



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**A TRANSFORMADA DE FOURIER: DA MOTIVAÇÃO À
EQUAÇÃO DO CALOR NUMA BARRA INFINITA**

Evellyn Karoline Alves Freitas Basílio

Orientadora: Dra. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Evellyn Karoline Alves Freitas Basílio

**A TRANSFORMADA DE FOURIER: DA MOTIVAÇÃO À
EQUAÇÃO DO CALOR NUMA BARRA INFINITA**

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Orientadora: Profa. Dra. Lorena Brizza Soares Freitas

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

B312t Basilio, Evellyn Karoline Alves Freitas.
A transformada de Fourier: da motivação à equação do calor numa barra infinita / Evellyn Karoline Alves Freitas Basilio. – Recife, 2024.
73 f.; il.

Orientador(a): Lorena Brizza Soares Freitas.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura
em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Análise de Fourier. 2. Espaço de Schwartz. 3. Equações Diferenciais Parciais. 4. Equação do calor I. Freitas, Lorena Brizza Soares, orient. II. Título

CDD 510

Evellyn Karoline Alves Freitas Basílio

A TRANSFORMADA DE FOURIER: DA MOTIVAÇÃO À EQUAÇÃO DO CALOR NUMA BARRA INFINITA

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como componente optativo para obtenção de grau de licenciado.

Trabalho aprovado. Recife, 02 de outubro de 2024:

Lorena Brizza Soares Freitas
DM/UFRPE
Orientadora

Professora
Yane Lísley Ramos Araújo - DM/UFRPE

Professora
Michele Mendes Novais - DM/UFRPE

Professor
Eudes Mendes Barboza - DM/UFRPE
(Suplente)

Recife

2024

Dedico este trabalho às minhas queridas avós, Edna e Maria das Graças. Maria das Graças, cuja memória, luta e amor continuam a me inspirar, mesmo ausente fisicamente. Edna, que sempre esteve ao meu lado com amor incondicional, carinho e apoio. Ambas têm um lugar especial em meu coração e são eternamente admiradas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, minha força, direção e baluarte em todos os momentos. Nos dias de maior dor, quando pensei em desistir, Ele renovou minha fé e esperança, lembrando-me de que tudo acabaria bem. A Ele dedico toda a minha gratidão e louvor.

Aos meus pais, Cristina e Claudemir, minha eterna gratidão. À minha mãe, Cristina, por cuidar de mim com tanto zelo e dedicação, garantindo que eu pudesse me concentrar nos estudos e no trabalho, aliviando-me de preocupações com as tarefas de casa. Por sempre acreditar em mim mais do que qualquer outra pessoa, incentivando-me a estudar desde a infância e abrindo caminhos que ela mesma não teve oportunidade de trilhar. Ao meu pai, Claudemir, por me ensinar o valor da determinação e do trabalho árduo, mesmo diante das adversidades, sempre com honestidade e dignidade. Obrigada por transmitir os princípios de Cristo, que foram o alicerce da minha trajetória, e por sacrificar tanto para custear grande parte dos meus estudos. Sou imensamente grata por todo o amor e apoio que vocês me dedicaram, cada um à sua maneira.

Às minhas avós e aos meus avôs, dedico minha sincera gratidão. À vovó Edna, com seu sorriso encantador e jeito carinhoso, que sempre me mostrou como a simplicidade pode ser fonte de felicidade. À vovó Graça, cuja ausência este ano deixou saudades, mas que deixou também as mais lindas lembranças de uma infância e adolescência repleta de amor e memórias inesquecíveis com meus primos. Ao meu avô Edvaldo, por sempre reforçar o quanto acredita em mim e por me inspirar a lutar por um mundo melhor. Ao meu avô Cláudio, por me proporcionar momentos de descanso e renovação em sua casa nos finais de semana durante a graduação.

Ao meu querido e amigo Filipe Andrade, que foi indispensável em todo esse processo. Obrigada pelo apoio constante, incentivo e pela ajuda valiosa nos momentos mais difíceis. Quando pensei que não daria conta, você estava lá para me mostrar que era possível. Sou grata por todas as dúvidas que tirou, pelos momentos especiais de distração e aprendizado, e, acima de tudo, por sua amizade, carinho e amor. Obrigada por acreditar em mim.

Às minhas irmãs, Emily Vitória e Maria Raiza, meu carinho e agradecimento especial. À Emily, minha parceira de vida, obrigada por estar ao meu lado em todos os momentos, por acreditar em mim e me apoiar incondicionalmente. À pequena Raiza, minha irmã de

coração, obrigada por encher minha vida de alegria, amor e por me ensinar a ver o mundo com os olhos puros de uma criança. Vocês duas são presentes preciosos em minha vida.

À minha querida orientadora, Lorena Brizza, minha profunda gratidão. Além de orientadora, foi uma verdadeira tutora, amiga e inspiração ao longo da graduação. Obrigada por acreditar em mim, por sua paciência em responder minhas dúvidas, por me ajudar a compreender conceitos complexos e por ser um exemplo de dedicação e excelência em seu trabalho. Sua frase “vai dar certo” ecoou nos momentos em que eu mais precisei. Espero um dia ser pelo menos uma fração da orientadora que você foi para mim.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de curso, em especial Marcos Vinícius, Jobson Thalisson e Jefferson Matheus, que estiveram ao meu lado nos estudos, nas reuniões para resolver listas, nas preparações para as provas e nos desafios ao longo da graduação. Sou grata por compartilharem comigo momentos de aprendizado, companheirismo e alegria. Vocês foram peças fundamentais nessa caminhada.

Ao PET Conexões de Saberes, Ciranda da Ciência, e aos amigos que tive o privilégio de conhecer nesse programa: Rayane Lima, Jhonatan Ramos, Maria Vitória, Jefferson Matheus, Felipe Soeldner e Micael Melo. O PET foi um verdadeiro divisor de águas na minha trajetória acadêmica, e vocês tornaram essa experiência ainda mais especial com a amizade, o apoio, os estudos e as vivências que compartilhamos. Vocês são aquele grupo de amigos que sempre levarei no coração. São as minhas pessoas, e sem vocês, não teria aprendido tudo o que aprendi. Obrigada por fazerem parte dessa história de forma tão significativa.

Aos professores que cruzaram meu caminho, em especial Eudes Mendes, Yane Lísley, Silvestre, Geovani, Rebeka Oliveira e Lícia Maia, meu sincero agradecimento. Vocês me inspiraram e fortaleceram minha certeza de que escolhi a profissão certa. Obrigada por cada ensinamento e incentivo.

Por fim, agradeço ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pelo apoio financeiro, à Universidade Federal Rural de Pernambuco e ao Departamento de Matemática, por me proporcionarem uma formação acadêmica sólida e experiências inesquecíveis. Descobri que estudar Matemática é uma das maiores alegrias da minha vida.

"Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês", diz o Senhor, "planos de fazê-los prosperar e não de lhes causar dano, planos de dar-lhes esperança e um futuro"(Jeremias 29:11)

Resumo

Este trabalho apresenta a Transformada de Fourier, suas propriedades e aplicações, com foco no espaço das funções de decaimento rápido, conhecido como espaço de Schwartz. A Transformada de Fourier é uma ferramenta importante na análise matemática, utilizada para encontrar soluções de equações diferenciais parciais. Através dela, equações diferenciais podem ser convertidas em equações algébricas mais manejáveis. A metodologia adotada baseia-se na análise do espaço de Schwartz e suas propriedades, que são essenciais para garantir o comportamento adequado das funções no contexto da Transformada de Fourier. Em seguida, exploramos as principais propriedades da Transformada de Fourier, tais como linearidade, diferenciabilidade e a aplicabilidade no espaço de Schwartz, além de abordarmos sua Transformada Inversa. O trabalho foi desenvolvido a partir de uma pesquisa em referências bibliográficas e materiais teóricos listados ao final deste trabalho. Os resultados obtidos ressaltam a importância da Transformada de Fourier para a determinação da solução da equação do calor em uma barra infinita, auxiliando na identificação da solução candidata para a equação diferencial parcial associada. Ao final, esperamos que este trabalho ofereça uma visão clara e abrangente da Transformada de Fourier, suas propriedades e suas aplicações teóricas, evidenciando - a como uma ferramenta essencial na análise.

Palavras-chaves: Análise de Fourier; Espaço de Schwartz; Equações Diferenciais Parciais; Equação do Calor.

Abstract

This paper presents an overview of the Fourier Transform, its properties and applications, with a particular emphasis on the space of rapidly decreasing functions, which is known as the Schwartz space. The Fourier transform is a fundamental tool in mathematical analysis, employed for the resolution of partial differential equations. This enables differential equations to be converted into more readily manageable algebraic equations. The methodology adopted is based on an analysis of the Schwartz space and its properties, which are essential to ensure the proper behavior of functions in the context of the Fourier transform. Subsequently, the principal properties of the Fourier Transform are examined, including its linearity, differentiability and applicability within the context of Schwartz space, as well as its inverse transform. This work was developed based on an investigation of bibliographical references and theoretical materials listed at the end of this paper. The results obtained demonstrate the significance of the Fourier Transform in determining the solution to the heat equation in an infinite bar, thereby facilitating the identification of a potential solution for the associated partial differential equation. It is our intention that this work provides a clear and comprehensive overview of the Fourier Transform, its properties and its theoretical applications, thus establishing it as an essential tool in analysis.

Keywords: Fourier analysis; Schwartz space; Partial Differential Equations; Heat Equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$	21
Figura 2 – Gráfico de $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	26
Figura 3 – Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	27
Figura 4 – Gráfico de $f(x) = x^2$	28
Figura 5 – Gráfico de $f(x) = x^3$	29
Figura 6 – Barra de comprimento L e secção transversal A	35
Figura 7 – Gráfico da função onda quadrada $f(x)$	41
Figura 8 – Gráfico da série de Fourier da onda quadrada para $N = 5$	43
Figura 9 – Gráfico da série de Fourier da onda quadrada com $N = 10$	43
Figura 10 – Gráfico da função pulso	49

Sumário

1	DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES	21
1.1	Tópicos de Funções	21
1.1.1	Funções Periódicas	21
1.1.2	Funções Seccionalmente Contínuas	23
1.1.3	Funções Pares e Ímpares	25
1.1.4	Funções Integráveis e Absolutamente Integráveis	29
1.1.5	Teste M de Weierstrass	31
1.2	Tópicos de séries de Funções	32
1.2.1	Convergência pontual	33
1.2.2	Convergência uniforme	33
1.2.3	Convergência absoluta	33
2	SÉRIES DE FOURIER	35
2.1	Motivação das séries de Fourier	35
2.2	Definição das séries de Fourier e Exemplos	39
2.3	Convergência das séries de Fourier	40
2.4	Identidade de Euler e a Formulação Complexa da série de Fourier	44
3	A TRANSFORMADA DE FOURIER	47
3.1	Motivação da Transformada de Fourier	47
3.2	Definição da Transformada de Fourier	48
3.3	Espaço de Schwartz (\mathcal{S})	51
3.4	Propriedades da Transformada de Fourier	56
4	ANÁLISE DA EQUAÇÃO DO CALOR USANDO A TRANSFORMADA DE FOURIER	63
5	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

Introdução

A análise de Fourier é um campo fundamental da matemática, com raízes que remontam ao século XIX, quando Joseph Fourier estudou a propagação de calor em uma barra. Duas ferramentas centrais da Teoria de Fourier são as séries de Fourier e a Transformada de Fourier. Este trabalho explora detalhadamente a Transformada de Fourier, começando pelos conceitos básicos das séries de Fourier. Inicialmente desenvolvidas para descrever fenômenos periódicos, as séries de Fourier representam funções como combinações infinitas de senos e cossenos ponderados por coeficientes específicos.

Além disso, abordamos a formulação complexa de Fourier, que é a base da motivação da Transformada. A Transformada de Fourier surge como uma extensão natural desses conceitos, oferecendo uma formulação complexa que amplia a análise para funções não periódicas. Este trabalho examina a definição formal da Transformada de Fourier, especialmente nos espaços \mathcal{L}^1 e de Schwartz, e explora suas propriedades fundamentais, como a linearidade e a condição de integrabilidade absoluta. A compreensão dessas propriedades é crucial para garantir que a Transformada seja bem definida e para a existência da Transformada Inversa de Fourier. O estudo inclui a análise das funções de decaimento rápido, pertencentes ao espaço de Schwartz, que são importantes para entender a convergência e as propriedades da Transformada em contextos específicos. A abordagem teórica é complementada com demonstrações de teoremas e proposições, oferecendo uma base sólida para a aplicação da Transformada de Fourier.

