



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Equações de Laura-Andoyer para Configurações Centrais

Victória Dayane de Paula Dias da Silva

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Victória Dayane de Paula Dias da Silva

Equações de Laura-Andoyer para Configurações Centrais

PERNAMBUCO

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE

2025

Victória Dayane de Paula Dias da Silva Equações de Laura-Andoyer para
Configurações Centrais/ Victória Dayane de Paula Dias da Silva. – Recife, 2025-
43 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador:Thiago Dias Oliveira Silva

Monografia – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Matemática, 2025.

1. Mecânica Celeste. 2. Configurações Centrais. I. Thiago Dias de Oliveira Silva.
II. Universidade Federal Rural de Pernambuco. III. CEGEN - Centro de Ensino
de Graduação de Exatas da Natureza IV. Equações Polinomiais e Configurações
Centrais no Problema de n -Corpos em Dimensão n^3 : Análise e Aplicações

CDU 02:141:005.7

Victória Dayane de Paula Dias da Silva

Equações de Laura-Andoyer para Configurações Centrais

PERNAMBUCO

Trabalho aprovado. Recife, 13 de fevereiro de 2025:

Thiago Dias Oliveira Silva
Orientador

Izabelly Cristina Nascimento Silva
Membro da Banca

Michelle Gonzaga dos Santos
Membro da Banca

Recife
2025

Ao meu Deus, aquele que sustenta todo o universo pela Palavra do seu poder.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, meu Senhor e Salvador, por sustentar meus dias, me fortalecer em meio a todo o processo árduo e tamanha graça e redenção somente encontrados nele.

À minha família, meus pais e irmãos, por todo incentivo, pela alegria com as pequenas conquistas e todo o amor.

Aos meus amigos da faculdade, em especial Henrique Bernardino, Ícaro Souza, Dayza Bezerra, Leonardo Verçosa, Vitória Crislayne e Fernando Felipe, que formam meu eterno grupo, tornando meus dias mais leves e fáceis. Obrigada pela amizade de vocês e por todos os momentos compartilhados.

Aos meus amigos e irmãos na fé, que sustentaram minha vida em oração e no compartilhar. Agradeço por poder ser e viver a unidade com vocês, para a Glória de Deus.

Aos amigos que construí nas idas e vindas para a UFRPE, por toda ajuda e perrengues que vivenciamos.

Ao motorista Cláudio, por me receber todas as manhãs com tanta alegria e carinho.

Aos meus professores, por todo o ensino, incentivo e referência, que contribuíram para a minha formação.

Ao meu orientador, Prof^o Dr. Thiago Dias, por toda paciência, encorajamento, ensino e cobrança, que permitiram o meu desenvolvimento como aluna e profissional, além de possibilitar a conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas que contribuíram de alguma forma no decorrer da conclusão deste curso.

Se o universo (e tudo nele) for um produto de aleatoriedades, ciência seria impossível.-

Albert Einstein

Resumo

Um dos tópicos mais importantes da Mecânica Celeste é o Problema de N Corpos que refere-se à questão de prever os movimentos de N corpos celestes interagindo mutuamente através da gravitação. Quando N é maior que dois, este problema torna-se notoriamente complexo e, em geral, não é integrável de maneira exata. Isso significa que não existem soluções analíticas gerais para as equações que descrevem os movimentos desses corpos ao longo do tempo. As únicas soluções explícitas para o problema de N corpos são as configurações centrais. Muitos resultados são conhecidos para configurações centrais de N corpos colineares, planares e de dimensão $N-2$. Por outro lado, existe pouco conhecimento sobre configurações de dimensão $N-3$ quando N é maior ou igual a 6, o nosso real objeto de estudo.

Este trabalho tem por objetivo apresentar formalmente as equações do movimento do Problema de N corpos e as Equações de Configurações Centrais. Para tanto, deduzimos as equações de Laura-Andoyer para configurações centrais. Como aplicação, exibiremos exemplos de configurações centrais espaciais de seis corpos.

Palavras-chaves: Mecânica Celeste. Configurações Centrais. Equações de Laura Andoyer.

Abstract

One of the most important topics in Celestial Mechanics is the N-Body Problem, which refers to the question of predicting the movements of N celestial bodies interacting mutually through gravitation. When N is greater than two, this problem becomes notoriously complex and, in general, is not exactly integrable. This means that there are no general analytical solutions to the equations that describe the movements of these bodies over time. The only explicit solutions to the N-body problem are the central configurations. Many results are known for central configurations of N collinear, planar bodies of dimension N-2. On the other hand, there is little knowledge about N-3 dimension configurations when N is greater than or equal to 6, our real object of study.

This work aims to formally present the equations of motion of the N-body Problem and the Central Configuration Equations. To this end, we derive the Laura-Andoyer equations for central configurations. As an application, we will display examples of six-body spatial core configurations.

