocultada, mas também cifrada para dificultar a sua descoberta. A Criptografia tem sua origem do grego nas palavras *Kryptos* (escondida) e *graphein* (escrita), é a arte de se esconder uma palavra, ou mensagem, através da escrita onde ninguém mais que os recipientes (remetente e destinatário) sejam capazes de saber o real sentido do que foi enviado.

A Criptografia tem uma grande importância para a atualidade, o seu uso se tornou algo comum no mundo em que vivemos. Seja em grandes corporações, em transferências bancárias, até mesmo para o envio de mensagens. A criptografia é a principal forma de se assegurar uma privacidade nas redes. Por conta disso, a utilização dela, em sala de aula, pode ter um papel fundamental para se trabalhar temas que envolvam matemática, pois a construção dessas criptografias possuem grandes influências em conteúdos matemáticos. Para o desenvolvimento deste trabalho, a Criptografia foi vista como um modelo matemático para a Análise Combinatória, nessa construção pode ser vista em toda a dinâmica da modelagem matemática descrita por Biembengut (1999) [11]. Segundo a autora, a modelagem matemática pode despertar no aluno o interesse em tópicos matemáticos que o mesmo ainda desconhece, dando a oportunidade da interação do mesmo com a situação-problema desenvolvendo o seu senso crítico. Ainda na visão de Biembengut:

A modelagem matemática é, assim uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. Genericamente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir (1999, p.12).

Com isso, vamos utilizar a Cifra de César, que traremos a sua definição posteriormente, como o nosso modelo. A autora ainda cita que quando já temos ideia do que é o nosso objeto de estudo, e iniciamos a nossa interação com o modelo é dada partida no processo de nos familiarizarmos com o mesmo. Essa familiarização vai ao encontro com o que é proposto por Polya (1975) [12] onde o mesmo fala que aos poucos, a medida em que vamos interagindo com esses problemas vão surgindo as respostas das seguintes perguntas “por onde podemos começar?” e “o que podemos fazer?”. Trazendo para o nosso contexto do modelo, podemos adaptar essas nossas perguntas para “como começar a sua introdução ao conteúdo?” e “como podemos fazer funcionar o diálogo do modelo com a matemática?”. É a partir da busca por respostas a essas perguntas que, internamente vai ocorrendo o processo de matematização. É nesse momento em que estamos fazendo a tradução da Cifra de César para uma linguagem matemática. Essa tradução se torna o centro de toda a atividade inicial, o sentido do nosso modelo é servir para que o aluno consiga entender e fazer o paralelo entre o que se está praticando com o pensamento combinatório, aprendendo então matemática através do modelo. É apenas com a apropriação desse modelo e com esse processo de matematização que damos o problema como resolvido.

1.2 A Cifra de César

Como citamos anteriormente, a Cifra de César será um dos modelos que vamos utilizar para se trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória. Mas o que de fato é a Cifra de César? Como abordado pelo Luciano (1987), a cifra é um sistema que transforma um texto qualquer em um texto criptografado necessitando de uma chave para realizar tal processo. A Cifra de César é por sua vez uma das formas mais antigas de se cifrar uma mensagem. Definindo formalmente, a Cifra de César é um tipo de *cifra de transposição* onde ela leva uma letra de uma posição x do alfabeto para uma posição y . A sua construção é dada pela transposição das letras de um alfabeto se baseando na aritmética modular para a construção desse novo alfabeto. Nesse caso para a letra a , podemos, por exemplo,

saltar 5 (cinco) letras e substituímos a letra a pela letra f . A quantidade de letras em que fazemos essa transposição, chamaremos de chave. Com a chave, a cifra se baseia na aritmética modular, onde fazendo uma correspondência biunívoca com as letras do alfabeto com um intervalo de números inteiros ($A=0$, $B=1$, $C=2$, ..., etc.) temos então a seguinte relação na aritmética modular;

$$E_n \equiv (\lambda + n) \pmod{26}$$

Onde a letra é representada pelo λ e n é a nossa chave da cifra. Para descriptografar, fazemos justamente o caminho inverso, seguindo então a seguinte relação na aritmética modular;

$$C_n \equiv (\lambda - n) \pmod{26}$$

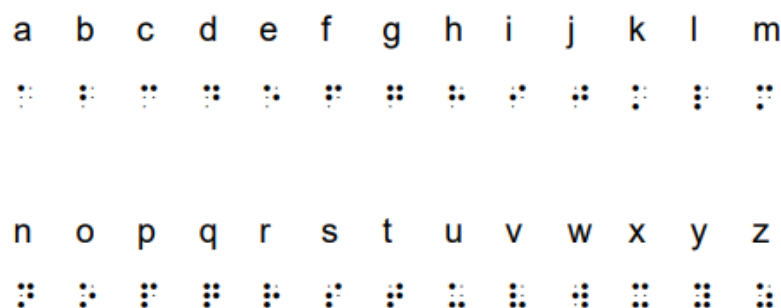
Podemos perceber que o número de chaves que podemos ter na Cifra de César está totalmente atrelado ao número de letras em que o meu alfabeto possui. Em outros capítulos, vamos mostrar a utilização da Cifra de César na prática.

1.3 Um novo problema

Trabalhar apenas com um tipo de cifra é limitar todo o potencial que a criptografia pode nos trazer quando queremos trabalhar matemática através dela. A medida que o modelo vai tendo todo o seu potencial explorado, vão surgindo problemas em que o mesmo acaba não alcançando. Um desses problemas é justamente quando entramos nos conteúdos que trabalham a ideia de combinação na Análise Combinatória. A Cifra de César, embora um bom exemplo, não consegue trabalhar com todos os conceitos pretendidos a se estudar da Análise Combinatória. Biembengut (1999)[11] afirma que “se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado a segunda etapa, matematização, mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis etc”. É exatamente isso que vamos fazer. Nesse sentido, voltamos para as ideias que nos levaram a utilizar a Cifra de César e refazemos as perguntas de Polya (1978)[12], buscando novamente uma nova forma para se abordar, ou seja, trazer um novo modelo, que ainda assim se encaixa na nossa temática em Criptografia. Vamos agora, fazer a introdução de mais uma forma de cifra, buscando trabalhar outros conceitos da combinatória, o Braille.

Seguindo o artigo do Mormam [\[15\]](#), Braille tem sua origem datada no século XIX por volta de 1829, quando seu criador, Louis Braille, propôs um sistema de escrita onde trazia as 26 letras do alfabeto romano de uma forma onde pessoas com baixa visão poderiam ler com bem mais facilidade.

Figura 1.1: O Alfabeto em Braille como proposto pelo Louis Braille



Fonte: Ministério da Educação (2018) [\[13\]](#).

Naquela época, livros para pessoas com baixa visão ou completamente sem ela eram escritos em alto-relevo, até mesmo o próprio livro em que o Louis Braille propôs o novo sistema de escrita é escrito dessa forma. Com o passar dos anos o sistema foi sendo aperfeiçoado até chegarmos ao que temos hoje com os 63 (sessenta e três) símbolos presentes. A construção desses símbolos é feita a partir de uma matriz com 3 (três) linhas e 2 (duas) colunas, sendo a criação de um relevo ou não nesses 6 (seis) espaços formados a distinção de um símbolo para outro. Em outros capítulos vamos demonstrar a utilização do Braille na prática. Mas não é apenas como modelo matemático que podemos dar um olhar para esse novo sistema de escrita. O trabalho com o Braille vai para além da matemática e pode ser explorado com os alunos com um caráter voltado ao social.