Nosso objetivo é fornecer uma compreensão aprofundada dos fundamentos da Transformada de Fourier e suas aplicações práticas, como a candidata a solução da equação do calor em uma barra infinita. Exploramos os conceitos básicos e propriedades da Transformada, investigamos as condições que asseguram sua definição adequada, e analisamos uma aplicação para ilustrar sua relevância e eficácia. O trabalho está dividido em quatro capítulos.

Este trabalho é fruto de uma Iniciação Científica (IC) desenvolvida no âmbito do Programa de Educação Tutorial (PET) Conexões de Saberes – Ciranda da Ciência, financiada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e orientada pela Profa. Dra. Lorena Brizza. O objetivo principal foi estudar a Análise de Fourier como

ferramenta para a solução da equação do calor em uma barra infinita.

No que se segue, no Capítulo 1, apresentamos as definições e resultados preliminares necessários para o estudo da Transformada de Fourier, abordando funções periódicas, funções seccionalmente contínuas, funções pares e ímpares, funções integráveis e absolutamente integráveis, bem como tópicos sobre séries de funções, como convergência pontual, uniforme e absoluta, acompanhados de definições, proposições e exemplos ilustrativos. No Capítulo 2, introduzimos as séries de Fourier, explorando sua motivação a partir da equação do calor em uma barra finita, definindo-as formalmente e incluindo exemplos e a formulação complexa da série, além de resultados teóricos que sustentam o estudo. No Capítulo 3, discutimos a Transformada de Fourier, incluindo sua motivação como uma extensão natural das séries de Fourier, sua definição, propriedades fundamentais e o espaço de Schwartz (\mathcal{S}), acompanhados de exemplos. Por fim, no Capítulo 4, aplicamos a Transformada de Fourier na análise e solução da equação do calor em uma barra infinita, utilizando as propriedades e resultados previamente estabelecidos para demonstrar a eficiência dessa ferramenta no estudo de EDPs.

1 Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo, iremos considerar funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem certas condições. Para isso, definiremos conceitos fundamentais para a compreensão e aplicação das séries de Fourier, bem como da Transformada de Fourier. Abordaremos funções periódicas, continuidade, paridade e integrabilidade. As definições e conceitos utilizados neste capítulo são baseados em [Figueiredo^{\[1\]}](#), [Stewart^{\[2\]}](#) e [Lima^{\[3\]}](#).

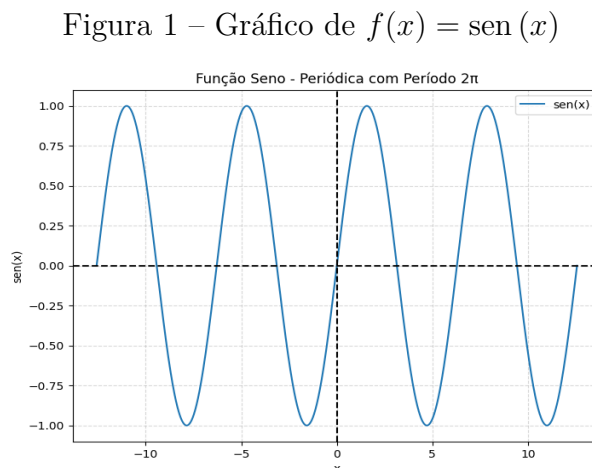
1.1 Tópicos de Funções

1.1.1 Funções Periódicas

Definição 1.1.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $T \neq 0$. O menor valor positivo T que satisfaz essa condição é denominado período fundamental da função.

Contudo, é comum utilizar a expressão “período” para se referir a esse período fundamental.

Exemplo 1.1.1. A função $\text{sen}(x)$ é periódica de período 2π .



Fonte: autoria própria.

Solução. Para verificarmos isso, utilizaremos a fórmula da soma de ângulos para o seno

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \operatorname{sen}(b). \quad (1.1)$$

Chamaremos $a = x$ e $b = 2\pi$. Assim, substituindo em (1.1), temos

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \operatorname{sen}(2\pi).$$

Como $\cos 2\pi = 1$ e $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, então

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x).$$

Agora, iremos mostrar que ele é o menor período positivo da função $\operatorname{sen} x$.

Iremos utilizar a fórmula de adição de ângulos em (1.1) para mostrar que, para qualquer valor $T < 2\pi$, não podemos ter $\operatorname{sen}(x + T) = \operatorname{sen}(x)$ para todos os valores de x . Suponha que $T < 2\pi$, seja um período da função seno. Isso implica que

$$\operatorname{sen}(x + T) = \operatorname{sen}(x), \quad (1.2)$$

Para todo x . Aplicando a identidade (1.1), temos

$$\operatorname{sen}(x + T) = \operatorname{sen}(x) \cos(T) + \cos(x) \operatorname{sen}(T). \quad (1.3)$$

Como assumimos que T é um período, substituímos a igualdade (1.2) em (1.3). Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(x) \cos(T) + \cos(x) \operatorname{sen}(T) \\ \implies \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) \cos(T) &= \cos(x) \operatorname{sen}(T). \end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas, temos

$$\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(T)) = \cos(x) \operatorname{sen}(T) \quad (1.4)$$

Observe que, para que a equação (1.4) seja verdadeira para todos os valores de x , iremos considerar dois casos.

Caso 1: Se $\operatorname{sen}(T) = 0$, então T deve ser um múltiplo inteiro de π . Além disso, para T ser um período e menor que 2π a única possibilidade seria $T = \pi$. No entanto, se utilizarmos a expressão (1.1) e chamarmos $a = x$ e $b = \pi$, teremos

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = \operatorname{sen}(x) \cos(\pi) + \cos(x) \operatorname{sen}(\pi).$$

Mas, sabemos que $\cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$. Daí,

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x).$$

Portanto, $T = \pi$ não satisfaz $\operatorname{sen}(x + \pi) = \operatorname{sen}(x)$, o que significa que π não é um período.

Caso 2: Se $\operatorname{sen}(T) \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (1.4) por $\operatorname{sen}(T)$ para obter

$$\frac{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos(T))}{\operatorname{sen}(T)} = \cos(x). \quad (1.5)$$

Sabemos que, para que (1.5) seja verdadeira, ambos os lados da igualdade precisam ser iguais. No entanto, a função $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são diferentes e não podem ser igualadas para todos os valores de x . Então, a única solução possível é quando $\sin(T) \neq 0$ e $\cos(T) = 1$, o que ocorre apenas quando $T = 2\pi$. Logo, para qualquer $T < 2\pi$, não podemos satisfazer a equação $\sin(x + T) = \sin(x)$ para todo x . Isso demonstra que o período fundamental da função seno é 2π . Portanto, pela definição (1.1.1), a função $\sin x$ é periódica.

Observação 1.1.1. Essa propriedade é fundamental na análise de séries de Fourier, pois a construção dessas séries depende do comportamento periódico das funções.

Após compreender o conceito de funções periódicas e sua importância nas séries de Fourier, é importante avançarmos para outro aspecto fundamental na análise dessas funções. Na próxima seção, discutiremos a continuidade das funções, cujas propriedades são fundamentais para garantir a convergência das séries de Fourier, mesmo em intervalos onde a função pode apresentar descontinuidades.

1.1.2 Funções Seccionalmente Contínuas

Definição 1.1.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1.6)$$

Observe que a definição implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a :

- (I) $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f);
- (II) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- (III) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Para ilustrar o cálculo da continuidade de uma função usando a definição acima, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.2. Considere uma função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1, \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Vejam se f é contínua no ponto $x = 1$.

Solução. Para verificar a continuidade dessa função no ponto $x = 1$, precisamos verificar as três condições de continuidade. Note que, a condição (I),

$$f(1) = 2(1) - 1 = 1$$

é válida. Agora iremos verificar a condição (II). Daí,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1.$$

Como os limites pela esquerda e pela direita são iguais, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

existe. Por fim, verificando a condição (III), temos

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Como todos os critérios são satisfeitos, a função é contínua em $x = 1$.

Enquanto no conceito de continuidade usual é necessário que a função não apresente descontinuidades em nenhum ponto de seu domínio, existe um conceito mais flexível que permite descontinuidades em certos pontos específicos, desde que a função permaneça contínua em intervalos delimitados. Este conceito é o de funções seccionalmente contínuas, que exploraremos a seguir.

Definição 1.1.3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se, para qualquer intervalo limitado $[a, b]$, existem pontos $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ onde f é contínua em cada subintervalo aberto (a_j, a_{j+1}) para $j = 1, \dots, n - 1$.

Nos pontos de junção a_j , a função tem descontinuidades de primeira espécie, o que significa que os limites laterais $f(a_j^+)$ e $f(a_j^-)$ existem e são finitos. Esses limites são definidos como:

$$f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x), \quad \text{limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ se aproxima de } a_j \text{ pelo lado direito.}$$

$$f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x), \quad \text{limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ se aproxima de } a_j \text{ pelo lado esquerdo.}$$

Para ilustrar como podemos aplicar a definição acima, considere o seguinte exemplo

Exemplo 1.1.3. A função sinal de x , definida como $\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

é seccionalmente contínua.

Solução. Iremos analisar a função sinal em seus três intervalos principais: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ e no ponto de junção $x = 0$. Observe que, para $x < 0$, a função é

$$\text{sign}(x) = -1,$$

é uma constante e, portanto, contínua no intervalo $(-\infty, 0)$. De maneira análoga, para $x > 0$, a função é

$$\text{sign}(x) = 1,$$

que também é uma constante e, portanto, contínua no intervalo $(0, \infty)$, o que satisfaz a primeira parte da Definição 1.1.3. Agora, iremos analisar os limites laterais de $\text{sign}(x)$ no ponto de junção $x = 0$. Daí,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign}(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign}(x) = 1.$$

Note ainda que, o valor da função no ponto de junção é

$$\text{sign}(0) = 0.$$

Observe que, como os limites laterais nos pontos de junção existem e são finitos, mas diferem do valor da função no ponto de junção, há uma descontinuidade de primeira espécie. Portanto, pela Definição 1.1.3, a função $\text{sign}(x)$ é seccionalmente contínua.

Definição 1.1.4. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função f' também for seccionalmente contínua.

1.1.3 Funções Pares e Ímpares

Definição 1.1.5. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de par se, para todo $x \in \mathbb{R}$, a seguinte condição é satisfeita

$$f(x) = f(-x). \tag{1.7}$$

Vamos aplicar a definição de função par ao exemplo a seguir

Exemplo 1.1.4. A função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par.

Solução. Dada a função cosseno definida como $f(x) = \cos(x)$. Queremos mostrar que

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para isso, usamos a identidade trigonométrica para o cosseno da diferença de dois ângulos

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b).$$

Note que, se $a = 0$ e $b = x$, teremos

$$\cos(0 - x) = \cos(0)\cos(x) + \text{sen}(0)\text{sen}(x).$$

Como $\cos(0) = 1$ e $\text{sen}(0) = 0$, temos que

$$\cos(-x) = 1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot \text{sen}(x) \implies \cos(-x) = \cos(x).$$

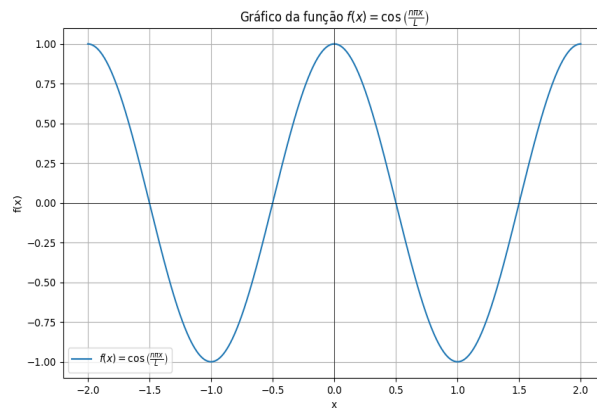
Portanto, a função $f(x) = \cos(x)$ é par, conforme a Definição 1.1.5.

Observação 1.1.2. A função cosseno é par para qualquer ângulo x , o que confirma que a propriedade de paridade se mantém independentemente do valor específico do ângulo.

Para ver isto, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.5. A função $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, onde $L > 0$ é um parâmetro que representa o semi-período fundamental da função, está definida para todo $n = 1, 2, \dots$

Figura 2 – Gráfico de $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$



Fonte: autoria própria.

Solução. Note que,

$$f(-x) = \cos\left(\frac{n\pi(-x)}{L}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi x}{L}\right).$$

Pela observação 1.1.2, temos que

$$\cos\left(\frac{-n\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Então,

$$f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(-x).$$

Logo, como $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos concluir f é uma função par.

Definição 1.1.6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de ímpar se, para todo $x \in \mathbb{R}$ a seguinte condição é satisfeita

$$f(x) = -f(-x). \tag{1.8}$$

Vamos aplicar a definição de função ímpar ao exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.6. A função $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função ímpar.