Keywords: Celestial Mechanics. Core Settings. Laura Andoyer equations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O Problema dos Dois Corpos	21
Figura 2 – Centro de massa	22
Figura 3 – O Movimento Relativo	23
Figura 4 – Posição das massas	24
Figura 5 – Posição das massas	27
Figura 6 – Sistema de coordenadas polares	28
Figura 7 – Configuração Central com 6 corpos nos vértices de um octaedro regular	40

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	O PROBLEMA DOS DOIS CORPOS	21
2.1	Formulação do Problema	21
2.2	Movimento Relativo	23
3	ESTUDO DO PROBLEMA DE FORÇA CENTRAL	25
3.1	As Leis de Kepler	27
3.2	CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS	29
4	CONFIGURAÇÕES CENTRAIS E AS EQUAÇÕES DE LAURA-ANDOYER	33
4.1	Introdução às configurações do problema de 3 ou mais corpos	33
4.2	Configurações Centrais	34
4.3	Aplicações às Equações de Laura Andoyer	36
4.3.1	Equações de Laura Andoyer para configurações de 4 corpos no espaço	38
4.4	Generalização das equações de Laura-Andoyer	39
4.4.1	Equações de Laura Andoyer para configurações de 6 corpos no espaço	40
	REFERÊNCIAS	43

1 Introdução

A Mecânica Celeste estuda a dinâmica dos movimentos de partículas massivas, no espaço, interagindo com a Lei de Gravitação Universal. Essa teoria foi fundamentada por Isaac Newton, em 1687, no seu tratado *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, dando início ao estudo da Mecânica Celeste.

A Segunda Lei da Dinâmica afirma que a força que atua sobre uma partícula material é igual a taxa de variação de seu momento linear. O momento linear de uma partícula material é o produto de sua massa pela sua velocidade. Assim, se a massa não depende do tempo, a Segunda Lei de Newton tem o seguinte enunciado: força é igual a massa vezes aceleração.

Por outro lado, a Lei de Gravitação Universal afirma que: No universo duas partículas materiais quaisquer atraem-se com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. A constante de proporcionalidade, denotada pela letra G , é chamada de constante de Gravitação Universal.

Inicialmente, buscava-se determinar se a gravitação newtoniana explicava todos os fenômenos da astronomia dinâmica, como destacado por Poincaré. O problema da estabilidade do sistema planetário vem desde os tempos de Lagrange (1736-1813) e Laplace (1749-1827) que deram as primeiras demonstrações, constituindo as primeiras contribuições.

Newton e Arquimedes (-287/-212) já haviam estudado os princípios da alavanca e calculado os centros de gravidade de várias figuras geométricas, tendo origem com os trabalhos de Galileu (1564-1642). Os Caldeus também já conheciam o movimento acelerado da Lua entre o apogeu e o perigeu e o movimento retardado entre o perigeu e o apogeu que supunham constantes e de 18 minutos sexagesimais por dia.

Um dos maiores representantes da teoria geocêntrica é Aristóteles (-384/-322). Ele é considerado por muitos o fundador de toda nossa teoria acerca da forma da Terra, pois fez deduções lógicas de que a Terra não só tem a forma de uma esfera, além disso, não podia ser demasiado grande e que toda ela estava povoada. Os astrônomos antigos acreditavam que a Terra era o centro do universo, criada para ser o foco de todos os outros

astros. Consideravam que Deus organizou o universo para que os corpos celestes seguissem trajetórias "perfeitas", ou seja, circunferências. Assim, o desafio deles era descrever geometricamente os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas, assumindo que orbitavam a Terra imóvel com velocidade constante e em trajetórias circulares.

Em termos matemáticos, consideremos n corpos pontuais, com massas $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, e posições dadas pelos vetores $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. O vetor (x_1, \dots, x_n) é denominado configuração. Sendo $d = 1, 2$ ou 3 , podemos classificar a configuração x por colinear, planar ou espacial, respectivamente.

Definimos um referencial inercial, no qual o centro de massa do sistema é dado por

$$\sum_{j=1}^n \frac{m_j r_j}{M}, \text{ onde } M = m_1 + \dots + m_n \text{ é a massa total.}$$

Em 1772, Lagrange encontrou duas soluções homográficas especiais do problema de 3 corpos. Neste caso, as configurações formadas pelos três corpos estão nos vértices de um triângulo equilátero.

A ideia de configuração central foi introduzida por Laplace em 1789, no estudo das soluções de Lagrange, que tem papel relevante no estudo do problema de n corpos, visto que as configurações dos corpos ao longo de soluções homográficas formam uma configuração central em cada instante.

Neste trabalho faremos um breve estudo sobre o problema de 2 corpos, introduziremos o conceito de configuração central, obteremos as equações de configurações centrais no caso planar e enunciaremos uma generalização para dimensões mais altas. Além disso aplicaremos as equações de Laura-Andoyer para estudar um exemplo de configuração planar simétrica e um exemplo de configuração espacial simétrica.

2 O Problema dos Dois Corpos

2.1 Formulação do Problema

O problema dos dois corpos consiste em estudar a dinâmica ou o movimento de duas partículas massivas sujeitas unicamente à ação mútua de suas atrações gravitacionais.