1.4 O diálogo do Braille para além da matemática

Quando falamos sobre o Braille, não podemos esquecer de que ele é uma ferramenta inclusiva que gera acessibilidade para pessoas com deficiências visuais. Então para que deixarmos esse nosso modelo apenas dialogando com a matemática? A forma ideal de se fazer esse trabalho é utilizando das ideias de um trabalho interdisciplinar. Porém isso nos traz um novo precedente, o que caracteriza um trabalho interdisciplinar e como

definir o nosso diálogo entre as diversas palavras que cercam este tema como: pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade e transdisciplinaridade. Cada uma dessas palavras traz um significados diferentes para formas diferentes de se trabalhar com o tema. Segundo Pombo:

O mais importante não é tanto a questão nominal. O mais importante é compreender o que se deixa pensar várias palavras. Tentar perceber o que por elas, e através delas, se dá a pensar. Aliás, é importante notar que, apesar de gastas e banalizadas, essas palavras são recorrentes, tenazes, persistentes.(2005, p.3) [7]

Sabendo disso, a parte mais importante para o nosso precedente é termos o diálogo e, ainda segundo Pombo (2005) [7], o mais importante é a resistência à especialização, um rompimento das barreiras que cercam as disciplinas. Esse rompimento pode se dar em graus que variam de uma justaposição, o paralelismo entre as disciplinas até um fusão entre as mesmas transcendendo as suas individualidades se tornando algo novo. Com essa questão, não devemos ficar pensando apenas na parte matemática, o nosso diálogo entre outras disciplinas vai se assemelhar ao paralelismo, onde o modelo trabalhado aqui será o mediador entre a matemática e outras disciplinas, como as disciplinas de linguagens. Vale salientar de que não se trata do diálogo apenas pelo diálogo, mas a forma didática de como esse diálogo é construído. Trazer esse paralelo pode gerar uma construção ainda mais sólida dos conteúdos e a necessidade de se aprender em totalidade a necessidade de se aprender o Braille não apenas como um exemplo, mas como uma escrita real e necessária.

1.4.1 Por que o Braille?

O trabalho vai indo muito além da sua capacidade de ser visto como um modelo matemático. A grafia em Braille traz para indivíduos com baixa visão acesso a elementos sociais e culturais que antes eram inacessíveis. Por conta disso, a necessidade de se trabalhar com esse tipo de grafia com os alunos do ensino básico. Mesmo sendo reconhecido por grande maioria o que é o Braille, diversos ambientes, como por exemplo a escola, não possuem essa acessibilidade em seu espaço. Trazer essa motivação aos alunos pode fazer com que eles se questionem sobre a acessibilidade nos ambientes públicos. Motivar o aluno para que ele, como cidadão, traga esses questionamentos para a sua geração é o papel do educador. Como disse D'Ambrosio (2012) [1], “educação é um ato político,

ensinar vai além do conteúdo da disciplina, quando buscamos trabalhar, dentro de nossas aulas, questões sociais, estamos fazendo com o que o aluno forme a sua consciência como ser social”.

1.5 A interação com as outras disciplinas

A medida que o nosso problema vai sendo trabalhado, vamos percebendo as possibilidades de abordagens conteudísticas que vão sendo geradas. Quando falamos em criptografia, temos um assunto que possui aplicação em diversas áreas, além de ser totalmente atrelada a escrita e utilizar do raciocínio lógico matemático para sua construção. O que se encaixa perfeitamente no que pretendemos trazer para uma aula de matemática. Porém, é um assunto de grande complexidade e não buscamos deixar a nossa aula de matemática ainda mais difícil. Logo, precisamos balancear a complexidade com a capacidade de aplicação. Com base nisso e observando no que pode ser trabalhado dentro da Combinatória, utilizaremos da Cifra de César e da escrita em Braille. Essa segunda, é a mais especial e a culminância de nossa sequência didática. A proposta de se trazer o Braille é muito mais que a sua aplicação matemática, vem da capacidade de ser utilizado como elemento motivador para os alunos aprenderem uma forma de escrita inclusiva, além de ser uma escrita de fora da matemática, podendo dialogar com as outras disciplinas que o aluno possui e trazer um conhecimento transversal. Durante o nosso texto vamos trabalhar ainda mais os motivos da escolha do Braille, bem como as suas empregabilidades nas outras disciplinas. Mas para que a necessidade desse diálogo com as outras disciplinas? Pois bem, se a nossa pretensão é deixar a aula de matemática mais interativa nada mais certo que fazer com que o conteúdo tenha diálogo direto com o dia a dia do aluno e não existe forma melhor do que trazer esse conteúdo de uma forma interdisciplinar.

1.6 A interdisciplinaridade na Sequência Didática

A ideia de se trabalhar de uma forma transversal é uma das bases de um trabalho interdisciplinar. Segundo Fazenda (2008)[\[9\]](#), a interdisciplinaridade na escola tem o intuito de favorecimento do processo de aprendizagem do aluno, tendo respeito ao conhecimento que o aluno já possui. Essa interdisciplinaridade escolar tem caráter educativo, ou seja, o foco está na estruturação desse diálogo para propiciar o aprendizado. Quando pensamos

em um trabalho sequenciado, nos voltando para as visões de Zabala, onde o autor afirma:

os métodos globalizados nascem quando o aluno se transforma no protagonista do ensino; quer dizer, quando se produz um deslocamento do fio condutor da educação das matérias ou disciplinas como articuladoras do ensino para o aluno e, portanto, para suas capacidades, interesses e motivações. Esta mudança de ponto de vista implica a relativização do valor educativo das disciplinas em relação a sua capacidade para contribuir para o desenvolvimento dos meninos e meninas. (1998, p. 188) [\[10\]](#)

Dessa forma, quando se é inserido em um conteúdo globalizado de uma SD, estamos falando na troca desse enfoque, queremos agora que o aluno, a medida em que interaja, ocorra o desenvolvimento desse conhecimento não apenas em uma disciplina centrada, mas em um conjunto de disciplinas que se encontram naquele trabalho. Ainda com a autora, existem diversos métodos para se trabalhar onde o foco não fique em apenas uma disciplina específica. O objetivo acaba sempre em fazer com que o aluno aprenda melhor. E essa é a nossa intenção desde o princípio, quando montamos uma SD e quando inserimos práticas interdisciplinares nela, fazemos para que os alunos tenham mais êxito na construção desses conhecimentos. Então já temos o nosso plano de ação e forma de se trabalhar nas aulas de matemática, no decorrer dos capítulos, vamos descrever ainda mais essas atividades e justificativas para a escolha dos modelos.

Capítulo 2

Proposta de Sequência Didática

Com todos os “ingredientes” já colocados a mesa, damos início a orquestração da nossa Sequência Didática. Como já dito anteriormente, com essa atividade temos o objetivo de se trabalhar os conteúdos matemáticos que descrevem a Análise Combinatória. Ou seja, as seguintes habilidades da BNCC (2018) [\[2\]](#): (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore; e (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. A atividade foi desenvolvida para se trabalhar em turmas do 2º ano do Ensino Médio, podendo, com a realização algumas adaptações, ser aplicada com as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. Para a estrutura da SD, vamos dividir ela em 4 etapas, onde traremos as Cifras que pretendemos trabalhar e realizando as avaliações necessárias para observar se a nossa atividade teve êxito em cada uma das etapas.

2.1 Etapa 01: A familiarização da Cifra de César

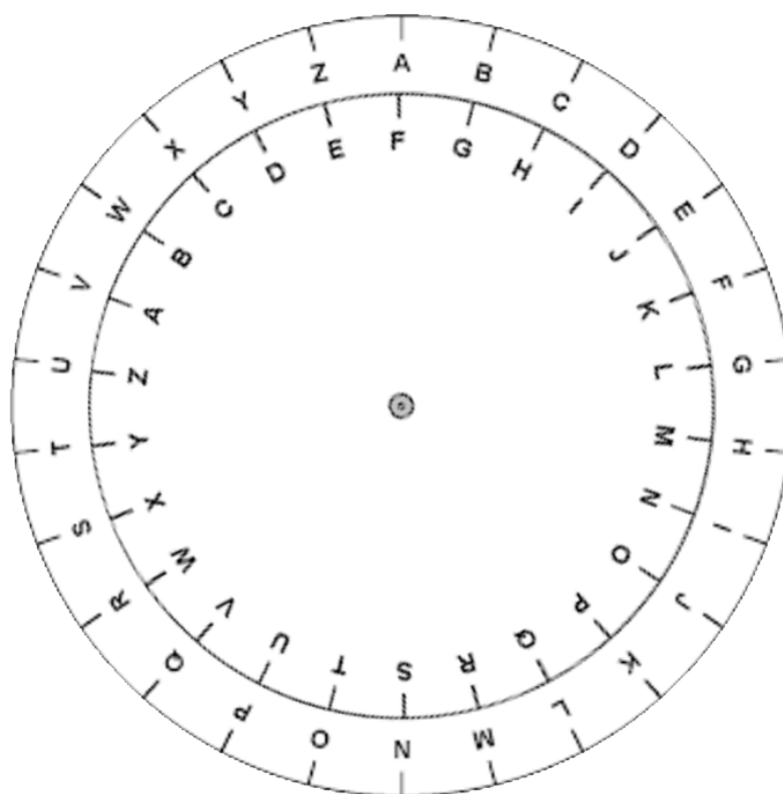
Esta etapa é dividida em duas partes. Na primeira, realizamos uma introdução histórica com os alunos sobre o que é uma criptografia e como podemos utilizá-la no nosso dia a dia. Para o intuito dessa atividade, vamos focar apenas nos tipos de criptografia de substituição e transposição. No contexto, a *Criptografia de Substituição* é quando trocamos símbolos por outros, por exemplo trocar as letras do alfabeto grego por números;

já a *Criptografia Transposição* é quando, no mesmo alfabeto de caracteres estamos movendo esses símbolos de lugar, ou seja, criando uma nova ordem para esses símbolos. Um exemplo é a própria Cifra de César. Ainda nessa primeira parte, é passado para os alunos como funciona o algoritmo da Cifra de César, para isso vamos utilizar da frase abaixo.