Solução. Iremos utilizar uma abordagem semelhante à empregada no exemplo 1.1.4. Para isso, usamos a identidade trigonométrica para o seno da diferença de dois ângulos

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b).$$

Note que, se $a = 0$ e $b = x$, teremos

$$\text{sen}(0 - x) = \text{sen}(0) \cos(x) - \cos(0) \text{sen}(x).$$

Como $\cos(0) = 1$ e $\text{sen}(0) = 0$, temos que

$$\text{sen}(-x) = 0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot \text{sen}(x) \implies \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x).$$

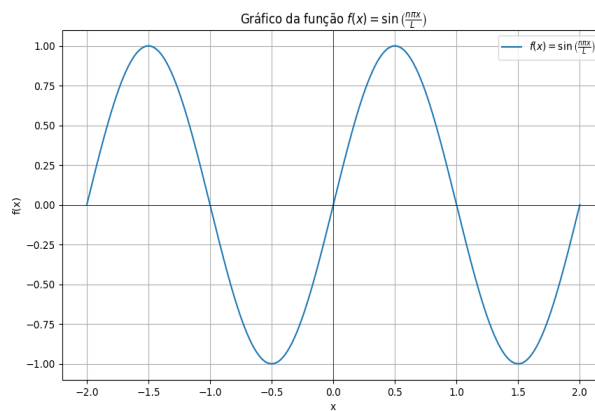
Portanto, pela Definição 1.1.6, temos que $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função ímpar.

Observação 1.1.3. A função seno é ímpar para qualquer ângulo x , o que confirma que a propriedade de paridade se mantém independentemente do valor específico do ângulo.

Para ver isto, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.7. A função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ para todo $n = 1, 2, \dots$

Figura 3 – Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$



Fonte: autoria própria.

Solução. Note que,

$$g(-x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi(-x)}{L}\right) = \text{sen}\left(-\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Usando a observação 1.1.3, temos que

$$g(-x) = \text{sen}\left(-\frac{n\pi x}{L}\right) = -\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Então,

$$g(-x) = -\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -g(x).$$

Logo, Como $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos concluir que g é uma função ímpar.

Agora, apresentaremos duas proposições importantes sobre as paridades das funções, que utilizaremos posteriormente.

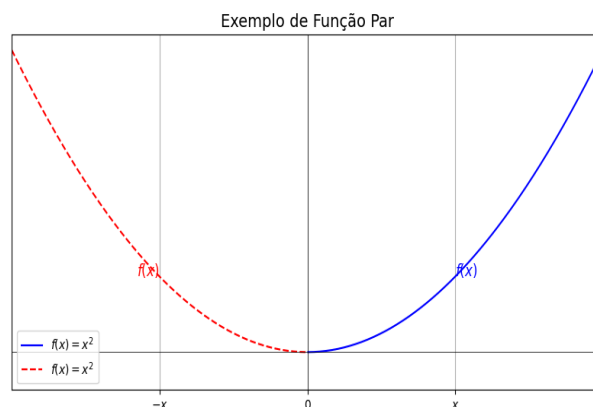
Proposição 1.1.1. Considere duas funções f e g . Então, as seguintes propriedades são verdadeiras:

- (I) Se f e g são funções pares, então $f + g$ também é uma função par.
- (II) Se f e g são funções ímpares, então $f + g$ também é uma função ímpar.
- (III) Se f e g são funções pares, então $f \cdot g$ também é uma função par.
- (IV) Se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ é uma função par.
- (V) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f \cdot g$ é uma função ímpar.

As demonstrações das proposições acima decorrem da definição de funções pares e ímpares. Detalhes completos dessas demonstrações podem ser encontrados na referência [Figueiredo^{\[1\]}](#).

Comentário: O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico exibe simetria em relação ao eixo y . Em outras palavras, se traçarmos o gráfico de uma função f para $x \geq 0$, podemos obter o gráfico completo simplesmente refletindo essa parte em torno do eixo y . Essa simetria implica que, para cada ponto $(x, f(x))$ no gráfico, o ponto correspondente $(-x, f(x))$ também estará no gráfico, como podemos observar na figura a seguir

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = x^2$

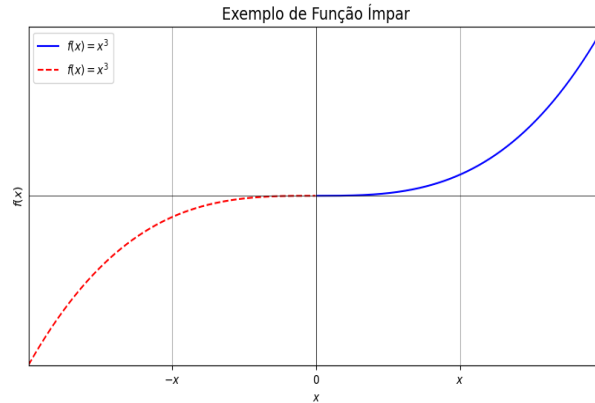


Fonte: autoria própria.

Analogamente, o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem. O que significa que, se considerarmos o gráfico de f para $x \geq 0$, podemos obter o gráfico completo girando 180° o trecho que temos em torno da origem. Isso implica que, para cada

ponto $(x, f(x))$ no gráfico, o ponto correspondente $(-x, -f(x))$ também estará presente no gráfico. Vejamos a figura a seguir.

Figura 5 – Gráfico de $f(x) = x^3$



Fonte: autoria própria.

1.1.4 Funções Integráveis e Absolutamente Integráveis

Definição 1.1.7. Considere uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um intervalo limitado. Existem dois casos a considerar para determinar se f é integrável.

(I) Função Limitada: Se a função f é limitada em $[a, b]$, isto é, existe um número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então f é integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores.

Essa condição significa que podemos aproximar a área sob a curva de f com uma precisão arbitrária usando somas de Riemann, resultando em um valor único para a integral de f em $[a, b]$.

(II) Função Não Limitada:

Se a função f não é limitada em $[a, b]$, ou seja, pode ter valores arbitrariamente grandes, então f é integrável (nesse caso, a integral é chamada de integral imprópria) se:

- O intervalo $[a, b]$ pode ser decomposto em um número finito de subintervalos I_1, I_2, \dots, I_n , onde $I_k = [a_k, b_k]$.
- Para cada subintervalo I_k e para todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$, a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$.
- Os seguintes limites existem:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x) dx. \quad (1.9)$$

Isso significa que mesmo que f tenha pontos de descontinuidades ou uma quantidade finita deles em $[a_k, b_k]$, podemos aproximar a integral de f nos subintervalos removendo arbitrariamente pequenas vizinhanças dessas descontinuidades. Neste caso, quando f não é limitada, a integral imprópria de f sobre $[a, b]$ é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx. \quad (1.10)$$

Definição 1.1.8. Uma função f é chamada de absolutamente integrável se $|f(x)|$ for integrável no sentido de (I) ou (II) acima. Isso significa que a integral do módulo da função, $\int_a^b |f(x)| dx$, existe e é finita.

Proposição 1.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(I) Se f é par e integrável em qualquer intervalo limitado. Então,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (1.11)$$

(II) Se f é ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (1.12)$$

Definição 1.1.9. O espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existem é denotado por $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Definição 1.1.10. Dados a, b e $c \in \mathbb{R}$, considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para lidar com integrais sobre intervalos ilimitados, a integral imprópria de f sobre $[a, \infty)$ é definida como

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.13)$$

se o limite existir. De forma análoga, para o intervalo $(-\infty, b]$, a integral é definida como

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.14)$$

se o limite existir. Para o intervalo $(-\infty, \infty)$, a integral é dada por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx, \quad (1.15)$$

onde c é um ponto de divisão arbitrário, se ambas as integrais impropriamente existirem e forem finitas.

Definição 1.1.11. Uma função f é chamada de absolutamente integrável em um intervalo ilimitado se

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx \quad (1.16)$$

for finita.

Definição 1.1.12. Seja $f : I \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sendo I um intervalo limitado ou não e para cada x fixado, a função $f(x, y)$ seja integrável. Estaremos interessados em funções do tipo

$$\Psi(x) = \int_a^\infty f(x, y)dy < \infty. \quad (1.17)$$

A integral imprópria $\Psi(x)$ convergirá uniformemente num intervalo $J \subset I$, se dado $\varepsilon > 0$, existir $y(\varepsilon) > a$, tal que para todo $x \in J$, tenhamos

$$\left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x, y)dy \right| < \varepsilon \quad (1.18)$$

1.1.5 Teste M de Weierstrass

Suponha que, para cada x fixado, a função $f(x, y)$ seja \mathcal{L}^1 em $[a, \infty)$. Suponha também, que exista uma função $M : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativa, e integrável, tal que $|f(x, y)| \leq M(y)$, para todo x em J . Então $\Psi(x)$ converge absoluta e uniformemente em J , ou seja, as integrais

$$\int_a^\infty f(x, y)dy \quad \text{e} \quad \int_a^\infty |f(x, y)|dy$$

são uniformemente convergentes em J .

Para nosso estudo das Transformada de Fourier, estaremos interessados em integrais impróprias da forma

$$\int_{-\infty}^\infty f(x, y)dy \quad (1.19)$$

Podemos escrever tal integral como a soma das seguinte integrais

$$\int_0^\infty f(x, y)dy \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 f(x, y)dy.$$

E podemos escrever

$$\int_{-\infty}^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty f(x, y)dy + \int_{-\infty}^0 f(x, y)dy.$$

Diremos que tal integral converge uniformemente se, dado $\varepsilon > 0$, existir $y(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{y(\varepsilon)} f(x, y)dy + \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x, y)dy \right| < \varepsilon,$$

o que equivale a dizermos que cada uma das integrais convergirá uniformemente.

Antes de apresentarmos o resultado a seguir sobre a diferenciabilidade da função $\Phi(x)$, é importante destacar que, em muitos contextos de integração imprópria, estamos interessados em situações onde a troca de operações entre integração e diferenciação é possível. No caso de integrais dependentes de um parâmetro x , a condição de diferenciabilidade de uma função integral é fundamental para garantir que a derivada da integral possa ser expressa pela integral da derivada da função integranda, desde que algumas condições de convergência sejam satisfeitas. Com isso em mente, enunciaremos o seguinte lema, que estabelece as condições sob as quais a função $\Phi(x)$ definida por uma integral pode ser diferenciada em relação a x .

Lema 1.1.1. Diferenciabilidade de Φ .

Seja $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, possuindo derivada parcial $f_x : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, também contínua. Suponha que a integral

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x, y) dy \quad (1.20)$$

convirja e que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy \quad (1.21)$$

convirja uniformemente em \mathbb{R} . Então, Φ é derivável em \mathbb{R} e

$$\Phi'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy. \quad (1.22)$$

Mais geralmente, basta admitir $f(x, y) = g(x, y)K(y)$, onde $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \mathcal{L}^1 e $g, g_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas na variável y .

A condição de integrabilidade absoluta e a integrabilidade com convergência uniforme é crucial para o nosso trabalho. Quando lidamos com funções em intervalos ilimitados, a integrabilidade absoluta garante que a função tenha um comportamento adequado, permitindo que operações como a Transformada de Fourier sejam bem definidas. Por outro lado, a convergência uniforme da integral, por sua vez, assegura que essa adequação se mantenha de maneira consistente ao longo de todo o domínio. Exploraremos esses conceitos com mais detalhes posteriormente.

1.2 Tópicos de séries de Funções

As séries de funções são somas infinitas compostas por termos que dependem de uma variável. Elas desempenham um papel importante na análise matemática, permitindo a representação de funções complexas por meio de funções mais simples, como polinômios ou funções trigonométricas. Um exemplo, que será abordado no próximo capítulo, é a série de Fourier. Nesta seção, definiremos formalmente o que são séries de funções e discutiremos diferentes critérios de convergência.

Definição 1.2.1. Dada uma sequência de funções $f_n(x)$ definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (1.23)$$

A série (1.23) é definida como a função $S(x)$ que resulta da soma infinita dos termos da sequência $f_n(x)$.

A seguir, apresentamos as definições relacionadas à convergência de séries de funções.

1.2.1 Convergência pontual

Definição 1.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente para uma função $f(x)$ em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se, para cada $x \in I$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f(x). \quad (1.24)$$

Exemplo 1.2.1. Um exemplo de uma série de funções que converge pontualmente é a série geométrica de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (1.25)$$

Iremos analisar a convergência pontual desta série no intervalo $I = (-1, 1)$. Note que, para cada $x \in (-1, 1)$, a soma parcial da série é dada por

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \in (-1, 1).$$

Agora, tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}, \quad \text{para } x \in (-1, 1).$$

Portanto, a série 1.25 converge pontualmente para a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $x \in (-1, 1)$.