Vamos denominar a primeira partícula S com massa m_1 e a segunda partícula P com massa m_2 , com seus vetores posição, em \mathbb{R}^3 como sendo, respectivamente, r_1 e r_2 . (Fig. 1)

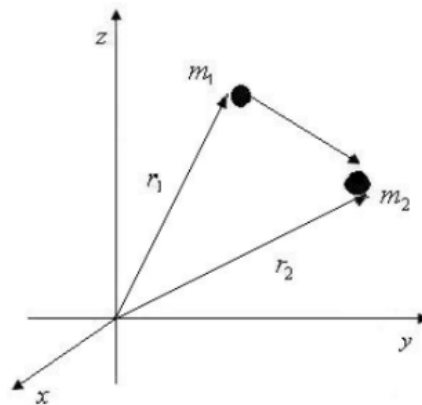


Figura 1 – O Problema dos Dois Corpos

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

Pela Segunda Lei da Dinâmica (ou Segunda Lei de Newton), temos que

$$\begin{aligned} m_1 r_1'' &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|r_1 - r_2\|^2} \cdot \frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|} \\ m_2 r_2'' &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|r_2 - r_1\|^2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{\|r_1 - r_2\|} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por (2.1), temos que

$$m_1 r_1'' + m_2 r_2'' = 0.$$

Integrando duas vezes a igualdade acima com respeito à t ,

1º Integração - Integramos a aceleração para obter a velocidade relativa:

$$\int m_1 r_1' + m_2 r_2' dt = A, \quad (2.2)$$

com A constante.

Integramos novamente para obter as posições:

$$\int m_1 r_1 + m_2 r_2 dt = At + B \quad (2.3)$$

temos que:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = At + B, \quad (2.4)$$

onde A e B são vetores constantes que dependem unicamente das condições iniciais do problema.

Seja R o vetor posição do centro de massa de m_1 e m_2 , isto é,

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M} \quad (2.5)$$

em que $M = m_1 + m_2$.

Veja que, por (2.4), temos

$$R = \frac{At}{M} + \frac{B}{M} \quad (2.6)$$

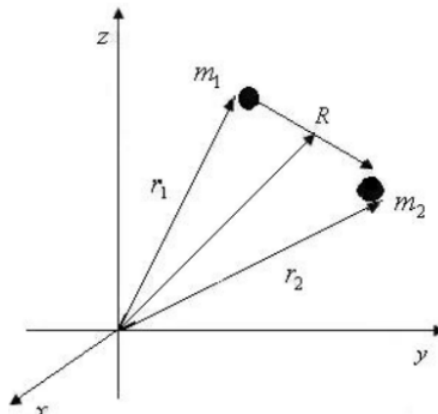


Figura 2 – Centro de massa

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

resultando no centro de massa das partículas que move-se uniformemente sobre uma reta no espaço.

2.2 Movimento Relativo

Como visto anteriormente, temos como se dá o movimento do centro de massa das partículas massivas. Agora veremos como funciona o movimento dessas partículas em relação ao centro de massa.

Os movimentos de m_1 e m_2 relativos ao centro de massa são dados da seguinte forma. Sejam

$$r_1 = R + \underline{r}_1 \quad \text{e} \quad r_2 = R + \underline{r}_2, \quad (2.7)$$

na qual \underline{r}_1 e \underline{r}_2 denotam os vetores posição de m_1 e m_2 , respectivamente, relativos ao centro de massa dos dois corpos.

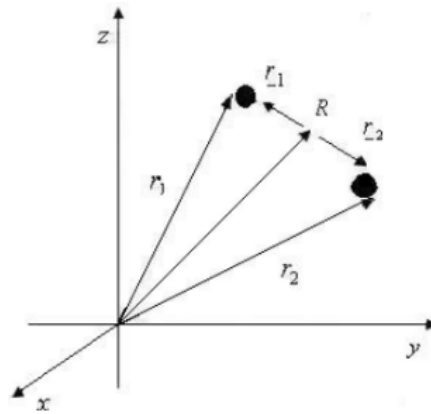


Figura 3 – O Movimento Relativo

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

Decorre da equação (2.5) que $R'' = 0$, com isso, temos

$$r_1 = \underline{r}_1 \quad \text{e} \quad r_2 = \underline{r}_2$$

Com isso, podemos reescrever o sistema de equações (2.1) como

$$\begin{aligned} m_1 \underline{r}_1'' &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|r\|^3} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ m_2 \underline{r}_2'' &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|r\|^3} \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Defina $r = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$.

Desta maneira, decorre de (2.7) que

$$\frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M} = R = 0 \rightarrow m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = 0$$

nos dando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1}\underline{r}_2, & \underline{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_2}\underline{r}_1 \\ r &= -\frac{M}{m_2}\underline{r}_1, & r &= \frac{M}{m_1}\underline{r}_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usando estas relações, temos que o sistema (2.8) é equivalente ao sistema:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1'' &= -\frac{G\mu_1}{\|\underline{r}_1\|^3}\underline{r}_1 \\ \underline{r}_2'' &= -\frac{G\mu_2}{\|\underline{r}_2\|^3}\underline{r}_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que $\mu_1 = \frac{m_2^3}{M^2}$ e $\mu_2 = \frac{m_1^3}{M^2}$.