“Ainda temos muito tempo”

Como descrito em capítulos anteriores (seção 1.2), a construção da Cifra de César é justamente a transposição das letras com base em uma chave. Se para a frase acima utilizarmos do alfabeto usual e a chave $n = 5$, vamos pular da letra a para a letra f , a letra i para a letra n e assim sucessivamente. Podemos observar de forma visual que o nosso alfabeto, pulando 5 letras ficaria da seguinte forma;

Figura 2.1: Visualizando a Cifra de César com uma chave $n=5$



Fonte: Baseado no proposto por Moraes (2013)[4].

Dessa maneira, chegarmos na seguinte frase criptografada;

“FNSIF YJRTX SJNYT YJRU”

Para realizarmos a descriptografia, basta apenas fazermos o caminho inverso. Depois da demonstração e empregabilidade desse sentido em sala de aula, nos vem a seguinte pergunta, como esse exemplo se emprega no conteúdo matemático em que queremos trabalhar? Bem, é possível observar que a quantidade de formas em que podemos criptografar depende da forma em que vamos observar o alfabeto. Na construção do exemplo acima, utilizamos o alfabeto na sua forma usual, mas, como já citamos, a chave não depende dessa disposição das letras e sim na quantidade de caracteres que existem no alfabeto. Portanto, a quantidade de formas que podemos criptografar uma mensagem na Cifra de César depende totalmente da quantidade de formas que podemos ordenar essas letras do nosso alfabeto, se alterarmos a ordem do alfabeto temos uma frase cifrada de uma outra maneira mesmo que a chave seja igual. Para mostrar isso, vamos utilizar da mesma frase do exemplo anterior e da mesma chave ($n=5$), mas a diferença agora será na nossa ordem do alfabeto, utilizaremos então na sequência “QWERTY”, ou seja, o alfabeto disposto na ordem em que temos nos nossos teclados de computadores e smartphones. Com essas informações, a frase “Ainda temos muito tempo” fica cifrada da forma a seguir.

“HDRKH PITFJ TSDPF PITGF”

De fato, utilizando o alfabeto em uma nova ordem, a Cifra de César para a frase ganha uma nova ordem de palavras, então o que mais nos importa para a cifrar é saber da ordem em que o alfabeto se encontra. Naturalmente, fica o seguinte questionamento: de quantas formas podemos dispor essas letras? O surgimento dessa pergunta nos trás o pretexto de fazer a construção da quantidade de formas distintas que podemos apresentar essa forma de criptografar. A construção por sua vez, será explicada a seguir.

A Cifra de César se resume a uma questão, “de quantos modos podemos ordenar o alfabeto?” Como estamos utilizando um alfabeto usual queremos então saber de quantos modos podemos ordenar 26 (vinte e seis) letras distintas em 26 (vinte e seis) espaços. Logo, para o primeiro espaço ou primeira letra do meu alfabeto, podemos encaixar 26 letras, encaixada essa letra, temos agora 25 (vinte e cinco) letras para o segundo espaço, para o terceiro teremos 24 (vinte e quatro) e assim sucessivamente até o último onde nos sobra apenas uma letra. Desse modo, como essas decisões estão sendo tomadas de forma sucessiva e a decisão posterior depende da decisão que tomamos anteriormente, temos;

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 1 = 26! \quad \text{modos de se ordenar o alfabeto.}$$

Portanto, temos assim a quantidade total de formas de se ordenar um alfabeto com 26 letras. Partindo do exemplo com o alfabeto de 26 (vinte e seis) letras, fazemos a generalização do problema. Agora, se tivermos um alfabeto não com 26 (vinte e seis) letras mas agora um alfabeto qualquer com a disposição de n letras?

Pois bem, utilizando da mesma ideia do exemplo, para ser a primeira letra desse alfabeto temos as n letras possíveis para serem escolhidas, já para a ser a segunda letra teremos então, tomada a primeira letra, $n-1$ letras possíveis. Podemos seguir assim sucessivamente até chegarmos na última letra que teremos nesse alfabeto não usual, que novamente vai nos restar apenas 1 letra. Logo, como foram decisões tomadas sucessivamente, vamos ter;

$$n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3 \times \dots \times 1$$

Consequentemente, num alfabeto com n letras vamos ter $n!$ possibilidades de organizar esse alfabeto. Podemos pensar o nosso alfabeto como uma fila, e cada letra como uma pessoa que queremos colocar nessa fila. Com essa ideia, podemos pensar que cada decisão é um lugar nessa fila em que vamos colocar essa pessoa. É com essa ideia que podemos citar que o que fazemos é um *anagrama*, ou seja, o número de letras é o mesmo do número de espaços que queremos organizar, nos baseando na definição trazida por Morgado (1991)[5]. Com essa construção e demonstração, definimos que, para a Cifra de César, precisamos de 3 (três) coisas importantes: 1. definir o alfabeto, já que ele determina quantas formas diferentes eu posso ter de formar uma nova mensagem cifrada, partindo da organização de um alfabeto fixo; 2. definir a chave, para que se tenha então a utilização da cifra; 3. ter a frase para cifrarmos. Onde o mais importante é definir o alfabeto.

Para a segunda parte dessa etapa, os alunos são divididos em grupos para que, por meio de frases já predefinidas (Apêndice A), criptografem utilizando da Cifra de César e compartilhem essas frases cifradas outros grupos, para que eles as desvendam. Para facilitar a divisão dos grupos, é recomendado que seja feito em forma de sorteio. Cada frase é representada por um número (frase 1, frase 2, etc.), os alunos que pegarem as palavras com o mesmo número formam um grupo. Por exemplo, 4 alunos pegaram o número 1, logo eles formam o grupo da frase 1. É importante ressaltar que essa divisão dos alunos depende da quantidade de palavras que se encontram nas frases, bem como na quantidade de alunos presentes na turma. Fica a critério do professor separar a quantidade de frases necessárias para a aplicação dessa atividade, distribuindo de forma que fique um

número exato de grupos. A nossa recomendação é que sejam priorizado grupos de 4 (quatro) alunos, para facilitar a avaliação do professor e interação dos alunos no decorrer da aplicação. O mais importante nessa atividade é que os alunos se familiarizem com a ideia da Cifra de César, e seja observado se os mesmos tentam usar outras formas de se ordenar o alfabeto para realizar a Criptografia e não apenas ficar preso no alfabeto usual. Outra recomendação é que toda essa etapa seja realizada em aulas geminadas, ou sem um espaço muito grande entre a apresentação da Cifra e a interação com ela. Para registro e avaliação do professor é a utilizada de uma ficha de registro (Apêndice [B](#)) confeccionada para a atividade.

2.2 Etapa 02: Enraizando conceitos

Dando continuidade, a ideia dessa etapa é perceber se os alunos, através da familiarização com a Cifra, conseguem resolver problemas de contagem. É buscado dos alunos, que os mesmos tenham compreendido como se estrutura o princípio fundamental da contagem, abordada pelo Morgado (2016) [\[3\]](#) onde o mesmo diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e tomada essa decisão D_1 , temos y modos de tomar a decisão D_2 , então o número de formas que podemos tomar sucessivamente essas decisões D_1 e D_2 é dado por $x \times y$. Do mesmo modo, o princípio aditivo da contagem pode vir a ser trabalhado, onde se na tomada de decisões D_1 e D_2 for feita de forma independente, ou seja, a decisão D_1 não interfere na decisão D_2 , então quando tomadas, teremos $x + y$ modos distintos. Na etapa anterior já fizemos a generalização das formas de se organizar um alfabeto, mas antes da aplicação da atividade é trazida essa definição formal dos princípios que utilizamos. Essa construção mais formal é reforçada nessa etapa da atividade trazendo ainda mais exemplos utilizando a Cifra de César, para se trabalhar mais conhecimentos da Análise Combinatória, como os anagramas e a construção dedutiva da fórmula da permutação, ou como conhecida, a fórmula de arranjo.