1.2.2 Convergência uniforme

Definição 1.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para uma função $f(x)$ em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural N tal que, para todo $n \geq N$ e para todo $x \in I$,

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right| < \epsilon. \quad (1.26)$$

1.2.3 Convergência absoluta

Definição 1.2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é dita absolutamente convergente em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ convergir para cada $x \in I$. Em outras palavras,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \quad \text{para todo } x \in I. \quad (1.27)$$

Exemplo 1.2.2. Um exemplo de uma série de funções que é absolutamente convergente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \quad (1.28)$$

iremos analisar a convergência absoluta desta série no intervalo $[-1, 1]$. Para verificar a convergência absoluta, consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2}.$$

Note que, para $|x| \leq 1$, podemos comparar com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que é uma p -série com $p = 2 > 1$ e sabemos que converge. Logo,

$$\frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pela comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2}$ também converge para todo $x \in [-1, 1]$. Portanto, a série (1.28) é absolutamente convergente no intervalo $[-1, 1]$.

Observação 1.2.1. Quando uma série é absolutamente convergente, ela também é uniformemente convergente em I .

Posteriormente, veremos que os critérios de convergência mencionados podem ser estendidos para as séries de Fourier, fornecendo condições suficientes para que essas séries representem a função original de maneira precisa.

Com os conceitos fundamentais estabelecidos, estamos preparados para avançar no tema principal deste trabalho.

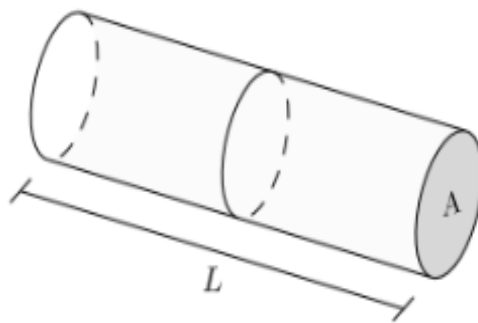
2 séries de Fourier

As séries de Fourier desempenham um papel crucial na análise de fenômenos periódicos, servindo como alicerce para a definição da Transformada de Fourier. Elas permitem a representação de funções periódicas como uma soma infinita de senos e cossenos, cada um multiplicado por um coeficiente específico, conhecido como coeficiente de Fourier. Essa decomposição simplifica a análise e a manipulação das funções originais, facilitando o estudo de suas propriedades e comportamentos. Ao longo desta seção, apresentaremos as definições fundamentais e os principais resultados acerca das séries de Fourier. A teoria mais detalhada pode ser encontrada em [Figueiredo^{\[1\]}](#) e [Boyce e DiPrima^{\[4\]}](#).

2.1 Motivação das séries de Fourier

Considere uma barra feita de material condutor uniforme com comprimento L em que cada seção transversal, à barra, tem área A .

Figura 6 – Barra de comprimento L e seção transversal A



Fonte: [Domingos^{\[5\]}](#)

Suponha que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo que não permita a troca de calor entre o meio e a barra. Entretanto, pode haver troca de calor entre as extremidades da barra e, com isso, a transferência de calor se dará apenas

em uma direção. A dinâmica de transferência do calor é descrita pela equação

$$u_t(x, t) = Ku_{xx}(x, t), \quad (2.1)$$

onde u representa a posição ao longo da barra, t representa o tempo, $K = k/c\rho$ é a difusividade térmica do material da barra e $u(x, t)$ representa a temperatura na posição x no instante de tempo t ao longo da barra. A equação diferencial parcial (2.1) é chamada de Equação do Calor. Buscaremos determinar uma candidata a solução para a Equação do Calor que satisfaça as seguintes condições

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases} \quad (2.2)$$

Para tal, iremos utilizar o método da separação de variáveis e iremos supor que $u(x, t) = X(x)T(t)$. Daí

$$u_{xx} = X''T \quad \text{e} \quad u_t = T'X. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.1), temos

$$Ku_{xx} = u_t \Rightarrow KX''T = T'X \Rightarrow \frac{X''}{X}.$$

Observe que o lado esquerdo da equação é uma função que depende apenas de t e o lado direito é uma função que depende apenas de x . Portanto, ambos os lados devem ser iguais a uma constante, que chamamos de λ . Daí,

$$Ku_{xx} = \frac{T'}{KT} = \lambda.$$

Logo, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T' - \lambda KT = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Aplicando as condições de contorno em $u(x, t) = X(x)T(t)$, temos que $X(0) = 0$, pois

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0.$$

Analogamente, $X(L) = 0$, pois

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Logo, nos deparamos com o seguinte Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Para resolver (2.5), dividiremos em três casos:

- **1º caso** ($\lambda > 0$): Iremos considerar $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$. A equação característica associada à equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (2.5) é

$$r^2 - \mu^2 = 0.$$

Note que, as raízes dessa equação são $r = \pm\mu$. Assim, a solução geral da equação diferencial homogênea é dada por

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}. \quad (2.6)$$

Agora, vamos aplicar as condições de contorno $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ em (2.6).

Para $x = 0$, temos

$$X(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0.$$

Então, $C_1 = -C_2$.

Para $x = L$, temos

$$X(L) = C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L}.$$

Como $C_2 = -C_1$, temos que

$$X(L) = C_1 e^{\mu L} - C_1 e^{-\mu L} = C_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0. \quad (2.7)$$

Observe que, para que (2.7) seja verdadeira, considerando que $\mu > 0$, o termo entre parênteses $e^{\mu L} - e^{-\mu L}$ nunca será zero, logo $C_1 = 0$. Consequentemente $C_2 = 0$, gerando assim soluções nulas.

- **2º caso** ($\lambda = 0$): Considerando que $\lambda = 0$, a equação característica associada à (2.5) é

$$r^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0.$$

Note que, raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = 0$. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea é dada por

$$X(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x. \quad (2.8)$$

Agora, aplicamos as condições de contorno $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ em (2.8).

Para $X(0) = 0$, temos

$$X(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1.$$

Então, $C_1 = 0$.

Para $X(L) = 0$, temos

$$X(L) = C_1 + C_2 \cdot L.$$

Como $C_1 = 0$, temos

$$X(L) = 0 + C_2 \cdot L = C_2 L. \quad (2.9)$$

Para (2.9) seja verdadeira, devemos ter $C_2 = 0$, considerando que $L > 0$. Assim, obtemos $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, gerando novamente soluções nulas.

- **3º caso** ($\lambda < 0$): Iremos considerar $\lambda = -\mu^2$. Daí, a equação característica associada a (2.5) é

$$r^2 = -\mu^2 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\mu i.$$

Note que, a solução geral da equação diferencial homogênea é dada por

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x). \quad (2.10)$$

Agora, vamos aplicar as condições de contorno $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$.

Para $X(0) = 0$, temos

$$X(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1.$$

Logo, $C_1 = 0$.

Para $X(L) = 0$, temos

$$X(L) = C_2 \sin(\mu L) = 0. \quad (2.11)$$

Para que (2.11) seja verdadeira, devemos ter $C_2 = 0$ ou $\sin(\mu L) = 0$.

Supondo que $C_2 \neq 0$, temos que

$$\sin(\mu L) = 0.$$

Então, $\mu L = n\pi$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos:

$$\mu = \frac{n\pi}{L}.$$

Substituindo μ de volta na expressão para λ . Temos que,

$$\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}.$$

Logo, a solução para $X(x)$ será

$$X(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Agora, utilizamos essas informações para resolver a equação para $T(t)$ de (2.4). Daí,

$$T' - K\lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T' + \frac{n^2\pi^2 K}{L^2} T = 0. \quad (2.12)$$

Observe que, (2.12) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e separável. Então, podemos reescreve-la como

$$\frac{dT}{T} = -\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} dt.$$

Integrando ambos os lados, teremos

$$\int \frac{dT}{T} dt = \int -\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} dt$$

O que resulta em

$$\ln(T) = -\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t + C \quad (2.13)$$

Aplicando a exponencial de ambos os lados de (2.13), obtemos

$$T(t) = e^{\ln(T)} = e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t + C} = e^C \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}.$$

Note que, podemos representar e^C como uma constante, digamos C , então

$$T(t) = Ce^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}.$$

Finalmente, como $u(x, t) = X(x)T(t)$, a solução particular é dada por

$$u_n(x, t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}.$$

Portanto, a solução geral para $u(x, t)$ é obtida pela superposição das soluções fundamentais

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t}, \quad (2.14)$$

onde os coeficientes C_n são determinados pela condição inicial $u(x, 0) = f(x)$

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.15)$$

Observação 2.1.1. Ao considerarmos o problema (2.2), chega-se em (2.14). Note que essa candidata a solução descreve o comportamento da temperatura ao longo do tempo e do espaço, conforme determinado pela equação do calor. Assim, a equação (2.14) satisfaz as condições impostas pelo problema. Além disso, nos mostra que as soluções de (2.1) podem ser decompostas em uma série infinita de funções senoidais, cada uma ponderada por um coeficiente que depende das condições iniciais. Essa representação motiva o estudo das séries de Fourier, que permitem expressar funções complexas como somas de funções simples, senos e cossenos.

2.2 Definição das séries de Fourier e Exemplos

Definição 2.2.1. Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Definimos a série de Fourier por

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned}$$

são chamados de coeficientes de Fourier.

Percebe-se que por definição, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, é necessário atender a apenas alguns requisitos para determinar os coeficientes de Fourier e, assim, representar f por meio de sua série de Fourier. A condição mínima para que isso seja possível é que a função f seja integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. No entanto, a obtenção dos coeficientes por si só não assegura que a série represente corretamente a função original. A seguir, daremos condições suficientes sobre a função f que garantem a convergência pontual da série de Fourier.

2.3 Convergência das séries de Fourier

Teorema 2.1 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , definida em (2.16) converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2} [f(a_j^+) + f(a_j^-)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2} [f(a_j^+) + f(a_j^-)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right). \quad (2.17)$$

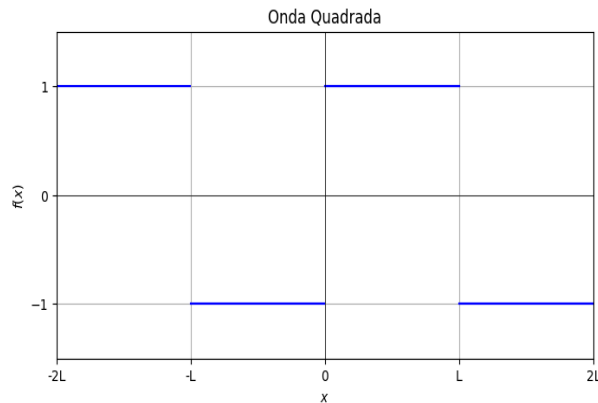
Em outras palavras, este teorema garante que, sob certas condições, a série de Fourier converge em cada ponto x para a média dos limites laterais de f . Isso significa que, mesmo que a função f apresente descontinuidades, a série de Fourier ainda assim fornecerá uma representação precisa retornando a média dos valores imediatamente antes e depois da descontinuidade.

Para exemplificar este teorema, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.1. Considere a função onda quadrada $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -L < x < 0 \\ -1, & \text{se } 0 < x < L \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde $f(x)$ é periódica com período $2L$, representada pelo gráfico a seguir

Figura 7 – Gráfico da função onda quadrada $f(x)$ 

Fonte: autoria própria.

Calculemos a série de Fourier de f e utilizaremos o Teorema 2.1 para analisar a convergência da série de Fourier em diferentes pontos da função, especialmente em pontos de descontinuidade.

Solução. Utilizaremos (2.16) para calcular a série de Fourier desta função. Para isso, primeiramente iremos calcular seus coeficientes. Daí,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^0 1 \, dx + \int_0^L (-1) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{L} (x|_{-L}^0 - x|_0^L) \\
 &= \frac{1}{L} ((0 - (-L)) - (L - 0)) \\
 &= \frac{1}{L} (L - L) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Temos também que,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^0 1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L (-1) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^0 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\left[\frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^0 - \left[\frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(0) - \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(-\pi n) - \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(\pi n) + \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(0) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(0 + \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(\pi n) - \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}(\pi n) + 0 \right) \\
 &= \frac{1}{L} \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^0 1 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx + \int_0^L (-1) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \\
&= \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^0 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx - \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \\
&= \frac{1}{L} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^0 - \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^L \right) \right) \\
&= \frac{1}{L} \left(-\frac{L}{n\pi} (\cos(0) - \cos(-\pi n)) + \frac{L}{n\pi} (\cos(\pi n) - \cos(0)) \right).
\end{aligned}$$

Simplificando e utilizando as propriedades $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\cos(0) = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{L}{n\pi} ((-1)^n - 1) \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} [(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n] \\
&= \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} -2, & \text{quando } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{quando } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo, os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Agora observe que com os coeficientes calculados, a série de Fourier da função onda quadrada fica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.20)$$

Substituindo b_n , temos

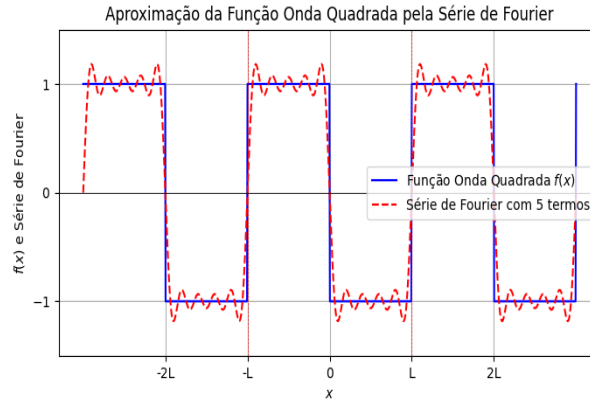
$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.21)$$

Observação 2.3.1. Na série de Fourier, a aproximação de uma função periódica é realizada ao somar um número finito de termos da série. Como não é possível somar infinitos termos, utilizamos uma soma parcial, incluindo um número específico N de termos ímpares. Por exemplo, ao considerar $N = 5$, estamos somando os primeiros 5 termos ímpares da série, conforme expresso na seguinte fórmula

$$f_N(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^9 \frac{-4}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.22)$$

Abaixo, observe a representação gráfica dessa aproximação para os 5 primeiros termos, comparando-a com a função original.