A primeira destas equações descreve o movimento de \underline{r}_1 , e a segunda descreve o movimento de \underline{r}_2 , ambos em torno do centro de massa do sistema. Observe que ambas as equações são independentes, portanto, basta determinar a apenas solução de uma delas, e assim obteremos a solução também da outra.

Uma outra forma de estudar o sistema (2.10) é usar o vetor r definido anteriormente. Dessa forma, o sistema é equivalente à

$$r'' = -\frac{G\mu}{\|r\|^3}r \quad (2.11)$$

Assim, somos levados a estudar o movimento de uma partícula massiva P de massa m_2 que é atraída pela partícula S de massa m_1 , segundo a equação (2.11). A partícula S , que geralmente é a mais massiva, supõe-se estar situada num ponto fixo do espaço, o qual pode ser tomado como a origem do sistema de coordenadas inercial.

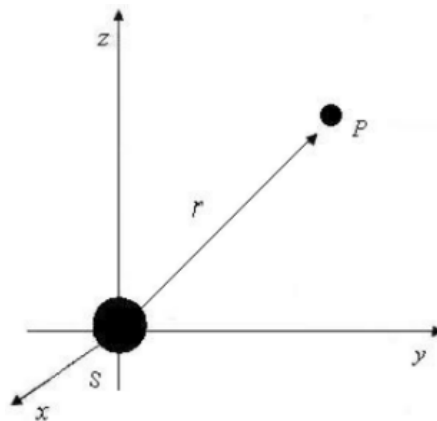


Figura 4 – Posição das massas

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

3 Estudo do Problema de Força Central

Este capítulo tem por objetivo formular o problema, definir e desenvolver as constantes momentum angular, energia e o vetor de Laplace, dada a Lei da Gravitação de Newton, estabelecer duas das leis de Kepler, isto é, a lei de classificação das órbitas e a lei das áreas.

Definição 3.0.1. Uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira para a equação (2.11) se esta função é constante ao longo do movimento, isto é, $\frac{dF}{dt}(r(t), r'(t)) = 0$ para todo t , em que a solução $r(t)$ de (2.11) está definida.

Teorema 3.0.1. O problema de Kepler admite as seguintes integrais primeiras:

1. Energia: $h = \frac{1}{2} \|r'\|^2 - \frac{\mu}{\|r\|}$
2. Momento angular: $C = r \times r'$
3. Vetor de Laplace: $\mu \left(e + \frac{r}{\|r\|} \right) = r' \times C$

A partir dessas integrais primeiras, obtém-se um primeiro resultado acerca dos diferentes movimentos do Problema de Kepler:

a) Se $C = 0$, o movimento é retilíneo.

Sendo o planeta 1 referencial, o planeta 2 só pode andar encima da reta de direção e (sem girar em torno do outro planeta).

Demonstração. Se $C = 0$, então

$$\begin{aligned} \mu \left(e + \frac{r}{\|r\|} \right) &= r \times c = r \times 0 = 0 \\ \Rightarrow e + \frac{r}{\|r\|} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{r}{\|r\|} &= -e \Rightarrow r(t) = -\|r(t)\|e. \end{aligned}$$

□

b) Se $\vec{C} \neq 0$, o movimento ocorre num plano ortogonal a \vec{C} que passa pelo centro de atração S e o vetor \vec{e} está contido neste plano.

S é onde fica o planeta 1 (planeta referencial). O planeta 2 deve ficar sempre sobre este plano perpendicular ao vetor \vec{C} .

Demonstração. Se $C \neq 0$ como $r \times r' = C$, temos que C é ortogonal (perpendicular) a r , portanto r pertence ao plano determinado por C e que passa pela origem. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu(e + \frac{r}{\|r\|}) &= \dot{r} \times C \\ \Rightarrow \mu e + \mu \frac{r}{\|r\|} &= \dot{r} \times C \\ \langle \mu e + \mu \frac{r}{\|r\|}, C \rangle &= \langle \dot{r} \times C, C \rangle, \text{ Daí} \\ \mu \langle e, C \rangle + \frac{\mu}{\|r\|} \langle r, C \rangle &= \langle \dot{r} \times C, C \rangle. \text{ Consequentemente,} \\ \mu \langle e, C \rangle + 0 &= 0 \Rightarrow \langle e, C \rangle = 0 \end{aligned}$$

e é um vetor ortogonal a C .

□

bi) Se $e = 0$, então o movimento é circular e uniforme.