Para fazer o reforço das ideias do princípio multiplicativo, vamos utilizar do exemplo feito da etapa anterior, mas agora, para simplificar e não dividir em casos, vamos utilizar de apenas uma das palavras, sendo ela

“tempo”

A partir da palavra, vamos fazer a seguinte pergunta “De quantos modos podemos criptografar essa palavra?” Bem, como vimos anteriormente, a quantidade de formas que podemos cifrar uma palavra, depende não da quantidade de chaves, mas sim da quantidade de formas que podemos organizar esse alfabeto, desse modo, podemos definir, para esse exemplo, que o nosso alfabeto é composto pelas 5 (cinco) letras que compõem a palavra. Assim, se olharmos a quantidade de letras que temos na palavra;

$$\begin{array}{ccccc} T & E & M & P & O \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

A questão acaba se resumindo então, “de quantos modos podemos organizar esse novo alfabeto de 5 letras?”. Assim, para o primeiro espaço temos 5 (cinco) possibilidades, para o segundo temos 4 (quatro), para o terceiro temos 3 (três) e assim sucessivamente. Como vamos tomando essas decisões nos baseando na decisão anterior e na definição que abordamos na etapa 2.1 então temos;

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{possibilidades}$$

Desse modo, teríamos um total de $5!$ possibilidades. O que podemos ver nesse exemplo é novamente a ideia de um *anagrama* como vimos na etapa 2.1, mas agora o nosso alfabeto é formado pelo número de letras que temos na nossa palavra. Agora vamos pensar no seguinte caso, queremos criptografar uma palavra qualquer utilizando da Cifra de César, mas primeiramente, como já definimos anteriormente, precisamos definir esse nosso alfabeto. Então vamos pensar no seguinte problema, “De quantas formas podemos formar um alfabeto de 10 (dez) letras, a partir do alfabeto usual?” Para responder essa pergunta, vamos pensar como se esse alfabeto que vamos montar é uma palavra onde podemos encaixar o nosso alfabeto usual. Sendo assim, temos 10 (dez) espaços para encaixar as 26 (vinte e seis) letras. Portanto;

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \quad \text{possibilidades}$$

Isso já seria a nossa resposta do número de possibilidades, mas e se quisermos escrever numa forma fatorial que estamos acostumados a escrever até agora? Bem, podemos escrever como o fatorial de todas as letras possíveis, dividindo pelo fatorial de letras que

ficaram de fora. Logo,

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 = \frac{26!}{16!}$$

Ainda na igualdade, como $16 = (26 - 10)$ podemos reescrever esse fatorial na seguinte forma;

$$\frac{26!}{16!} = \frac{26!}{(26 - 10)!}$$

Podemos generalizar esse exemplo para chegarmos na construção da nossa fórmula do arranjo. O arranjo, como proposto por Morgado (1991) [5] pode ser definido pela quantidade de agrupamentos que podemos formar com p elementos a partir de um conjunto de n elementos sem haver repetição. Nesse sentido, vamos pensar em um suposto alfabeto agora com p letras formado de um outro alfabeto que possua n letras. Da mesma forma que trabalhamos pelo exemplo temos o seguinte arranjo;

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - (p + 1))$$

Escrevendo agora na forma de fatorial temos que acrescer e decrescer a permutação dos $(n - p)$ termos restantes. Assim, temos

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (p + 1)) \times (n - p)!}{(n - p)!}$$

Fazendo uma simplificação no numerador, chegamos então na seguinte fórmula generalizada para o Arranjo

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Com essa generalização e o trabalho com outros exemplos combinatórios os alunos são colocados a resolver mais uma ficha (Apêndice C) que possui alguns problemas matemáticos envolvendo os princípios descritos anteriormente e logo em seguida, como parte da mesma atividade, mas entregue de forma separada os alunos são colocados novamente em grupo onde agora são colocados a montarem as suas próprias frases e criarem as suas próprias formas de Criptografia, descrevendo como surgiu a ideia e como ela funciona. Depois desse momento de montagem, alguns alunos dos grupos se apresentarão para a turma, mostrando porque o método deles funciona para criptografar. O ideal desse momento é

observar como os alunos desenvolverão o conhecimento matemático diluído no momento anterior, bem como avaliar aqueles alunos que não participaram bem na etapa anterior. Nessa nova etapa, é aconselhado que seja abordado também em aulas geminadas, sendo o primeiro momento para a discussão dos grupos e no segundo o compartilhamento para todas as turmas. Toda essa atividade de construção da forma de Criptografia é registrada para que possa ser avaliado o conhecimento e a base matemática empregada pelos alunos, vendo se os mesmos, de fato, compreenderam o que foi abordado. Esse registro é dado conforme o colocado em anexo (Apêndice **D**). Recomendados para essa etapa, que o professor aplicador pense nas questões que podem empregar a combinatória. De modo, que ainda fique fácil dele relacionar com os exemplos que foram utilizados. Também é recomendado que toda essa etapa seja dada novamente em aulas geminadas, ou de aplicação não muito distante da aplicação da Etapa 01 para que o aluno seja avaliado ainda do decorrer do processo de formação do conhecimento.

2.2.1 As questões formuladas para o exercício

Quando formulamos as questões aplicadas pensamos em não fugir da ideia de criptografar uma palavra, tendo em vista que é de bom grado se manter em problemas onde estejam nos nossos modelos. Pensamos ainda mais em manter as questões de forma ambígua. Como a aplicação dessas questões pode ser dada depois de definirmos a permutação, pensamos em questões em que os alunos poderiam resolver utilizando a permutação ou anagramas. Vamos analisar cada questão e ver o que pode ser interpretado em cada uma delas.

Questão 1
Dada a palavra ‘Felicidade’ de quantas maneiras diferentes podemos cifra-la?
Comentário da questão: É observado através dessa questão a forma com que o aluno a analisa. Nesse sentido, temos duas formas para observar essa questão. A primeira envolve observar a palavra através de um anagrama, ou seja, pensar que o alfabeto no qual vamos organizar é formado pelas letras que compõem essa palavra. Com isso o problema se resolve utilizando ideias de permutação simples com repetição. A segunda forma de se resolver é pensar em permutar primeiramente o alfabeto de 26 letras para poder cifrar uma palavra que possui 7 letras distintas.

Questão 2
Utilizando a mesma palavra do item anterior de quantas formas podemos cifra-la, se quisermos que as três primeiras letras sejam ‘Fel’?
Comentário da questão: Nessa questão é esperado que o aluno consiga pensar que as letras ‘FEL’ sejam apenas uma, ou seja, ‘FEL’ é representado apenas por um símbolo. Nesse sentido a resolução acaba recaindo ao problema anterior.
Questão 3
Ainda com a mesma palavra da primeira questão, quantas formas teríamos se agora queremos que as letras “a” e “e” não fiquem juntas?
Comentário da questão: Essa questão acaba sendo a mais difícil de todas as propostas, pois é esperado que os alunos pensem na ideia de retirar de um todo as possibilidades que esperamos. Nesse caso, a resolução é fazer o problema da mesma forma que na Questão 1 e subtrair do todo o problema parecido com o da Questão 2.
Questão 4
Agora, para a frase ‘Vou deixar a vida me levar’ de quantas formas que podemos cifrar esta frase?
Comentário da questão: Queremos avaliar se os alunos entenderam bem a ideia do princípio aditivo, utilizando das mesmas ideias da resolução da Questão 1, sendo que que agora separando em casos.

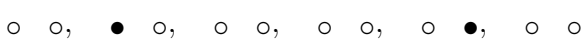
2.3 Etapa 03: Partindo do Braille, chegando na combinação

Dando continuidade, para essa etapa vamos falar do problema central do nosso objeto de estudo, a combinação. A ideia de combinar surge naturalmente enquanto falamos dos temas anteriores. Para o primeiro momento é solicitado passar uma definição breve do que seria a combinação. A combinação se define em escolhermos p elementos distintos dentro de uma quantidade de n elementos. Para essa nova definição utilizaremos de um novo modelo, o Braille. É dada então o exemplo prático da combinação pela construção de todos os símbolos possíveis do Braille. O sistema de escrita em relevo o Braille é

ou seja são os mesmos símbolos da primeira, porém não começando pelo ponto 1 e sim pelo ponto 2. Também podemos chamar essa série de símbolos inferiores. A sexta série é formada apenas pelos pontos 3, 4, 5 e 6. E por fim, a sétima série é formada apenas pela segunda coluna (ou os pontos 4, 5 e 6). Separada e explicado as séries em que podemos agrupar os símbolos, o professor faz aos alunos a seguinte pergunta: “Quantos símbolos possíveis podemos formar utilizando dessa estrutura?” Como a construção trata-se de preencher (perfurar) ou não esses pontos, então precisamos observar todas as formas de que podemos preencher os pontos dessa matriz. Assim temos que observar o que acontece em cada caso.