Figura 8 – Gráfico da série de Fourier da onda quadrada para $N = 5$



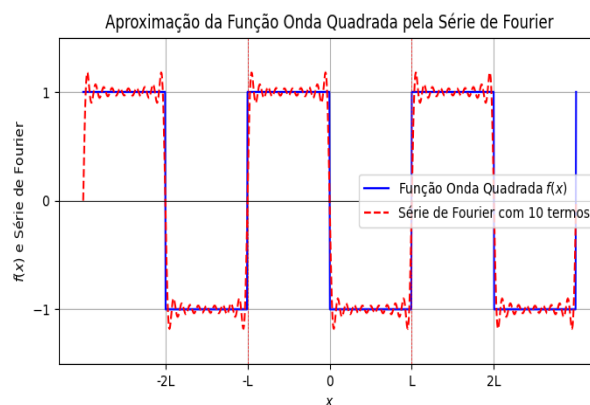
Fonte: autoria própria.

Aqui, para $N = 5$ corresponde a somar os termos com $n = 1, 3, 5, \dots, 9$. Podemos aumentar ou diminuir N para ver como a aproximação melhora à medida que mais termos da série são incluídos. Vejamos mais um exemplo considerando $N = 10$. Daí, teremos

$$f_N(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{19} \frac{-4}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.23)$$

Observe a representação gráfica dessa aproximação para os 10 primeiros termos, comparando-a com a função original.

Figura 9 – Gráfico da série de Fourier da onda quadrada com $N = 10$



Fonte: autoria própria.

Observe que, pela Definição dada em 1.1.4, a função $f(x)$ é seccionalmente diferenciável e tem período $2L$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.1, para analisar a convergência

da série de Fourier desta função em diferentes pontos, especialmente em pontos de descontinuidade. Note que, para valores de x onde $f(x)$ é contínua, como $x \neq 0$, a série de Fourier encontrada em (2.21) converge para o próprio valor da função, ou seja, $f(x)$. No caso específico de $x = 0$, onde há uma descontinuidade, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais, que é calculada como

$$\frac{1}{2} [f(a_j^+) + f(a_j^-)] = \frac{1}{2} [1 + (-1)] = 0. \quad (2.24)$$

Dessa forma, podemos concluir que, de acordo com o Teorema da Convergência Pontual, mesmo na presença de descontinuidades, a série de Fourier fornece uma representação precisa da função ao convergir para a média dos limites laterais em pontos de descontinuidade.

Dado o exemplo acima e as duas abordagens para a resolução, é importante considerar dois resultados antes de prosseguirmos.

Proposição 2.3.1. Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = 0.$$

Em outras palavras, a série de Fourier de uma função par é uma *série de cossenos*.

Proposição 2.3.2. Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$b_n = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Em outras palavras, a série de Fourier de uma função ímpar é uma *série de senos*. As Proposições 2.3.1 e 2.3.2 derivam das Proposições 1.1.1 e 1.1.2, sendo essenciais no cálculo da série de Fourier de uma função. Elas nos permitem prever a forma da Série e, conseqüentemente, simplificar cálculos e análises. Vale destacar que a escolha entre uma *série de cossenos* ou uma *série de senos* depende diretamente da paridade da função em questão.

2.4 Identidade de Euler e a Formulação Complexa da série de Fourier

A Fórmula de Euler é uma identidade fundamental na matemática, descoberta por Leonhard Euler no século XVIII. Esta fórmula estabelece uma conexão entre as funções trigonométricas e a exponencial complexa. Na teoria de Fourier, a Fórmula de Euler é

importante, pois permite representar as funções seno e cosseno, que são os componentes das séries de Fourier, na forma de exponenciais complexos. Ao relacionar a identidade de Euler na série de Fourier, obtemos a fórmula complexa de Fourier. A seguir, exploraremos detalhadamente esse processo.

Definição 2.4.1. A identidade de Euler é definida por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (2.25)$$

onde θ é um ângulo medido em radianos, $e^{i\theta}$ é a função exponencial complexa com base e e i é a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$.

A partir desta identidade, podemos obter as seguintes expressões para as funções trigonométricas

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (2.26)$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (2.27)$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} &= a_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{2} + \frac{e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{2i} - \frac{e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2i} \right) \\ &= a_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{2} \right) + a_n \left(\frac{e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{2i} \right) - b_n \left(\frac{e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-\frac{in\pi x}{L}} \\ &= c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + c_{-n} e^{-\frac{in\pi x}{L}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Logo, chamaremos o coeficiente de $e^{\frac{n\pi x}{L}}$ de c_n e o coeficiente de $e^{-\frac{in\pi x}{L}}$ de c_{-n} . Sabemos que $\frac{1}{i} = -i$, então

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \frac{1}{i} = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} = \frac{1}{2} (a_n - ib_n). \quad (2.29)$$

Agora, iremos escrever o a_n e b_n em termos de integrais de $f(x)$ usando as definições dos coeficientes de Fourier em (2.2.1). Daí,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx - i \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando a fórmula de Euler, temos

$$c_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad (2.31)$$

com n inteiro.

Observação 2.4.1. Note que, os termos $e^{\frac{n\pi x}{L}}$ e $e^{-\frac{in\pi x}{L}}$ são complexos conjugados. Ao trabalharmos com os coeficientes c_n , na série de Fourier complexa, estamos considerando ambos os termos. Os coeficientes c_{-n} para os termos negativos de n são o conjugado complexo dos coeficientes c_n para os termos positivos de n . Assim, as contas para os c_{-n} são análogas às contas para os c_n .

Portanto, mostramos que, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier de f poderá ser escrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad (2.32)$$

onde c_n é dado pela expressão (2.31), para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Na série de Fourier, conforme definida em (2.16), os coeficientes a_n e b_n representam as amplitudes dos termos de cosseno e seno, respectivamente. Esses coeficientes estão diretamente relacionados à contribuição de cada frequência na função periódica. Em contraste, na forma complexa da série de Fourier, dada em (2.32), o número inteiro n e o termo $\frac{\pi}{L}$ definem a frequência fundamental. A exponencial complexa $e^{\frac{in\pi x}{L}}$ representa cada componente de frequência específica da função $f(x)$. Analisando a série de Fourier dessa maneira, podemos identificar diretamente as diferentes frequências presentes em $f(x)$, e cada coeficiente c_n especifica a contribuição da frequência associada a $e^{\frac{in\pi x}{L}}$. Enquanto a forma trigonométrica pode requerer dois termos (cosseno e seno) para cada frequência, a forma complexa usa uma única exponencial complexa para representar cada componente de frequência. Isso resulta em uma representação mais curta e direta, reduzindo a redundância nas expressões.

3 A Transformada de Fourier

Neste capítulo, abordaremos a motivação para a Transformada de Fourier, que surge como uma extensão das séries de Fourier, e examinaremos sua definição formal. Além disso, definiremos as propriedades importantes da Transformada de Fourier, o espaço de funções de decaimento rápido e discutiremos as propriedades da Transformada.

3.1 Motivação da Transformada de Fourier

A descoberta inicial da série de Fourier para funções periódicas revelou a capacidade de representar funções complexas como somas infinitas de senos e cossenos. No entanto, à medida que o estudo avançava, percebeu-se a necessidade de estender essa teoria para abranger funções não periódicas, que não se repetem regularmente ao longo do tempo ou do espaço. Essa necessidade motivou o desenvolvimento da Transformada de Fourier, formalizada por Joseph Fourier. Posteriormente, matemáticos como Cauchy e Poisson aprofundaram a teoria, e Pierre-Simon Laplace também contribuiu com métodos relacionados. No entanto, foi Fourier quem estabeleceu as bases da Transformada em seu memorando de 1811. Para uma análise detalhada das contribuições históricas e do desenvolvimento da Transformada de Fourier, consulte [Gonzales-Velasco^{\[6\]}](#). A seguir, exploraremos a transição da série de Fourier para a Transformada de Fourier, destacando como essa evolução é formalizada através da formulação complexa das séries de Fourier.

Passagem da série de Fourier para a Transformada de Fourier:

Inicialmente, iremos considerar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. Utilizamos a formulação complexa da série de Fourier para representar f . Denotamos $h = \frac{\pi}{L}$, $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$ com $n \in \mathbb{Z}$ e substituímos na formulação complexa. Daí, teremos

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x}, \quad (3.1)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx. \quad (3.2)$$

Agora, substituiremos (3.2) em (3.1). Daí,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx \right) e^{i\xi_n x}.$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, teremos

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \cdot \frac{\pi}{\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx \right) e^{i\xi_n x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx \right) e^{i\xi_n x}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e sabemos que $h = \frac{\pi}{L}$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx \right) e^{i\xi_n x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx \right) e^{i\xi_n x}. \end{aligned}$$

Chamaremos

$$c(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, obtemos

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} hc(\xi_n) e^{i\xi_n x}.$$

A ideia é considerar o que acontece com a série de Fourier complexa quando o período da função periódica se torna infinitamente grande. Isso implica em uma função $f(x)$ que não é mais restrita a um intervalo finito e, teoricamente, se estende por toda a reta. Como $h = \frac{\pi}{L}$, à medida que $L \rightarrow \infty$, $h = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$. Logo, quando h se aproxima de zero, a série de Fourier complexa se aproxima da integral

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.3)$$

Onde $c(\xi)$ é

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (3.4)$$

As equações (3.4) e (3.3) motivam a definição da Transformada de Fourier e de sua inversa, respectivamente, como veremos a seguir

3.2 Definição da Transformada de Fourier

Definição 3.2.1. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos sua Transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)$ pela expressão

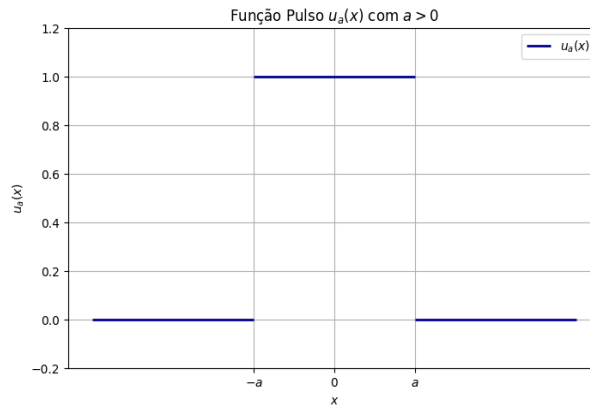
$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (3.5)$$

Para ilustrar esta definição, considere o exemplo a seguir que nos ajudará a compreender o processo de cálculo da Transformada de Fourier de uma função

Exemplo 3.2.1. Dado $a > 0$, consideramos a função pulso definida por

$$u_a(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |x| \leq a \\ 0 & , \text{ se } |x| > a \end{cases}$$

Figura 10 – Gráfico da função pulso



Fonte: autora própria

Calculemos a Transformada de Fourier de $u_a(x)$.