Demonstração. Se $e = 0$, temos que a equação de e será:

$$\mu \cdot \frac{r}{\|r\|} = r' \times C \quad (3.1)$$

Fazendo o produto escalar da expressão acima com o vetor r e sabendo que da identidade vetorial $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)$, temos que

$$\begin{aligned} \mu \frac{r \cdot r}{\|r\|} &= r \cdot (r' \times C) \\ \mu \frac{\|r\|^2}{\|r\|} &= C \cdot (r \times r') \\ \|r\| &= \frac{\|C\|^2}{\mu} \end{aligned}$$

Ou seja, $\|r\|$ é constante, logo o movimento é circular. Da expressão da energia, temos que

$$\|r'\|^2 = 2 \left(h + \frac{\mu}{\|r\|} \right),$$

então, uma vez que h , μ e $\|r\|$ são constantes, $\|r'\|^2$ também é uma constante. □

bii) Se $e \neq 0$, então o movimento descreve uma cônica, com um foco em S , eixo e e excentricidade $\epsilon = |e|$.

Demonstração. Se $e \neq 0$. Denote por (r, θ) as coordenadas no plano do movimento com origem em S e eixo polar e .

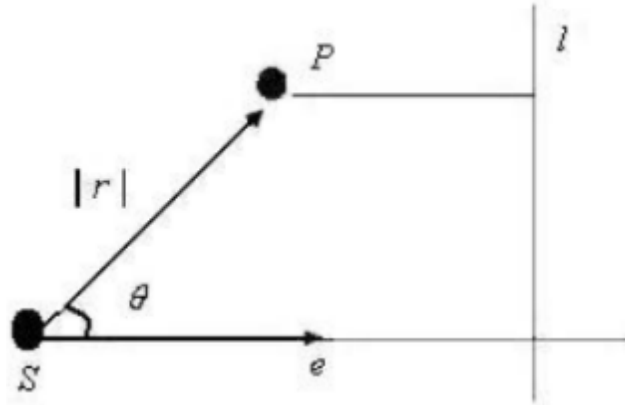


Figura 5 – Posição das massas

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

Fazendo o produto escalar da equação de e por r , teremos:

$$\begin{aligned} \mu \left(e \cdot r + \frac{r \cdot r}{\|r\|} \right) &= (r' \times C) \cdot r \\ \mu(e \cdot r + \|r\|) &= \|C\|^2 \\ \mu(\|r\|\cos(\theta)\|e\| + \|r\|) &= \|C\|^2 \\ \|r\| &= \frac{\|C\|^2/\mu}{\epsilon\cos(\theta) + 1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

A qual é a equação de uma cônica com excentricidade $\epsilon = \|e\|$, eixo e e parâmetro $p = \frac{\|C\|^2}{\mu}$. □

3.1 As Leis de Kepler

1ª Lei: O item *bii)* corresponde à primeira lei de Kepler, que diz: "As órbitas dos planetas em torno do Sol são elipses com o Sol em um dos focos".

Observação 3.1.1. O valor $\theta = 0$ corresponde ao ponto chamado "pericentro" da órbita, que nos dá a menor distância da partícula ao centro atrator, dada por $r = \frac{p}{1+\epsilon}$. Já $\theta = \pi$, corresponde ao ponto chamado "apocentro" da órbita, que nos dá a maior distância da partícula ao centro atrator, dado por $r = \frac{p}{1-\epsilon}$. Quando o centro atrator é o Sol, os pontos

de menor e maior distância são chamados de "periélio" e "afélio", e quando o centro atrator é a Terra, são chamados de "perigeu" e "apogeu", respectivamente.

2º Lei: No caso em que $C \neq 0$, outra consequência importante pode ser deduzida da expressão do momento angular. Vamos introduzir no plano de movimento um sistema de coordenadas polares centrado em O que forma um sistema em \mathbb{R}^3 com o vetor C. Se $e \neq 0$. Denote por (r, θ) as coordenadas no plano do movimento com origem em S e eixo polar e .

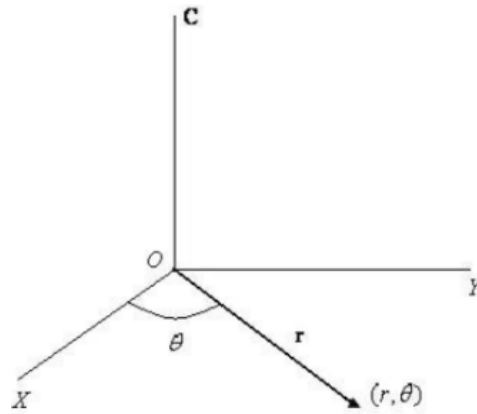


Figura 6 – Sistema de coordenadas polares

Fonte: CABRAL; VIDAL (1999)

Então, temos $r = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$ e $C = (0, 0, c)$. Veja que, como $r' = (-r \sin(\theta)\theta', r \cos(\theta)\theta', 0)$, temos que

$$\begin{aligned} r \times r' &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0) \times (-r \sin(\theta)\theta', r \cos(\theta)\theta', 0) = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos(\theta) & r \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta)\theta' & r \cos(\theta)\theta' & 0 \end{vmatrix} \\ &= r \times r' = r^2 \cos^2(\theta)\theta' k + r^2 \sin^2(\theta)\theta' k \end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, temos

$$r^2 \cos^2(\theta)\theta' k + r^2 \sin^2(\theta)\theta' k = r^2 \theta' k$$

daí, veja que

$$r^2 \theta' = C, \tag{3.3}$$

pois $r \times r' = (0, 0, r^2\theta')$.