Caso 1: Apenas um ponto é perfurado;



Sendo assim temos,  (6 possibilidades)



Caso 2: Apenas dois pontos são perfurados;



Temos então;,  (15 possibilidades)



Podemos fazer a construção visual de todos os casos. O que iremos concluir é que como separamos em casos distintos, utilizaremos do princípio aditivo. Assim, temos o número total de símbolos possíveis como sendo 63 (sessenta e três). A construção visual pode ajudar os alunos a terem um ponto de partida para entender melhor a ideia da combinação. Porém, sempre que enxergarmos problemas desse tipo, fazer a construção dos casos e de suas possibilidades pode ser algo custoso e trabalhoso. Desse modo, vamos deduzir até chegar na fórmula em que se define a combinação simples, sendo ela;

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

A dedução dessa fórmula se vem da seguinte pergunta;

“De quantos modos podemos pintar n bolinhas em um Braille com p espaços?”

Primeiramente, temos a construção que fizemos para o arranjo, estamos assim com uma

$A_{n,p}$ que definimos na Etapa 2.2. Porém, um grupo formado é um grupo formado independente da quantidade de formas que organizamos esses pontinhos dentro desse grupo. Desse modo, temos que tirar o número de vezes em que esses grupos formados estão com as ordens trocadas. Nesse caso $p!$. Portanto a fórmula fica da seguinte forma;

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

É importante que o professor mostre que o que diferenciou essa generalização da anterior foi a não importância de uma ordem. O ponto central de se observar que o problema é de combinação é perceber que o mesmo está falando da construção de um grupo. Outro ponto importante é para facilitar também o entendimento dos alunos para que eles não precisem decorar fórmulas generalizadas é fazer a dedução finita da fórmula utilizando um dos casos, por exemplo o caso com 5 (cinco) perfurações. Sugerimos, nessa etapa, que o professor aplicador proponha questões semelhantes as da etapa anterior.

2.4 Etapa 04

Para a última etapa, propomos um trabalho a mais com o Braille. Pensamos que para o aluno passar novamente pelo processo de matematização, que citamos em capítulo anterior, uma atividade de interação com o modelo seria de grande importância. Sendo assim, propomos a realização de uma oficina onde os alunos irão escrever frases utilizando o Braille. Nela, os alunos são ainda colocados nos grupos formados para a primeira etapa, mas agora, cada grupo irá coletar pela escola as diversas frases ou palavras nas placas informativas da escola (sala 01, secretaria, biblioteca, etc.). Com elas em mão, o trabalho de cada grupo será de escrever essas frases em braille, montando agora novas placas para esses determinados locais. Para a montagem, os alunos podem utilizar diversos materiais como por exemplo epóxi ou cola quente para gerar o relevo em uma folha de papelão. Com as placas construídas, as mesmas são dispostas nos espaços onde elas fazem sentido. A ideia é deixar o espaço da escola mais acessível e, ainda durante a atividade, os alunos aprendam a utilizar o Braille. Quando pensada essa etapa, e como falamos anteriormente, dada a importância em se trabalhar o Braille com os estudantes, a discussão não deve ficar apenas na disciplina de matemática, trazendo então um diálogo mais amplo com outras disciplinas da escola. A ideia dessa etapa é deixar com que essa interação com o

modelo traga resultados para além da matemática. A avaliação aqui é, além de que o aluno tenha gerado intimidade com o modelo e a sua participação durante a atividade, mas ter entendido a importância do Braille para a sociedade e da necessidade em se ter nos espaços, sobretudo escolares, a existência de aparatos inclusivos. Pois bem, como seria passar essas frases para o Braille?

Para exemplificar aos alunos como eles realizariam essa atividade, vamos fazer a transcrição de uma frase para o Braille. Realizando de forma análoga como a da primeira etapa, escolhemos uma frase para realizar a tradução para o novo sistema de escrita. Sendo assim, seguiremos o exemplo abaixo;

“As rosas ”

Para fazer a tradução vamos utilizar além da parte matemática que vimos na etapa anterior e as regras que regem a grafia em Braille. E como são essas regras? Pois bem, a grafia Braille, como descrevemos na etapa anterior, é formada por 63 símbolos. Para se escrever em Braille seguindo a grafia brasileira, precisamos não só entender como se é feita a construção de cada símbolo, mas o que cada um representa.

Figura 2.3: O Alfabeto em Braille

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
⠁	⠃	⠉	⠙	⠑	⠋	⠎	⠈	⠺	⠽	⠗	⠚	⠞
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
⠝	⠕	⠖	⠖	⠗	⠎	⠟	⠻	⠼	⠽	⠿	⠾	⠺

Fonte: Ministério da Educação (2018)[13].

Com cada símbolo bem trabalhado, partimos para mostrar o que cada um representa. Primeiramente, trazemos a representação do alfabeto. Como estamos na língua portuguesa, precisamos de símbolos para representar os acentos e o nosso cedilha, então existem símbolos próprios para apresentar esses caracteres especiais.

Figura 2.4: Caracteres especiais da língua portuguesa

Vogais	a	⠁	e	⠑	i	⠊	o	⠋	u	⠥
Acento agudo	á	⠁	é	⠑	í	⠊	ó	⠋	ú	⠥
Acento grave	à	⠁	—	—	—	—	—	—	—	—
Acento circunflexo	â	⠁	ê	⠑	—	—	ô	⠋	—	—
Til	ã	⠁	—	—	—	—	õ	⠋	—	—
Consoante					c	⠉	⠉	⠉		
Cedilha					ç	⠉	⠉	⠉		

Fonte: Ministério da Educação (2018) [13].

Ainda assim, o Braille possui uma certa limitação para a criação de símbolos próprios para todos os caracteres. Sendo assim, temos símbolos exclusivos para designar que estamos referenciando a outros caracteres que utilizam dos mesmos símbolos.

Figura 2.5: Símbolos exclusivos do Braille

⠁	sinal de maiúscula
⠠	sinal de maiúscula em todas as letras da palavra (caixa alta)
⠡	sinal de série de palavras com todas as letras maiúsculas
⠼	sinal de número
⠽	sinal de expoente ou índice superior
⠿	sinal de índice inferior
⠸ ou ⠸⠸	sinal de itálico, negrito ou sublinhado
⠼	variante tipográfica de números
⠼	sinal de minúscula latina; sinal especial de translineação de expressões matemáticas e sinal de translineação em contexto informático
⠼	sinal restituidor do significado original de um símbolo braille
⠼	sinal de transpaginação
⠼	sinal de abertura de nota de transcrição
⠼	sinal de fechamento de nota de transcrição

Fonte: Ministério da Educação (2018) [13].

Com toda essa descrição da representação dos símbolos principais, chegamos que a nossa frase agora fica da seguinte forma;

○ ● ● ○ ○ ● ● ○ ● ○ ○ ● ● ○ ○ ●
 ○ ○ ○ ○ ● ○ ● ● ○ ● ● ○ ○ ○ ● ○.
 ○ ● ○ ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ○ ○ ● ○

Algo que é importante para a aplicação dessa etapa é explicar que os números são escritos utilizando do caractere especial seguido com os símbolos da primeira série (nesse caso temos a ordem de cada um dos símbolos da série indo do 1 ao 0). Com o exemplo passado, os alunos começariam a fazer a construção das suas placas. Se as aulas de aplicação forem muito espaçadas é ideal que se faça uma explicação breve novamente de como funciona a escrita em Braille antes de realizar a construção das placas. É importante frisar que a construção dessas placas seria de forma totalmente artesanal pelos alunos. Os mesmos as construiriam gerando o relevo com materiais como cola ou fazendo furos em folhas grossas. Para se tornar algo permanente na escola seria necessário uma intervenção maior da gestão escolar e incorporação dessa ideia no Plano Político Pedagógico da escola. A intensão maior é fazer com que os alunos sejam elementos motivadores para se trazer a necessidade do debate e trabalho com o Braille nas escolas. Toda essa etapa não é vista apenas dentro da disciplina de matemática, sendo levado o debate também para a sala de professores e gerando a articulação com as mais diversas disciplinas da escola. Em primeiro momento, foi se pensado com as disciplinas de artes e português os aspectos artísticos na construção das placas e no caráter linguístico que a grafia em braille se respalda, respectivamente.