Solução. Para calcular a Transformada de Fourier de $u_a(x)$, usaremos (3.5). Como $u_a(x)$ é 1 para $|x| \leq a$ e 0 caso contrário, podemos restringir a integral para $x \in [-a, a]$. Daí,

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx.$$

Para resolver essa integral, utilizaremos o método da substituição e teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\xi a}}{-i\xi} - \frac{e^{i\xi a}}{-i\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\xi a} - e^{i\xi a}}{-i\xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-i\xi} \cdot (e^{-i\xi a} - e^{i\xi a}) \end{aligned}$$

Agora, podemos aplicar a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ para simplificar a expressão acima. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-i\xi} \cdot (\cos(\xi a) - i \operatorname{sen}(\xi a) - (\cos(\xi a) + i \operatorname{sen}(\xi a))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-i\xi} \cdot (-2i \operatorname{sen}(\xi a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-2i \operatorname{sen}(\xi a)}{-i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}(\xi a)}{\xi}. \end{aligned}$$

Portanto, a Transformada de Fourier de $u_a(x)$ é:

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{2 \operatorname{sen}(\xi a)}{\xi \sqrt{2\pi}}.$$

É importante observar que a integral em (3.5) deve ser interpretada como um limite à medida que M e N tendem ao infinito, ou seja, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad (3.6)$$

garantindo, assim, a sua convergência. Essa abordagem é importante quando lidamos com integrais impróprias, para evitar resultados, como o exemplo a seguir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N x dx = 0, \quad (3.7)$$

onde, a integral imprópria (3.7) não existe. Agora, uma pergunta importante surge: quais são as condições que uma função f precisa satisfazer para que a integral na equação (3.6) esteja bem definida, ou seja, para que ela tenha uma solução finita para qualquer valor de ξ ? Para responder a essa questão, é necessário identificar uma classe específica de funções que garantem a existência da integral. Quando dizemos que a equação (3.5) está bem definida, isso significa que, para cada valor de ξ , a integral deve convergir para um número real.

Podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a essa classe de funções adequadas se atender aos seguintes critérios:

I f deve ser seccionalmente contínua em cada intervalo finito $[-M, N]$;

II A função f deve ser absolutamente integrável no domínio real, ou seja, a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

precisa ser finita.

Observe que a condição (I) exige que a função $f(x)$ seja seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$. Isso significa que $f(x)$ pode ter um número finito de descontinuidades, conforme a definição (1.1.3). Em particular, em cada intervalo limitado $[-M, N]$, $f(x)$ é integrável. Agora, a função $e^{-i\xi x}$ tem módulo constante $|e^{-i\xi x}| = 1$ para todo ξ e x , o que implica que a integrabilidade de $e^{-i\xi x} f(x)$ em $[-M, N]$ depende exclusivamente da integrabilidade de $f(x)$ nesse intervalo. Como $f(x)$ é seccionalmente contínua, ela é integrável em $[-M, N]$. Portanto, o produto $e^{-i\xi x} f(x)$ também é integrável nesse intervalo, garantindo que a integral no intervalo $[-M, N]$ é bem definida. Embora $e^{-i\xi x}$ varie com x , essa variação não afeta a integrabilidade de $f(x)$, pois o módulo de $e^{-i\xi x}$ é constante.

A condição (II) implica que o limite em (3.7) exista. De fato, note que, dado um $\epsilon > 0$, sabemos que existe um $K > 0$ tal que:

$$\int_{|x|>K} |f(x)| dx < \epsilon. \quad (3.8)$$

que significa que, fora do intervalo $[-K, K]$, a integral de $|f(x)|$ é pequena, menor que ϵ . Usando a desigualdade para integrais, podemos estimar essa integral da seguinte forma

$$\left| \int_{|x|>K} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{|x|>K} |e^{-i\xi x} f(x)| dx. \quad (3.9)$$

Como $|e^{-i\xi x}| = 1$, temos que

$$\left| \int_{|x|>K} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{|x|>K} |f(x)| dx. \quad (3.10)$$

Por nossa escolha de K , sabemos que a integral à direita é menor que ϵ . Logo,

$$\left| \int_{|x|>K} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \epsilon. \quad (3.11)$$

Definição 3.2.2. Uma classe mais geral de funções f para as quais (3.5) esteja bem definida é o conjunto das funções que satisfazem as condições especificadas na Definição 1.1.9. Cada função do espaço é uma função \mathcal{L}^1 . Isso requer que f e $|f|$ sejam integráveis, em cada intervalo $[-M, N]$ e que existam os limites

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx. \quad (3.12)$$

Note que, se f for seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$ e se o segundo limite em (3.12) existir, a função será \mathcal{L}^1 .

Embora f pertença ao espaço \mathcal{L}^1 , não necessariamente a sua Transformada de Fourier $\mathcal{F}(\xi)$ também pertence a \mathcal{L}^1 . Isso acontece porque a propriedade de integrabilidade de uma função $f(x)$ não se transfere automaticamente para sua Transformada de Fourier, pois ela não necessariamente decai rápido o suficiente para ser integrável. O comportamento de $\mathcal{F}(\xi)$ depende da regularidade e do decaimento da função $f(x)$. Por exemplo, se $f(x)$ tiver uma descontinuidade, isso implica que $\mathcal{F}(\xi)$ não decai rapidamente, o que pode impedir que seja integrável. Dessa forma, nosso objetivo agora é estudar a Transformada de Fourier em um subconjunto das funções \mathcal{L}^1 , o Espaço de Decrescimento Rápido, conhecido como Espaço de Schwartz, denotado por \mathcal{S} definido a seguir.

3.3 Espaço de Schwartz (\mathcal{S})

Definição 3.3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de decrescimento rápido se ela for infinitamente diferenciável e se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0 \quad (3.13)$$

para todos m e n inteiros ≥ 0 . O espaço de decrescimento rápido é designado por \mathcal{S} e conhecido como espaço de Schwartz, devido a uma homenagem ao matemático Laurent Schwartz. Esta designação é uma homenagem ao matemático Laurent Schwartz, que desenvolveu a teoria das distribuições e contribuiu significativamente para a análise funcional.

Para ilustrar essa definição, consideremos um exemplo clássico de uma função que pertence ao espaço \mathcal{S} .

Exemplo 3.3.1. A função $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$.

Solução. Para mostrar que f é de decrescimento rápido, precisamos verificar se ela satisfaz a definição. Primeiro, vamos calcular a derivada de $f(x)$. Note que, a primeira derivada é dada por

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Analogamente a segunda derivada é dada por

$$f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}.$$

De forma geral, as derivadas sucessivas de $f(x)$ terão a forma

$$D^n f(x) = p_n(x)e^{-x^2}$$

onde $p_n(x)$ é um polinômio em x . Agora, precisamos verificar o comportamento do termo $x^m D^n f(x)$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Isso significa analisar

$$x^m D^n f(x) = x^m p_n(x)e^{-x^2}.$$

Como $p_n(x)$ é um polinômio, o termo $x^m p_n(x)$ será uma soma de termos do tipo x^k , onde k é um inteiro não negativo. No entanto, o termo e^{-x^2} decresce muito mais rapidamente do que qualquer potência de x cresce. Portanto, à medida que $|x|$ tende ao infinito

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m p_n(x)e^{-x^2} = 0.$$

Portanto, como o limite é zero para qualquer $m \geq 0$ e $n \geq 0$, podemos concluir que $f(x) = e^{-x^2}$ pertence ao espaço das funções de decrescimento rápido \mathcal{S} .

Essa definição descreve funções que, à medida que nos afastamos da origem, quando o valor absoluto de x tende ao infinito, elas não só tendem a zero, mas fazem isso de forma extremamente rápida, independentemente de como você manipula a função ou suas derivadas.

Lema 3.3.1. A condição (3.13) é equivalente a dizer que, dados $m, n \geq 0$ inteiros, existe uma constante $M(m, n)$, dependente de m e n , tal que

$$|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n), \quad \text{para todo } x. \quad (3.14)$$

Para mostrar que (3.14) implica em (3.13), iremos assumir que a condição (3.14) é verdadeira. Tomaremos m e n fixos e multiplicaremos ambos os lados de (3.14) por $\frac{1}{|x|}$, obtemos

$$\frac{|x^m D^n f(x)|}{|x|} \leq \frac{M(m, n)}{|x|}$$

À medida que $|x| \rightarrow \infty$, $\frac{M(m, n)}{|x|} \rightarrow 0$. Portanto, temos:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x^m D^n f(x)|}{|x|} = 0$$

Logo,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$$

o que mostra que a condição (3.13) é satisfeita. A recíproca, (3.13) implicando em (3.14), também é válida. Para ver isto, note que para qualquer m e n , a condição (3.13) significa que existe um valor $K > 0$ tal que, para $|x| > K$. Daí, temos

$$|x^m D^n f(x)| < \epsilon,$$

para qualquer $\epsilon > 0$. Especificamente, podemos escolher $\epsilon = M$, onde M é uma constante que podemos determinar. Então,

$$|x^m D^n f(x)| \leq M,$$

para todo x . Portanto, (3.14) é satisfeita, demonstrando que as duas condições são equivalentes.

A seguir, vejamos algumas notáveis propriedades do Espaço de Funções de Decrescimento Rápido.

Proposição 3.3.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ estiver em \mathcal{S} , então $D^n f$ e $x^m f$ para quaisquer $n, m \geq 0$ inteiros, estão também em \mathcal{S} . Consequentemente, $x^m D^n f$ está em \mathcal{S} .

Demonstração. Iremos assumir que $f \in \mathcal{S}$. Para cada inteiro $m, n > 0$, arbitrário, chamaremos $g(x) = x^m D^n f(x)$. Queremos mostrar que $g \in \mathcal{S}$.

Primeiro observemos que $f(x)$ é infinitamente diferenciável, então que $D^n f(x)$ também é, e segue que o produto de duas funções infinitamente diferenciável x^m e $D^n f$ o é. Precisamos mostrar a existência do supremo de $|x^p D^k g(x)|$, para todo $p, k > 0$ inteiros. Fazemos o cálculo da primeira derivada

$$D(g(x)) = mx^{m-1} D^n f(x) + x^m D^{n+1} f(x).$$

Temos que a segunda derivada fica

$$\begin{aligned} D^2g(x) &= m(m-1)x^{m-2}D^n f(x) + mx^{m-1}D^{n+1}f(x) \\ &\quad + mx^{m-1}D^{n+1}f(x) + x^m D^{n+2}f(x). \end{aligned}$$

Se prosseguirmos com tal processo, podemos verificar que todas as parcelas da derivada k -ésima de $g(x)$ obtidas são da forma

$$c(m)x^i D^j f(x)$$

com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = n, \dots, k$ e $c(m)$ constante real positiva não nula dependendo de m . Como $f \in \mathcal{S}$, então para todo inteiro $m, n > 0$, existe um real $M > 0$, dependendo de m, n , em que $|x^m D^n f| \leq M$, o que implica que

- fazendo $M = i$, e $n = 0$, $|x^i| \leq M_i$,
- fazendo $m = 0$ e $n = j$, $|D^j f(x)| \leq M_j$.

Portanto, cada parcela da derivada de $g(x)$ será limitada, pois

$$|c(m)x^i D^j f(x)| \leq c(m)|x^i| \cdot |D^j f(x)| \leq c(m)M_i M_j$$

e por consequência, toda k -ésima derivada de $g(x)$ é limitada, ou seja, existe $M_k \in \mathbb{R}$, tal que $|D^k g(x)| \leq M_k$, para todo inteiro $k > 0$. Disso, segue que para todo inteiro positivo, existem $M, N > 0$ reais, tais que

$$|x^p D^k g(x)| = |x^p| \cdot |D^k g(x)| \leq N \cdot M.$$

O que nos dá,

$$\sup |x^p D^k g(x)| < \infty, \tag{3.15}$$

E pela equivalência mostrada no Lema 3.3.1 e por (3.15), temos que a função $g(x) \in \mathcal{S}$. □

Essa proposição afirma que se uma função $f(x)$ pertence ao espaço \mathcal{S} , então suas derivadas de qualquer ordem e as funções resultantes da multiplicação por polinômios também pertencem a \mathcal{S} . Intuitivamente, podemos entender que se uma função $f(x)$ é de decrescimento rápido, isso implica que suas derivadas de ordem superior também decaem rapidamente à medida que $|x|$ tende ao infinito. Além disso, quando multiplicamos uma função $f(x)$ por um polinômio, ainda podemos garantir que o resultado seja uma função de decrescimento rápido.

Proposição 3.3.2. Toda função de decrescimento rápido $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função \mathcal{L}^1 .