Sabemos que a equação da área descrita pelo raio vetorial de t_0 a t é dada por

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \|r\|^2 \theta' dt$$

onde, da equação anterior, sabemos que

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \|r\|^2 \theta' dt = \frac{\|C\|}{2} (t - t_0), \quad (3.4)$$

Com isso, obtemos a segunda lei de Kepler,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|C\|}{2}$$

isto é, a taxa de variação da área descrita pelo raio do vetor é constante.

3ª Lei: Considere uma elipse de semi-eixos a e b , então a sua área é πab . Tomando P como período do movimento, temos

$$\frac{\pi ab}{P} = \frac{A(t, t_0)}{t - t_0}$$

Por (3.3), temos que a equação acima, torna-se:

$$\frac{\pi ab}{P} = \frac{\|C\|}{2}$$

Elevando a igualdade acima ao quadrado e usando $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$, obtemos

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}.$$

O que corresponde à terceira lei de Kepler, que expressa "os cubos dos semi-eixos maiores das órbitas elípticas dos planetas, estão entre si, como os quadrados dos seus movimentos em torno do Sol".

3.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS

As constantes h , C e e satisfazem a seguinte relação:

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 2h\|C\|^2 \quad (3.5)$$

Demonstração. De fato, elevando ao quadrado a expressão de e , teremos:

$$\mu^2 \left[\|e\|^2 + 2 \frac{(e \cdot r)}{\|r\|} + 1 \right] = \|r' \times C\|^2 = \|r'\|^2 \|C\|^2$$

Usando as equações de h e (3.2), na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} \mu^2 \left[\|e\|^2 + \frac{2}{\|r\|} \left(\frac{\|C\|^2}{\mu} - \|r\| \right) + 1 \right] &= 2\|C\|^2 \left(h + \frac{\mu}{\|r\|} \right) \\ \mu^2 \epsilon^2 + \frac{2\mu^2}{\|r\|} - \frac{2\|r\|\mu^3}{\mu\|r\|} + \mu^2 &= 2\|C\|^2 h + \frac{2\|C\|^2 \mu}{\|r\|} \\ \mu^2 \epsilon^2 + \frac{2\|C\|^2 \mu}{\|r\|} - \frac{2\|r\|\mu^3}{\mu\|r\|} + \mu^2 &= 2\|C\|^2 h + \frac{2\|C\|^2 \mu}{\|r\|} \\ \mu^2 \epsilon^2 - 2\mu^2 + \mu^2 &= 2h\|C\|^2 \\ \mu^2(\epsilon^2 - 1) &= 2h\|C\|^2 \end{aligned}$$

□

Desse modo, decorre de (3.5) que:

i) Se $h < 0 \Rightarrow 0 < \epsilon < 1 \Rightarrow$ órbita elíptica;

Demonstração. Se $h < 0$, podemos escrever a Equação (3.5) como:

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = -2|h\|C\|^2 \quad (3.6)$$

Observe que, para $h < 0$, o lado direito da equação é negativo. Para que a igualdade seja satisfeita, o lado esquerdo também deve ser negativo. Isso só é possível se $(\epsilon^2 - 1) < 0$, o que implica que ϵ está no intervalo $(0, 1)$. □

ii) Se $h = 0 \Rightarrow \epsilon = 1 \Rightarrow$ órbita parabólica;

Demonstração. Quando $h = 0$, a Equação (3.5) se torna:

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 0 \quad (3.7)$$

Isso implica que ou $\mu = 0$ (o que é improvável) ou $(\epsilon^2 - 1) = 0$, ou seja, $\epsilon = 1$.

$$\epsilon^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2} = 1$$

Portanto, quando $h = 0$, temos $\epsilon = 1$, o que corresponde a uma órbita parabólica. □

iii) Se $h > 0 \Rightarrow \epsilon > 1 \Rightarrow$ órbita hiperbólica;

Demonstração. Quando $h > 0$, a Equação (3.5) se torna:

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 2h\|C\|^2 \quad (3.8)$$

Observe que, para $h > 0$, o lado direito da equação é positivo. Para que a igualdade seja satisfeita, o lado esquerdo também deve ser positivo. Isso só é possível se $(\epsilon^2 - 1) > 0$, o que implica que ϵ está no intervalo $(1, \infty)$.

Portanto, se $h > 0$, temos ϵ no intervalo $(1, \infty)$, o que corresponde a uma órbita hiperbólica. \square

4 Configurações Centrais e as Equações de Laura-Andoyer

4.1 Introdução às configurações do problema de 3 ou mais corpos

O salto de dificuldade ao passar do Problema de dois corpos para configurações com 3 ou mais corpos, marcou a fase de maior complexidade da Mecânica Celeste. Assim que o problema dos dois corpos foi solucionado, o próximo desafio passou a ser o problema dos três corpos.