2.5 Um esquema reduzido para a Sequência Didática

Para facilitar a leitura da estrutura da SD, trouxemos então uma versão resumida, para facilitar uma possível aplicação do leitor.

Título/ Tema: A criptografia na análise combinatória
Modalidade: Ensino Médio
Componentes Curriculares: Permutação, Arranjo e Combinação
Unidade Temática: Probabilidade e estatística
Objetos de Conhecimento: Criptografia, acessibilidade
Habilidades: (EM13MAT310); (EM13MAT311)
Objetivo Geral: Compreender o conhecimento matemático acerca da análise combinatória.
Objetivos Específicos: Relacionar o conteúdo matemático com a criptografia, entendendo o paralelo entre as duas; desenvolver uma sensibilidade ao ponto de poder gerar, por meio da matemática, suas próprias formas de cifrar; utilizar da matemática como elemento de acessibilidade, gerando um paralelo entre ela e a escrita em braille.
Metodologia: 1ª Etapa: Para essa etapa, vamos dividir ele em dois momentos. No primeiro momento vamos explicar sobre o que é a cifrar uma mensagem e explicar como se utiliza a Cifra de César, colocando então os alunos para praticarem em grupos a Cifrar as frases que formam os grupos. No segundo momento, vamos explicar a matemática por trás da cifra, trazendo o paralelo e as fundações para as próximas etapas. 2ª Etapa: Dando continuidade, vamos fazer uma atividade avaliativa com os alunos. Antes disso se pretende trazer, ainda dentro dos exemplos da Cifra de César, exemplos para trabalhar com as permutações e anagramas. Passado esses conteúdos, fazemos então a avaliação, onde buscamos dos alunos a compreensão dos princípios e conteúdos que cerca a Análise Combinatória até aqui.

3ª Etapa: Para a terceira etapa, voltamos novamente a trabalhar através de um modelo matemático. Dessa vez, o nosso exemplo agora, vai envolver o Braille. Fazendo então, o paralelo do Braille com a matemática, vamos trabalhar os problemas de Combinatória, fazendo com que os alunos exercitem durante a construção dos símbolos do braille o que é a Combinação.

4ª Etapa: Para a etapa esta final, vamos fazer uma atividade interdisciplinar, ou seja, com a motivação da escrita em Braille, é colocado aos alunos a produção de placas para serem colocadas nos espaços escolares, fazendo com que a escola fique mais acessível para pessoas com baixa visão. Essa discussão é colocada para além da matemática, trazendo outras disciplinas para o debate e integrando toda a comunidade escolar em prol da inclusão. A intensão maior dessa etapa é fazer com que os alunos se tornem ferramentas motivadoras para se trazer o debate da necessidade de acessibilidade em espaços públicos.

Recursos: Sala de aula; quadro da sala; fichas de avaliação; papelão e folhas diversas; cola quente

Avaliação: A avaliação é vista de forma contínua durante todo o decorrer da atividade, seja pela entrega dos materiais propostos, seja pela participação dos alunos junto com a turma.

Vale salientar que o que temos aqui é um resumo do que buscamos trabalhar, os comentários completos da forma em que vamos trabalhar pode ser vistos no começo desse capítulo [2](#).

Capítulo 3

Um relato sobre a vivência da Sequência Didática em sala de aula

A aplicação da Sequência Didática (SD) citada no capítulo anterior se deu em turmas do 2º ano do Ensino Médio na Escola de Referência em Ensino Médio Padre Osmar Novaes, localizada na cidade do Paulista, região metropolitana do Recife. A aplicação só foi possível graças a integração da mesma no estágio supervisionado realizado na escola. Com isso, foi possível ver como toda a atividade foi recebida pelos alunos. Nesse capítulo vamos comentar e ver os resultados que fomos tendo durante a aplicação de cada etapa.

3.1 Sobre a aplicação da Sequência

A sala de Aula é um ambiente de grandes experiências. Quando pensamos na primeira etapa, estávamos priorizando que os alunos tivessem a interação com o modelo e foi isso que ocorreu. A aplicação da mesma foi dada em uma aula geminada. Na primeira trouxemos a apresentação do modelo como descrito na etapa da SD no capítulo 3 na seção **2.1**. O interessante da demonstração do modelo é que os alunos se perguntavam que tipo de conteúdo estávamos aplicando, visto que não estávamos trazendo a definição e sim uma cifra. Isso trouxe um certo estranhamento dos mesmos, mas ao mesmo tempo aguçando a curiosidade, principalmente na segunda parte dessa etapa, onde dividimos os alunos em grupos para ver se entenderam como funcionava a Cifra de César. A divisão dos alunos nos seus respectivos grupos foi feita pelo sorteio da forma que definimos na já referida etapa. Com os grupos formados foi dado então início a avaliação. Podemos ver abaixo o

registro de um dos grupos.

Figura 3.1: Registro de um dos grupos

Ficha de Registro para o grupo	
1. Escreva na linha abaixo a frase que formou o grupo:	
Frase: <i>Os alunos gostam de estudar.</i>	
2. Escreva no espaço abaixo o processo de codificação dessa frase, utilizando a cifra de César.	
<i>f o a l u n o s g o s t a m d e e s t u d a r</i> <i>F → I G → V M → P T → W</i> <i>L → O H → F N → U U → L</i> <i>O → N A → O P → M D → V</i> <i>E → H V → V H → H V → V</i>	
3. Escreva a mensagem codificada por outro grupo:	
<i>J e h m w e g e w u e h s w k y o u h e g v e r e v i w</i>	
4. Escreva no espaço abaixo o processo de decodificação da frase do item 3, utilizando a cifra de César.	
<i>P = T A = E G = K R = V</i> <i>A = E M = G U = Y A = L</i> <i>F = T O = W G = L N = P</i> <i>S = I O = W N = V O = F</i> <i>I = M A = J D = U O = P</i> <i>D = W H = H A = L N = V</i> <i>O = D M = G L = I</i> <i>D = W</i>	
5. Escreva abaixo a mensagem que era desse outro grupo:	
<i>Y o p i s a m a s s a d o s g u a r d a m r a n c o e s</i>	

Fonte: Autoria própria.

Podemos ver, que os alunos conseguiram entender bem como funcionava a Cifra de César. A Criptografia das frases funcionou de forma animadora e de formas diferentes entre os grupos, como podemos ver na imagem abaixo.

Figura 3.2: Outra resolução dos alunos a cerca da atividade

Ficha de Registro para o grupo	
1. Escreva na linha abaixo a frase que formou o grupo:	
Frase: <i>A matemática é a arte da vida.</i>	
2. Escreva no espaço abaixo o processo de codificação dessa frase, utilizando a cifra de César.	
<i>A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z</i> <i>X E V B N M</i> <i>A = B E = D</i> <i>F = C G = H</i> <i>I = J K = L</i> <i>O = P Q = R</i> <i>S = T U = V</i> <i>W = X Y = Z</i> <i>A matemática é a arte da vida</i>	
3. Escreva a mensagem codificada por outro grupo:	
<i>T X N U R F R P H U E D W D W D I U F W D</i>	
4. Escreva no espaço abaixo o processo de decodificação da frase do item 3, utilizando a cifra de César.	
<i>Quero comer datata fruta.</i>	
5. Escreva abaixo a mensagem que era desse outro grupo:	
<i>R. v. e. s.</i>	

Fonte: Autoria própria.

Nessa nova resolução, vemos que os alunos utilizaram de uma nova ordem no alfabeto para criar a sua Criptografia. Podemos dizer então a atividade se mostrou satisfatória para essa primeira etapa, visto que os mesmos alcançaram a familiaridade com

o modelo. Foi nessa interação que perguntas pertinentes como a quantidade de cifras possíveis, as possibilidades de se alterar o alfabeto, foram levantados pelos alunos e registrados para o início da segunda parte da atividade. Nela foi que conseguimos trazer inicialmente os primeiros princípios da Contagem para os alunos, princípios esses que só iríamos nos aprofundar na etapa posterior. Foi na realização da segunda etapa (2.2) que então essa introdução das definições iniciais do nosso ensino da Análise Combinatória, os alunos conseguiram assimilar quando agora respondemos o questionamento do número de formas em que podemos criptografar utilizando a Cifra de César. Tínhamos então alcançado o primeiro passo, entender a utilidade do princípio multiplicativo. Partia agora entender a formulação do conceito para o entendimento do que viria a ser um anagrama e a ideia da permutação. Essa aula então, dividimos em duas partes.