Demonstração. Note que, em qualquer intervalo finito, $[-M, N]$ a função f é contínua e, portanto, limitada. Sendo limitada, f também é integrável nesse intervalo. Isso significa que a integral de $|f(x)|$ sobre qualquer intervalo finito é finita. Para mostrar que a integral imprópria de f converge, iremos examinar o comportamento de f conforme $|x|$ tende a infinito. Para isto, usaremos a Definição 3.3.1. Daí, temos que para qualquer $n, m \geq 0$ existe uma constante $M(m, n)$ para todo x . Consideramos $n = 0$ e $m = 2$ em (3.14), temos que

$$|x^2 f(x)| \leq M(2, 0).$$

Usando (3.14), faremos uma estimativa da integral imprópria de $|f(x)|$. Para isto, dividiremos a integral em duas partes: uma sobre o intervalo finito $[-1, 1]$ e outra sobre os intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx.$$

(i) Estimativa da Integral para $|x| \geq 1$: Para $|x| \geq 1$ usamos a condição (3.14) e com algumas manipulações algébricas teremos $|f(x)| \leq M(2, 0)|x|^{-2}$. Aplicando integral de $|f(x)|$ para $|x| \geq 1$, teremos a seguinte estimativa

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq M(2, 0) \int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} dx.$$

(ii) Calculando a integral de $|x|^{-2}$:

$$\int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} dx = \int_1^{\infty} |x|^{-2} dx + \int_{-\infty}^{-1} |x|^{-2} dx = 1 + 1 = 2.$$

Logo,

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq 2M(2, 0).$$

Agora, iremos combinar as estimativas. Teremos então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)| dx + 2M(2, 0).$$

Note que, a integral $\int_{-1}^1 |f(x)| dx$ é finita porque f é contínua e limitada em $[-1, 1]$ e o termo $2M(2, 0)$ é uma constante finita. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Isso mostra que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ou seja, f é integrável em todo \mathbb{R} . □

Proposição 3.3.3. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função de \mathcal{S} , então $x^m D^n f(x)$ é uma função \mathcal{L}^1 para todos $m, n \geq 0$ inteiros.

Demonstração. Note que, a Proposição 3.3.2 nos diz que se f é uma função de decrescimento rápido, então $f \in \mathcal{L}^1$. Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Observe ainda que a Proposição 3.3.1 mostra que os operadores diferenciais D^n e a multiplicação por polinômios x^m mantêm as funções dentro do espaço \mathcal{S} , ou seja, se $f \in \mathcal{S}$, então $x^m D^n f(x) \in \mathcal{S}$. Como $x^m D^n f(x) \in \mathcal{S}$ é uma função de decrescimento rápido e sabemos que toda função de decrescimento rápido está em \mathcal{L}^1 , podemos concluir que $x^m D^n f(x) \in \mathcal{L}^1$. Portanto, $x^m D^n f(x) \in \mathcal{L}^1$ é integrável sobre toda a reta real. \square

Vejamos agora as propriedades fundamentais que decorrem da definição formal da Transformada de Fourier.

3.4 Propriedades da Transformada de Fourier

Proposição 3.4.1 (Linearidade de \mathcal{F}). Se f e g forem funções de \mathcal{S} , então

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]. \quad (3.16)$$

ou seja, a Transformada de uma combinação linear de funções é a combinação linear das transformadas dessas funções.

Demonstração. Para demonstrar a linearidade da Transformada de Fourier, iremos aplicar a Definição 3.2.1 à combinação linear de f e g . Daí, temos que

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i\xi x} dx.$$

Agora, usando a linearidade da integral, podemos separar os termos dentro da integral. Daí,

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \right].$$

Reconhecendo as integrais como as transformadas de Fourier de f e g , podemos concluir que

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\xi) = \alpha \mathcal{F}[f](\xi) + \beta \mathcal{F}[g](\xi).$$

\square

Proposição 3.4.2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função de \mathcal{S} , então

$$\mathcal{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathcal{F}[f], \quad (3.17)$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração. Para demonstrar, usaremos o método da indução. Primeiramente, temos

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = \mathcal{F}[f'](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx. \quad (3.18)$$

Para analisar a integral (3.18), utilizaremos o método de integração por partes e tomaremos $u = e^{-i\xi x}$ e $dv = f'(x)dx$, então $du = -i\xi e^{-i\xi x} dx$ e $v = f(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi e^{-i\xi x}) dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-i\xi x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)e^{-i\xi x} - (-i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \right]. \end{aligned}$$

Como $f(x)$ está em \mathcal{S} , então o primeiro termo, $f(x)e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty}$, é zero. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-(-i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \right] \\ &= i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= (i\xi) \mathcal{F}[f](\xi). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = (i\xi) \mathcal{F}[f](\xi). \quad (3.19)$$

Agora, iremos supor que para $n = k$, com $k \geq 1$, a Proposição 3.4.2 é válida, ou seja,

$$\mathcal{F}[D^k f](\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}[f](\xi).$$

Queremos mostrar que a Proposição 3.4.2 é válida para $k + 1$, ou seja,

$$\mathcal{F}[D^{k+1} f](\xi) = (i\xi)^{k+1} \mathcal{F}[f](\xi). \quad (3.20)$$

Primeiramente, iremos considerar a derivada de ordem $k + 1$. Daí,

$$D^{k+1} f = D(D^k f).$$

Aplicamos a Transformada de Fourier em ambos dos lados da igualdade,

$$\mathcal{F}[D^{k+1} f](\xi) = \mathcal{F}[D(D^k f)](\xi).$$

Aplicamos (3.19) a função $D^k f$. Então,

$$\mathcal{F}[D(D^k f)](\xi) = (i\xi) \mathcal{F}[D^k f](\xi).$$

Agora usando a hipótese de indução em (3.20). Logo,

$$\mathcal{F}[D(D^k f)](\xi) = i\xi (i\xi)^k \mathcal{F}[f](\xi).$$

Portanto,

$$\mathcal{F}[(D^{k+1} f)](\xi) = (i\xi)^{k+1} \mathcal{F}[f](\xi),$$

para todo $n \geq 1$. □

Proposição 3.4.3. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função \mathcal{S} , então $\mathcal{F}[f]$ será infinitamente derivável e

$$D_\xi^n \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)]. \quad (3.21)$$

Demonstração da proposição (3.4.3). Vamos dividir esta demonstração em duas partes.

Parte 1: $\mathcal{F}[f]$ é infinitamente derivável.

Iremos demonstrar através do método da indução. Primeiramente, iremos considerar o caso $n = 1$. Daí, note que a derivada de ordem 1 da Transformada de Fourier em relação a ξ é dada por

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right). \quad (3.22)$$

Usando o Lema 1.1.1, podemos aplicar a derivação sob o sinal de integração desde que a derivada parcial da função seja contínua em todos os pontos do seu domínio, haja convergência da integral da função, e a integral da derivada parcial da função convirja uniformemente. Para isso, definimos primeiramente

$$h(\xi, x) = f(x) e^{-i\xi x}. \quad (3.23)$$

Precisamos considerar a derivada parcial desta função em relação a ξ , pois estamos interessados em analisar a Transformada de Fourier de $f(x)$ e suas propriedades de derivação. Daí,

$$\frac{d}{d\xi} f(x) e^{-i\xi x} = -ix f(x) e^{-i\xi x}. \quad (3.24)$$

Note que a função em (3.23) e sua derivada parcial em (3.24) são contínuas em todos os pontos de seu domínio, pois a função $f(x)$ é uma função da variável x e é contínua, enquanto $e^{-i\xi x}$ é uma exponencial complexa que é contínua em ξ e x . E o produto de funções contínuas é contínuo. Como $-ix f(x) e^{-i\xi x}$ é um produto de funções contínuas em ξ e x , sua derivada parcial em relação a ξ também é contínua. Além disso, como $f(x) \in \mathcal{S}$ a função (3.23) é integrável para todos os ξ . Decorre da Proposição 3.3.2. Agora note que, a derivada da Transformada de Fourier em relação a ξ é

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} (f(x) e^{-i\xi x}) dx. \quad (3.25)$$

Utilizando a derivada parcial calculada (3.24) e substituindo em (3.25), temos

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ix e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (3.26)$$

Agora precisamos verificar se a última integral (3.26) converge uniformemente. Para isso, precisamos mostrar que $xf(x)$ é integrável. Em outras palavras, precisamos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx < \infty. \quad (3.27)$$

Observe que, se f é uma função de decrescimento rápido, então $|f(x)|$ decresce mais rapidamente que qualquer potência positiva de x quando $|x| \rightarrow \infty$. Nesse caso, mesmo quando multiplicamos por x , a função $xf(x)$ ainda será integrável, pois o decrescimento de $f(x)$ compensa o crescimento de x , garantindo que (3.27) é verdade. Isso nos permite aplicar o Lema 1.1.1 e derivar sob o sinal de integração em (3.25), o que nos dá (3.26) e consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi) &= \mathcal{F}[(-ix)f(x)] \\ \implies D_\xi \mathcal{F}[f] &= \mathcal{F}[(-ix)f(x)]. \end{aligned}$$

Agora, generalizamos isso para derivadas de ordem n . Assumimos que vale para $n = k$, ou seja,

$$D_\xi^k \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^k f(x)]. \quad (3.28)$$

Queremos mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja,

$$D_\xi^{k+1} \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{d}{d\xi} (D_\xi^k \mathcal{F}[f](\xi)).$$

Usando a hipótese de indução (3.28), temos

$$\begin{aligned} D_\xi^{k+1} \mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}[(-ix)^k f(x)]) \\ &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) e^{-i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.1 novamente para derivar sob o sinal de integração temos

$$\frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}[(-ix)^k f(x)]) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} [(-ix)^k f(x) e^{-i\xi x}] dx. \quad (3.29)$$

Calculando a derivada parcial de (3.29), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [(-ix)^k f(x) e^{-i\xi x}] &= \frac{d}{d\xi} [(-ix)^k f(x)] e^{-i\xi x} + (-ix)^k f(x) \frac{d}{d\xi} [e^{-i\xi x}] \\ &= (-ix)^k \frac{d}{d\xi} [f(x)] e^{-i\xi x} + (-ix)^k f(x) (-ix) e^{-i\xi x} \\ &= (-ix)^{k+1} f(x) e^{-i\xi x}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

substituindo o resultado de (3.30) na expressão (3.29), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}[(-ix)^k f(x)]) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^{k+1} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \mathcal{F}[(-ix)^{k+1} f(x)]. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$D_\xi^n \mathcal{F}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)].$$

□

Proposição 3.4.4. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função de \mathcal{S} , então a Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ será também de \mathcal{S} .

Demonstração. Iremos demonstrar utilizando algumas proposições vistas neste capítulo. Note que, pela Proposição 3.4.2 temos que

$$\xi^m D_\xi^n \mathcal{F} = \xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f]. \quad (3.31)$$

Utilizando algumas manipulações algébricas, chegamos em

$$\begin{aligned} & (\xi)^m \mathcal{F}[(-ix)^n f] \\ &= (-i \cdot i \xi)^m \mathcal{F}[(-ix)^n f] \\ &= (-i)^m (i\xi)^m \mathcal{F}[(-ix)^n f]. \end{aligned}$$

Observe que, aplicando a Proposição 3.4.3, obtemos

$$\mathcal{F}[(-i)^m D^m (-ix)^n f] = \mathcal{F}[(-iD_x)^m (-ix)^n f].$$

Note ainda que, pela Proposição 3.3.3, temos

$$(-iD)^m (-ix)^n f = (-i)^{m+n} D^m [x^n f]$$

está em \mathcal{L}^1 e, conseqüentemente por definição, o primeiro membro de (3.31) é limitado, provando que $\mathcal{F}[f]$ está em \mathcal{S} . \square

As propriedades já citadas da Transformada de Fourier, mostram que \mathcal{F} é um operador linear de \mathcal{S} em \mathcal{S} . Com isso, duas perguntas são feitas

- (I) \mathcal{F} é injetiva? Em outras palavras, se $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2]$ para duas funções f_1 e f_2 em \mathcal{S} , então é verdade que $f_1 = f_2$? Pela linearidade de \mathcal{F} , a pergunta pode ser reformulada como: se $\mathcal{F} = 0$, então é verdade que $f = 0$?
- (II) \mathcal{F} é sobrejetiva? Em outras palavras, dada uma função $F(\xi)$ em \mathcal{S} , existirá uma $f(x)$ em \mathcal{S} tal que $\mathcal{F}[f] = F$?

As respostas para essas perguntas serão respondidas a seguir.

Teorema 3.1. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é um operador linear, injetivo ($\mathcal{F}[f] = 0$ implica $f = 0$), sobrejetivo ($\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$) e $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$, onde

$$\overline{\mathcal{F}}[g](s) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt$$

é um operador $\overline{\mathcal{F}}$ de \mathcal{S} em \mathcal{S} .

Demonstração. Primeiro, será demonstrada a injetividade do operador: sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$, tais que $\mathcal{F}[f_1](\xi) = \mathcal{F}[f_2](\xi)$. Basta aplicar o operador $\overline{\mathcal{F}}$ na igualdade para obter de forma direta, que $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f_1]](x) = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f_2]](x) \Rightarrow f_1 = f_2$. Para se demonstrar a sobrejetividade, devemos tomar $G(\xi)$ função em \mathcal{S} (contradomínio de \mathcal{F}) arbitrário e provar que existe $g(x) \in \mathcal{S}$ (domínio de \mathcal{F}) tal que $\mathcal{F}[g](\xi) = G(\xi)$. Para isso, basta tomar $g(x) = \overline{\mathcal{F}}[G](\xi)(x)$, ou seja, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} G(\xi) d\xi$, e, usando esta última igualdade e sabendo que $i\xi x = (-i)\xi(-x)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(is)(-x)} f(s) ds \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} (\mathcal{F}[G](-x)) dx. \end{aligned}$$

Usando a integração por substituição nesta última, fazendo $-x = u$, $dx = -du$, e os limites da integração imprópria invertidos, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} (\mathcal{F}[G](-x)) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi u} (\mathcal{F}[G](u)) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(u)} (\mathcal{F}[G](u)) du = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[G]](\xi). \end{aligned}$$

Temos $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[G]](\xi) = G(\xi)$. Desta forma, mostramos que $\mathcal{F}[g](\xi) = G(\xi)$, e \mathcal{F} é operador sobrejetivo e, portanto, bijetivo. \square

Para aplicarmos essas propriedades, é importante considerar dois resultados fundamentais: a Transformada Inversa de Fourier e o produto de convolução. Embora suas demonstrações estejam além do escopo deste trabalho, elas podem ser encontradas em [Figueiredo^{\[1\]}](#).