Ao considerar um sistema composto por três corpos interagindo gravitacionalmente, surge a questão de quais resultados do problema de dois corpos ainda satisfariam o sistema, sendo as constantes de movimento, que incluem o vetor velocidade do centro de massa, o vetor momento angular total do sistema e a energia mecânica total.

A trajetória de cada um dos corpos é influenciada pelas posições e velocidades atribuídas a eles no início. Nesse contexto, surgem tanto soluções periódicas quanto soluções caóticas, diferentemente do problema de dois corpos, no qual não existem soluções caóticas, apenas periódicas (como as elípticas) e não periódicas (como as parabólicas ou hiperbólicas).

O problema restrito dos três corpos é uma variação específica do problema geral, na qual um dos corpos possui uma massa significativamente menor que os outros dois. Nesse caso, a influência gravitacional do corpo de menor massa sobre os outros é desprezível, permitindo que os corpos mais massivos interajam entre si. Assim, esses corpos maiores descrevem trajetórias circulares ou elípticas ao redor do centro de massa comum.

Em sistemas caóticos, pequenas diferenças nas condições iniciais podem levar a resultados finais drasticamente distintos. Um exemplo clássico é o problema dos três corpos, no qual um dos corpos pode ser ejetado, afastando-se indefinidamente dos outros dois, reduzindo-se a um problema de dois corpos, que possui solução analítica exata.

O estudo do problema dos três corpos gerou avanços significativos. Entre eles destacam-se o uso do efeito estilingue gravitacional em viagens espaciais, a previsão de trajetórias

de asteroides e cometas próximos à Terra, e a aplicação dos pontos de Lagrange para posicionar com segurança telescópios espaciais.

De forma mais intuitiva, as configurações centrais podem ser entendidas como uma classe especial de configurações geométricas em que a aceleração gravitacional de cada partícula, em relação às demais, aponta para o centro de massa e é proporcional à distância da partícula até esse ponto.

No século XVIII, Euler demonstrou a existência de configurações centrais para três partículas alinhadas em uma reta. Isso significa que, em termos geométricos, essa configuração corresponde a três pontos que, a qualquer instante, permanecem colineares. Essa situação pode ser descrita matematicamente como um ponto em $(\mathbb{R}^1)^3$.

A ideia de configuração central foi introduzida por Laplace em 1789, no estudo das soluções homotéticas de Lagrange, no estudo do problema de 3 corpos. No mesmo período, Lagrange encontrou duas soluções homográficas adicionais no problema de 3 corpos, que estão nos vértices de um triângulo equilátero. Curiosamente, nessas configurações, o centro de massa do sistema não precisa, necessariamente, coincidir com o centro geométrico do triângulo, o que contraria a intuição inicial.

É importante estudar configurações centrais pois são as condições iniciais para as únicas condições explícitas do problema de n corpos.

4.2 Configurações Centrais

Considere n corpos pontuais, com massas $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}^d$, dadas pelos vetores $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Seja $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ a distância entre o i -ésimo e o j -ésimo corpo.

Definição 4.2.1. *O vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^d$ é chamado configuração. Dizemos que uma configuração $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ é não singular se $\|x_i - x_j\| = r_{ij} \neq 0$ para i, j , caso contrário, dizemos que a configuração é singular.*

Usando as leis de Newton para o movimento e a lei dos inversos dos quadrados para a atração gravitacional, a equação de segunda ordem para o i -ésimo corpo é dada por

$$m_i \vec{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

onde \vec{x}_i denota o vetor aceleração do i -ésimo corpo e $U(x)$ é o potencial Newtoniano dado por

$$U(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (4.2)$$

Para que as equações diferenciais estejam bem definidas, vamos supor que a configuração x é não-singular.

Adotamos um referencial inercial, no qual o centro de massa do sistema é dado por

$$c = \sum_{j=1}^n \frac{m_j x_j}{M}$$

sendo $M = m_1 + \dots + m_n$ a massa total do sistema.

Definição 4.2.2. A configuração x é chamada de configuração central se as posições dos corpos satisfazem as equações

$$\sum_{i \neq j} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} + \lambda (x_i - c) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ não-nula.

Definição 4.2.3. Uma solução do problema de n corpos é dita homográfica se existir uma função escalar $r = r(t)$, uma matriz $\Omega(t) \in SO(3)$ e um vetor $\phi = \phi(t) \in \mathbb{R}^3$, tal que $r_i(t) = r(t)\Omega(t)r_i^0 + \phi(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sendo r, Ω, ϕ estão definidos para todo t , onde a solução é definida e $r_i^0 = r_i(t_0)$.

Definição 4.2.4. A dimensão de uma configuração central é a dimensão de menor sub-espaco afim de um \mathbb{R}^d que contém os pontos x_i .

Se a dimensão da configuração x for, por exemplo, 1, 2 ou 3, podemos classificá-la como colinear, planar ou espacial, respectivamente.

A invariância das configurações centrais sob homotetias e simetrias é uma propriedade importante no contexto do problema de n -corpos na mecânica celeste.

Teorema 4.2.1. Configurações são invariantes módulo homotetias e isometrias.