Para a primeira metade, trouxemos um problema para conseguirmos trabalhar sobre o anagrama. O problema consistia na ideia de cifrar apenas uma palavra onde o alfabeto utilizado seria as letras que formam a mesma palavra (podemos ver a resolução desse problema na seção 2.2). A utilização de um exemplo, ainda utilizando a ideia de um alfabeto, foi proposital para que os alunos ainda sentissem que era algo em que eles já conheciam, nesse caso a Criptografia pela Cifra de César. Sentimos que a ideia de anagrama ficou clara para os alunos e então partimos para o próximo exemplo e segunda parte da nossa aula, onde agora apresentamos a ideia de permutação na construção de um alfabeto para o uso de uma Cifra. Esse exemplo também está descrito na construção da segunda etapa (2.2).

Figura 3.3: Apresentação do problema



Fonte: Autoria própria.

Um comentário necessário a se dizer é que os alunos entenderam bem a ideia enquanto estávamos trabalhando de forma numérica finita, quando passamos para a uma forma genérica (mas ainda assim finita) foi perceptível a dificuldade em assimilar uma fórmula mais geral, mas mesmo assim podemos dizer que alcançaram o que foi esperado, é importante para o professor, quando estiver aplicando essa generalização, faça a construção da fórmula em paralelo com o exemplo para que o aluno perceba as similaridades e não se sinta tão perdido. Dando continuidade a etapa, a aplicação da atividade ocorreu da forma em que esperávamos. Como já descrevemos no Capítulo anterior, a atividade foi pensada para ter duas visões possíveis para ser ter a possibilidade de responder.

Como a possibilidade de resolução não era única, podemos ver que os alunos buscaram de formas diferentes para se debruçarem em cima dos problemas. Vamos observar a resolução de dois desses alunos do 2º ano que vamos chamar de aluno 01 e aluno 02, escolhidos de forma aleatória.

Figura 3.4: Resolução da Questão 1 do aluno 01

1. Dada a palavra: "Felicidade" de quantas maneiras diferentes podemos cifra-la?

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$
$$1$$
$$\frac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$
$$\frac{10!}{8}$$

Fonte: Autoria própria.

Podemos observar então que o aluno para essa primeira questão pensou na ideia da permutação, porém para o seu alfabeto ele pensou em que as letras que compunham a palavra. Tendo então, desenvolvido a questão como um anagrama.

Figura 3.5: Resolução da Questão 2 do aluno 02

2. Utilizando a mesma palavra do item anterior de quantas formas podemos cifra-la, se quisermos que as três primeiras letras sejam "Fel"?

FELICIDADE

$$3! \times \frac{7!}{4}$$

Fonte: Autoria própria.

Para a segunda questão o mesmo aluno, continuou com o pensamento de anagrama e com essa linha de pensamento, conseguiu pensar em utilizar as letras que ficavam juntas como sendo uma só.

Figura 3.6: Resolução da Questão 3 do aluno 01

3. Ainda com a mesma palavra da primeira questão, quantas formas teríamos se agora queremos que as letras "a" e "e" não fiquem juntas?

$$\frac{10!}{1} - 2 \times 9!$$

$$\frac{8!}{4} \times 9$$

Fonte: Autoria própria.

Para a terceira questão, tínhamos o intuito de se pensar na ideia de se retirar de um todo de possibilidades. Muitos alunos não conseguiram resolver repetindo o que fizeram nas duas questões anteriores. Algo que poderia facilitar era ele pensar todas as questões como sendo uma questão em que envolvia anagramas.

Figura 3.7: Resolução da Questão 4 do aluno 02

4. Agora, para a frase "Vou deixar a vida me levar" de quantas formas que podemos cifrar esta frase?

$$3! + 6! + 2! + 4! + 2! + 5!$$

Fonte: Autoria própria.

Para a nossa última questão, podemos observar que o aluno 02 pensou na ideia de anagrama para cada uma das palavras e em seguida utilizou do princípio aditivo para determinar o total de formas em que podemos Cifrar a frase.

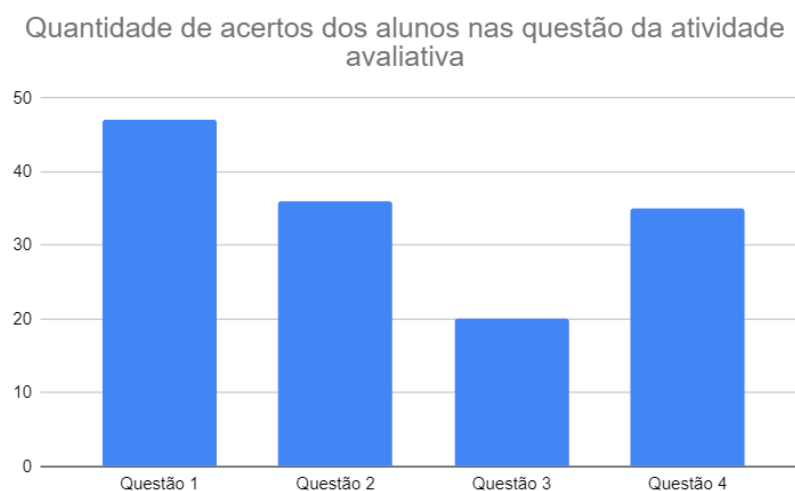
Tiramos a conclusão que o desenvolvimento dessa etapa foi dado de fora animadora e nos motivou para dar continuidade com o desenvolvimento das etapas. A aplicação da terceira etapa (descrita na seção 2.3) se deu de forma parecida com a do início da etapa 02, com a apresentação da parte teórica através de um problema. Porém, o nosso problema agora é fazer a Criptografia através do Braille. E assim desenvolvemos a trabalhar com

as combinações. Foi visto que como os alunos conseguiram entender a parte teórica que envolvia a permutação, quando trouxemos isso para a combinação, ficou tudo mais claro. Da mesma forma, como não trouxemos para a sala de aula mais uma ficha avaliativa para se trabalhar com a ideia de combinação, buscamos trabalhar com o próprio exemplo com os alunos. A ideia de se avaliar foi trazer os alunos para eles mesmos desenvolverem a quantidade de formas que podemos ter para formar os símbolos do Braille, nisso podemos observar que os alunos conseguiram entender como funcionava a combinação e decretamos a etapa como um sucesso. Já a nossa última etapa, justamente a etapa de caráter interdisciplinar onde os alunos iriam realizar a confecção de placas utilizando da escrita em Braille, não foi possível a aplicação durante a escrita desse trabalho devido a situações excepcionais no calendário da escola onde realizamos a aplicação, como as fortes chuvas do mês de maio em que a escola permaneceu fechada. Deixamos então registrado que ainda iremos realizar essa aplicação no segundo bimestre do ano letivo, infelizmente o seu registro não se encontrará nesse trabalho.

3.2 Estudo estatístico/ Avaliação de Aprendizagem

Durante toda a aplicação da SD, os alunos foram avaliados a cada etapa. Para a primeira etapa, vimos que todos os alunos buscaram participar e fazer o uso da Cifra de César. O entendimento dos alunos ao princípio multiplicativo e aditivo foi compreendido pela grande maioria dos alunos que comentaram e perguntaram se “era para ser fácil assim”. A única parte que os alunos sentiram mais dificuldade foi na construção de uma fórmula geral para a permutação, mas depois disso, as atividades foram vistas de forma animadora. No gráfico abaixo podemos ver a quantidade de acertos por questão dos 60 (sessenta) alunos das 3 (três) turmas do 2º Ano da escola da aplicação.

Figura 3.8: Gráfico de acerto dos alunos



Fonte: Autoria própria.

Outra coisa que observamos é os alunos não terem alcançado uma boa quantidade de acerto na Questão 3, que requeria um pensamento de retirada do todo. Para futuras aplicações, recomendamos reformular o problema, partindo-o em itens para que o aluno vá ser guiado e aos poucos construindo a solução do problema. Uma proposta que damos é buscar uma exemplificação para se falar de permutação circular. Se olharmos de forma geral, a abordagem teve grande sucesso com os alunos, a grande maioria buscou trabalhar e prestar atenção na aula, mostrando que se buscar exemplos práticos pode ter grande aceitação dos alunos numa aula e principalmente de matemática.