Teorema 3.2. (*Fórmula da Inversa de Fourier*) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de \mathcal{S} , e seja $\mathcal{F}(\xi)$ sua Transformada de Fourier; então,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}[f](\xi) d\xi. \quad (3.32)$$

Definição 3.4.1. Dadas duas funções f e g em \mathcal{S} , definimos seu produto de convolução pela expressão

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Lema 3.4.1. Se f e g estiverem em \mathcal{S} , então

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g].$$

A demonstração do Teorema 3.2 Lema 3.4.1, pode ser encontrada em [Figueiredo^{\[1\]}](#).

Com as propriedades da Transformada de Fourier devidamente estabelecidas, estamos agora prontos para explorar uma de suas aplicações. No próximo capítulo, utilizaremos essas propriedades para resolver a equação do calor em uma barra infinita, demonstrando a eficácia da Transformada de Fourier na análise e solução de problemas em equações diferenciais.

4 Análise da Equação do Calor Usando a Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta importante na resolução de equações diferenciais parciais, especialmente em domínios infinitos. Um exemplo de sua aplicação é na equação do calor, que modela a evolução da temperatura em uma barra infinita ao longo do tempo. Ao aplicar a Transformada de Fourier, a equação diferencial parcial é convertida em uma equação diferencial ordinária, o que simplifica o processo de resolução, já que trabalhar com uma equação ordinária é, em geral, mais direto devido à redução no número de variáveis. Esse método é útil para determinar a evolução da temperatura ao longo da barra, dada uma condição inicial. Dessa forma, obtemos uma solução candidata que descreve a propagação do calor. Assim, a Transformada de Fourier não apenas simplifica a resolução do problema, mas também possibilita o retorno ao domínio original por meio da Transformada Inversa de Fourier. Neste capítulo, apresentaremos o processo detalhado de uso da Transformada de Fourier para resolver a equação do calor em uma barra infinita.

Iremos considerar uma barra infinita feita de material uniforme. Suponha que, inicialmente, a barra tenha uma distribuição de temperatura não uniforme, concentrada em uma região específica. Como a barra é infinita, não há limitações nas extremidades para a dissipação de calor, resultando em uma propagação contínua da temperatura ao longo de toda a barra.

O problema de condução de calor em uma barra infinita consiste em determinar uma função $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça à equação do calor

$$u_t = K u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.1)$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Esse é um Problema de Cauchy que refere-se especificamente ao problema de valor inicial para equações diferenciais parciais, onde se determina a solução de uma Equação Diferencial Parcial com base em uma condição inicial.

Iremos assumir que a função inicial f pertence ao espaço de funções de decrescimento rápido \mathcal{S} , e que a solução da equação do calor exista e também pertença a \mathcal{S} para cada $t > 0$ fixado. Com base nessa suposição, buscamos determinar a forma da solução. Para isso, note que, a Transformada de Fourier de uma função $u(x, t)$ em relação a x é dada por

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, t) dx \quad (4.3)$$

Agora, iremos aplicar a Transformada de Fourier à equação (4.1). Daí,

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[Ku_{xx}]. \quad (4.4)$$

Primeiramente, iremos calcular a Transformada de Fourier de u_t . Para isso, começamos calculando a derivada em relação ao tempo em (4.3). Daí,

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x, t) dx \right). \quad (4.5)$$

Agora, vamos analisar a integral em (4.5). Notemos que como $u(x, t)$ é de rápido decrescimento, temos que $e^{-ix\xi} u(x, t)$ também será, assim como $|e^{-ix\xi} u(x, t)|$, logo a integral imprópria está bem definida, ou seja, converge. Além disso, como $e^{-ix\xi} u(x, t)$ é de rápido decrescimento, temos que, pela Proposição (3.3.1), sua derivada também será. Notemos agora que dado $\varepsilon > 0$, existe $y(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\left| \int_{|x|>y(\varepsilon)} e^{-ix\xi} u_t(x, t) dx \right| = \left| \int_{|x|>y(\varepsilon)} e^{-ix\xi} Ku_{xx}(x, t) dx \right| \leq \int_{|x|>y(\varepsilon)} |Ku_{xx}(x, t)| dx < \varepsilon, \quad (4.6)$$

onde a última desigualdade vem do fato que $u_{xx}(x, t)$ é de rápido decrescimento rápido e, conseqüentemente, pertence a \mathcal{L}^1 conforme a Proposição (3.3.2). Logo, a Transformada de Fourier em relação a u_t converge uniformemente. Assim, podemos utilizar a Lema 1.1.1 e derivar sob o sinal de integração. Então,,

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx. \quad (4.7)$$

Reescrevendo (4.7) em notação de Transformada de Fourier, temos que

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u(x, t)] = \frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t). \quad (4.8)$$

Logo,

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t) = U_t(\xi, t). \quad (4.9)$$

Agora, iremos calcular a Transformada de Fourier de Ku_{xx} . Para isso, usaremos a Proposição 3.4.2. Daí,

$$\mathcal{F}[Ku_{xx}] = K \cdot (-\xi^2) \mathcal{F}[u(x, t)] = -K\xi^2 U(\xi, t). \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.4), teremos

$$U_t(\xi, t) = -K\xi^2 U(\xi, t). \quad (4.11)$$

Observe que, (4.11) é uma Equação Diferencial Ordinária linear de primeira ordem em t para cada valor fixo de ξ . Podemos resolver essa EDO utilizando o método de separação de variáveis. Daí,

$$\frac{1}{U(\xi, t)} \cdot \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} = -K\xi^2. \quad (4.12)$$

Integramos ambos os lados em relação a t . Temos que,

$$\int \frac{1}{U(\xi, t)} \cdot \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} dt = \int -K\xi^2 dt \implies \ln |U(\xi, t)| = -K\xi^2 t + C_1, \quad (4.13)$$

onde C_1 é a constante de integração. Iremos resolver (4.13) para $U(\xi, t)$. Para isso, aplicamos a exponencial em ambos os lados da igualdade. Daí,

$$e^{\ln |U(\xi, t)|} = e^{-K\xi^2 t + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-K\xi^2 t}. \quad (4.14)$$

Chamaremos $e^{C_1} = C(\xi)$ e obtemos

$$U(\xi, t) = C(\xi)e^{-K\xi^2 t}, \quad (4.15)$$

onde $C(\xi)$ é uma constante de integração que depende de ξ e (4.15) é a solução da EDO (4.11). Para determinar $C(\xi)$, usamos a condição inicial definida em (4.2). Aplicando a Transformada de Fourier à condição inicial, obtemos

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx. \quad (4.16)$$

Agora perceba que $U(\xi, 0)$ é a Transformada de Fourier da função inicial $f(x)$, que denotamos por $\mathcal{F}(\xi)$. Logo, temos

$$U(\xi, 0) = \mathcal{F}(\xi). \quad (4.17)$$

Dessa forma, concluímos que $C(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$. Assim, a solução para $U(\xi, t)$ é, então

$$U(\xi, t) = \mathcal{F}[f](\xi)e^{-K\xi^2 t}. \quad (4.18)$$

Observação 4.0.1. Para avançarmos na análise, é importante observar que o termo $e^{-K\xi^2 t}$ corresponde à Transformada de Fourier de uma função gaussiana. Assim, temos a relação

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \right] (\xi) = e^{-K\xi^2 t}. \quad (4.19)$$

Para verificar que (4.19) é verdade, iremos calcular a Transformada de Fourier da função fornecida. Note que,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}}. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (3.5), teremos

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{\frac{-x^2}{4Kt}} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Kt)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{4Kt} - ix\xi} dx. \quad (4.21)$$

Simplificando o expoente, obtemos

$$-\frac{x^2}{4Kt} - ix\xi = -\frac{1}{4Kt}(x^2 + 4iKt\xi x). \quad (4.22)$$

Observe que, completando o quadrado na expressão em (4.22), podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4Kt}(x^2 + 4iKt\xi x) &= -\frac{1}{4Kt} \left[(x + 2iKt\xi)^2 - (2iKt\xi)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4Kt} \left[(x + 2iKt\xi)^2 + 4K^2t^2\xi^2 \right] \\ &= -\frac{(x + 2iKt\xi)^2}{4Kt} - \frac{4K^2t^2\xi^2}{4Kt} \\ &= -\frac{(x + 2iKt\xi)^2}{4Kt} - K\xi^2t. \end{aligned}$$

Substituindo na integral em (4.21), temos

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Kt)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2iKt\xi)^2}{4Kt} - K\xi^2t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Kt)}} e^{-K\xi^2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2iKt\xi)^2}{4Kt}} dx. \quad (4.23)$$

Agora, observe que se chamarmos $u = x + 2iKt\xi$ e $du = dx$, então

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Kt)}} e^{-K\xi^2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4Kt}} du. \quad (4.24)$$

A integral em (4.24) é uma gaussiana, cujo resultado é

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4Kt}} du = \sqrt{4Kt\pi}.$$

Daí, substituindo em (4.23), obtemos

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Kt)}} e^{-K\xi^2t} \cdot \sqrt{4Kt\pi} = e^{-K\xi^2t}.$$

O que mostra que (4.19) é verdade.

Em particular, utilizamos a relação em (4.19) e substituíremos em (4.18). Daí, temos

$$U(\xi, t) = \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \right] (\xi).$$

Como $U(\xi, t) = \mathcal{F}(u(x, t))$, temos

$$\mathcal{F}(u(x, t)) = \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \right] (\xi). \quad (4.25)$$

Então, podemos utilizar o Lema 3.4.1 em (4.27). Assim,

$$\mathcal{F}(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} * f \right]. \quad (4.26)$$

Agora, queremos encontrar $u(x, t)$. Para isso, note que como $u(x, t) \in \mathcal{S}$ e $U(\xi, t)$ a sua Transformada de Fourier, podemos aplicar o Teorema 3.2 e utilizar a Transformada Inversa de Fourier em (4.26). Daí,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} * f(x) \right]. \quad (4.27)$$

E aplicando a definição de convolução 3.4.1 em (4.27), temos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4Kt} f(y) dy. \quad (4.28)$$

Portanto, a expressão (4.28) representa a candidata a solução procurada para $u(x, t)$.

5 Conclusão

Neste trabalho, analisamos a Transformada de Fourier como uma ferramenta para a solução de equações diferenciais parciais, com ênfase na equação do calor em uma barra infinita. A partir de sua motivação histórica e desenvolvimento teórico, evidenciamos suas propriedades fundamentais, como linearidade e a relação com operações diferenciais. Destacamos a importância das funções de decaimento rápido do espaço de Schwartz, visto que a Transformada de Fourier pode mapear uma função de um espaço em um espaço distinto, porém percebemos que se a função pertence ao espaço de Schwartz, a Transformada de Fourier é um operador linear, e assim, nesse espaço temos a garantia da aplicabilidade da transformada e muitas propriedades e resultados importantes para o estudo da Transformada de Fourier e suas aplicações. Por fim, dedicamos uma parte do trabalho para comentar sobre a Transformada Inversa de Fourier, a qual possibilitou a recuperação das soluções no domínio original da função, evidenciando a eficácia da transformada em estabelecer conexões significativas entre diferentes representações de funções. Portanto, concluímos que a Transformada de Fourier não apenas proporciona uma estrutura teórica sólida, mas também se destaca como uma metodologia importante na resolução de problemas matemáticos.

Referências

- 1 FIGUEIREDO, D. G. d. *Análise de Fourier e equações diferenciais Parciais*. 5. ed. [S.l.]: IMPA, 2018.
- 2 STEWART, J. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2003. Volume 1.
- 3 LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.
- 4 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livro Técnico e Científico, 2002.
- 5 DOMINGOS, C. P. *Da propagação do calor à construção de desenhos: uma aplicação das séries de Fourier com Python*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024. Licenciatura em Matemática.
- 6 GONZALES-VELASCO, E. A. *Fourier analysis and boundary value problems*. [S.l.]: Academic Press, 1995.