3.3 Opinião geral da participação dos discentes

Na visão dos discentes, a SD foi uma forma diferente de se falar matemática, sem ser apenas uma aula com definição, exemplos e exercícios. Alguns alunos comentaram durante a aplicação, que nunca tinham estudado matemática dessa forma, e se mostraram interessados no que estava por trás daquela forma de criptografia. Podemos dizer que a modelagem matemática trouxe aquele elemento de incentivo para os alunos, os motivando a praticar matemática. Pela primeira vez, eles puderam trabalhar com a matemática de forma mais próxima a sua realidade, interagindo diretamente com os modelos e fazendo a construção do conhecimento através desse contato. Infelizmente, com não pudemos aplicar a etapa 04 da SD, não tivemos dados para a aplicação da etapa interdisciplinar

com os alunos. Essa etapa, que por sua vez, estava sendo muito aguardada pelos alunos que se sentiram motivados a se trabalhar com o Braille e aprender essa forma de escrita. Alguns alunos vieram até a mim para perguntar sobre como seria essa construção das placas e se seria uma atividade apenas para a disciplina de matemática. Foi acordado com a direção da escola que, após o retorno das férias, iríamos conseguir vivenciar essa etapa. De forma geral, toda a SD teve o seu objetivo alcançado, até mesmo a sua etapa não aplicada, pois se conseguimos motivar os alunos a cerca do Braille, podemos dizer que fizemos uma parte do nosso trabalho.

Considerações Finais

Podemos dizer então que os nossos objetivos quanto ao ensino de matemática foram satisfatórios e alcançaram o esperado, os alunos aprenderam Análise Combinatória. Voltando agora a nossa pergunta que nos trouxe até aqui, mostramos que é possível trabalhar um conteúdo matemático pouco explorado de uma forma onde o aluno se sinta imerso na atividade e aprenda matemática de modo não tradicional. Não conseguimos trazer em sua completude o que foi proposto nas 4 (quatro) etapas da Sequência Didática, mas a utilização de uma SD facilita essa empregabilidade da modelagem matemática e a interação da mesma com outras disciplinas, algo que se torna importante para o trabalho em uma escola, além de poder trazer os conteúdos para perto do aluno, destrói as paredes que cercam as disciplinas e fazem com que a escola seja para o aluno um lugar não só para ele aprender conteúdos, mas também para aprender sobre a sociedade e as necessidades que ela precisa, deixamos então a proposta de aplicação e os indícios de que essa forma de trabalho tem sim sucessos educacionais. Conseguimos deixar a aula de matemática mais dinâmica e acessível para os alunos trazendo exemplos interessantes, o papel para o professor é sempre buscar a melhor forma para se trabalhar com o aluno. Como profissional, a pretensão de ser chamado de educador matemático e a busca por trabalhos e o estudo de conteúdos pouco trabalhados, trás tanto para mim, quanto para outros professores uma ideia de como se trabalhar e tratar a matemática em sala de aula. A para aquela pergunta “como deixar a aula de matemática menos odiada?” deixamos para você leitor encontrar a resposta que mais se encaixe para a sua realidade.

Referências Bibliográficas

- [1] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria À Prática**. 23 ed. Campinas-SP, Papirus, 2012.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/consideracoes-sobre-a-organizacao-curricular>. Acessado em: 03/04/2022.
- [3] MORGADO, Augusto César. In: LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César **A matemática do Ensino Médio**. 7 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2016. v.2, cap.4, p.81,93.
- [4] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio**. Cuiabá-MT, Central de Texto, 2013.
- [5] MORGADO, Augusto César. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro, IMPA, 1991.
- [6] MALAGUTTI, Pedro Luiz. **Atividades de Contagem a partir da Criptografia**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.
- [7] POMBO, Olga. **Interdisciplinaridade e integração dos saberes**. Liinc em revista, 2005. v.1, n.1.
- [8] LUCIANO, Dennis; PRICHETT, Gordon. **Cryptology: From Caesar ciphers to public-key cryptosystems**. The College Mathematics Journal, 1987. 18,1, p.2,17
- [9] FAZENDA, Ivani CA. (org.). **Didática e Interdisciplinaridade**. Campinas-SP, Papirus, 1998.
- [10] ZABALA, Antoni **A Prática Educativa : Como Ensinar**. Artmed, 1998.
- [11] BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5 ed. São Paulo, 1999.
- [12] POLYA, GEORGE. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro, Interciência, 1975.
- [13] BRASIL. Ministério da Educação. **Grafia Braille Para a Língua Portuguesa** . 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article/192-secretarias-112877938/seesp-esducacao-especial-2091755988/12670-grafia-braille-para-a-lingua-portuguesa>. Acessado em 12/06/2022.

-
- [14] Sing, Simon. **The code book**. New York, vol.7 Singh, Simon. The code book. Vol. 7. New York: Doubleday, 1999.
- [15] Morman, Edward T. **The First Publication of the Braille Code: Louis Braille's 1829 Procedure for Writing Words, Music, and Plain-song in Dots**. National Federation of the Blind Jernigan Institute. Disponível em: https://www.duxburysystems.org/downloads/library/history/lb_1829/nfb_intro.htm. Acessado em: 10/06/2022.

Apêndice A

Frases utilizadas na atividade

Frases para a atividade (4 palavras)						
1	a	pasta	está	cheia		
2	espero	que	tudo	acabe		
3	comemorar	as	pequenas	coisas		
4	Nessa	casa	tem	felicidade		
5	comprei	um	sapato	novo		
6	Só	você	pode	comprar		
7	Quero	comer	batata	frita		
8	Esteja	muito	bem	servido		
9	Papéis	amassados	guardam	rancores		
10	Um	dia	vamos	lembrar		
11	Flores	secas	morrem	tristes		
12	a	matemática	do	amor		
13	O	cachorro	come	muito		
14	Confia	que	é	sucesso		
15	Mente	cheia	coração	vazio		
16	Eu	tenho	um	sanduíche		
17	Da	varanda	te	vejo		
18	memórias	que	custam	apagar		
19	Embalado	numa	dança	sensual		
20	Em	retalhos	de	cetim		
Frases para a atividade (5 palavras)						
1	Cada	macaco	no	seu	galho	
2	Toda	ação	serve	de	aprendizado	
3	Estudar	matemática	talvez	seja	fácil	
4	Teus	sinais	não	me	confundem	
5	A	cada	dia	novas	aventuras	
6	Aqui	estamos	sem	nossos	país	
7	Tu	não	gostou	do	espaço	
8	Ainda	te	peço	em	casamento	

9	Meu	nome	também	significa	esperança	
10	Flores	de	plásticoo	não	morrem	
11	Ponha	tudo	em	seu	lugar	
12	O	meu	lugar	está	aí	
13	Foi	você	mesmo	quem	pediu	
14	Ontem	sonhei	que	você	voltava	
15	Eu	sempre	penso	no	fim	
16	Eu	não	tenho	outra	pessoa	
17	Vamos	assistir	um	bom	filme	
18	Como	vou	deixar	de	amar	
19	Ainda	a	tempo	para	pensar	
20	Nunca	deixei	de	te	amar	
Frases para a atividade (6 palavras)						
1	As	coisas	não	funcionam	como	queremos
2	Time	que	está	ganhando	não	muda
3	Eu	marquei	como	favorito	seu	sorriso
4	Borboleta	faz	valsa	rítmica	nas	flores
5	Nosso	amor	puro	pulou	o	muro
6	Que	não	venha	de	nós	dois
7	Eu	não	sei	nada	de	você
8	Te	odeio	por	quase	um	segundo
9	Fica	aqui	é	o	teu	lugar
10	Sem	tomar	cuidado	com	o	fim

Apêndice B

Ficha de registro Atividade 1

Escola:
Alunos(as):
Turma: 2º ano ____
Ficha de Registro para o grupo
1. Escreva na linha abaixo a frase que formou o grupo:
2. Escreva no espaço abaixo o processo de codificação dessa frase, utilizando a cifra de César.

3. Escreva a mensagem codificada por outro grupo:

4. Escreva no espaço abaixo o processo de decodificação da frase do item 3, utilizando a cifra de César.

5. Escreva abaixo a mensagem que era desse outro grupo:

Apêndice C

Ficha de registro da atividade avaliativa

[illegible]

3. Ainda com a mesma palavra da primeira questão, quantas formas teríamos se agora queremos que as letras “a” e “e” não fiquem juntas?

4. Agora, para a frase “Vou deixar a vida me levar” de quantas formas que podemos cifrar esta frase?

Apêndice D

Ficha de registro da atividade avaliativa em grupo

[illegible]