Demonstração. Considere a configuração central, com posições $x_i \in \mathbb{R}^d$ com fator de proporcionalidade $\lambda > 0$.

Aplicando uma homotetia com fator $k > 0$, temos um configuração central:

$$(x'_1, \dots, x'_n) = k(x_1, \dots, x_n). \quad (4.4)$$

Calculando o vetor de força gravitacional, obtemos que

$$F'_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x'_j - x'_i)}{r_{ij}^3} \quad (4.5)$$

Por (4.4), pode-se afirmar que

$$x'_j - x'_i = k(x_j - x_i), r_{ij} = kr_{ij} \text{ e } c' = kc. \text{ Logo,}$$

$$F' = \frac{1}{k^2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} = \frac{-\lambda}{k^2} m_i (x_i - c') = \frac{-\lambda}{k^3} m_i (x'_i - c)$$

Portanto, (x'_1, \dots, x'_n) é configuração central com multiplicador $\lambda' = \frac{\lambda}{k^2}$

Agora considere uma transformação linear T preservando a origem e as distâncias relativas tal que $T^t T = I, \det(T) = \pm 1$. Observe que

$$x'_i = T(x_i), c' = T(c) \quad (4.6)$$

Segue que o vetor posição muda para $x'_i = T(x_i)$, e a força gravitacional resultante é

$$F'_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x'_j - x'_i)}{r'^3_{ij}}$$

Por (4.6), temos que

$$F'_i = T \left(\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{r^3_{ij}} \right) = T F_i$$

Temos que $F_i = -\lambda m_i (x_i - c)$, conclui-se que

$$F'_i = T(-\lambda m_i (x_i - c)) = -\lambda m_i T(x_i - c) = -\lambda m_i (T(x_i) - T(c))$$

Logo, $(T(x_1), \dots, T(x_n))$ é configuração central. \square

4.3 Aplicações às Equações de Laura Andoyer

Definição 4.3.1. Considere $u, v \in \mathbb{R}^2$. O produto exterior de dois vetores u e v mede a não comutatividade de seu produto tensorial. Assim, o produto exterior $u \wedge v$ é a matriz quadrada definida por

$$(u \wedge v)_{ij} = (u_i v_j - u_j v_i) \quad (4.7)$$

O produto exterior é definido para dois vetores de dimensão arbitrária. Observe que o produto exterior compartilha muitas propriedades com o produto vetorial. Podemos verificá-las a partir da definição do produto exterior com a diferença de dois produtos tensoriais que

$$v \wedge v = 0; \quad u \wedge v = -v \wedge u;$$

$$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w;$$

$$c(u \wedge v) = (cu) \wedge v = u \wedge (cv)$$

Proposição 4.3.1. (Equações de Laura-Andoyer) O vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$ é uma configuração central planar se, e somente se,

$$0 = f_{i,j} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Lambda_{ijk}; \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (4.8)$$

onde $R_{ij} = r_{ij}^{-3}$ e $\Lambda_{ijk} = (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k)$. As equações $f_{i,j}$ são chamadas de Equações de Laura-Andoyer.

Demonstração. \Rightarrow Seja $\gamma_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$. As equações para configurações centrais podem ser reescritas como $\gamma_i = \lambda(x_i - c)$. Temos que

$$\gamma_i - \gamma_j = (m_i + m_j) R_{ij} (x_i - x_j) + \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ij} (x_i - x_k) - R_{jk} (x_j - x_i) + R_{jk} (x_i - x_k)) \quad (4.9)$$

Fazendo o produto da equação com $(x_i - x_j)$, utilizando a equação (??) e observando que $(\gamma_i - \gamma_j) = \lambda(x_i - x_j)$, obtemos:

$$0 = (\gamma_i - \gamma_j) \wedge (x_i - x_j) = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Lambda_{ijk} \quad (4.10)$$

Temos por Λ_{ijk} é o dobro da área do triângulo $(r_i r_j r_k)$, logo temos $\Delta_{ijk} = \Delta_{kij}$ e $\Delta_{ijk} = -\Delta_{ikj}$, para todo i, j, k .

\Leftarrow Calculando o produto exterior das equações de Laura-Andoyer com vetor $(x_i - x_j)$, obtemos

$$\sum_{k \neq i,j} m_k R_{ik} (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k) = \sum_{k \neq i,j} m_k R_{j,k} (x_i - x_j) \wedge (x_i - x_k). \quad (4.11)$$

Inserindo o índice j na soma do lado esquerdo e o índice i na soma no lado direito não alteramos a última equação, então

$$(x_i - x_j) \wedge \sum_{k \neq i} m_k R_{ik} (x_i - x_k) = \sum_{k \neq j} m_k R_{jk} [x_i \wedge (x_j - x_k) + (x_i \wedge x_k)]. \quad (4.12)$$

Desenvolvendo essa expressão e usando a definição dos γ_i , é possível provar que:

$$(x_i - x_j) \wedge (m_j \gamma_i - m_i \gamma_j) = 0. \quad (4.13)$$

Daí,

$$m_j x_i \wedge \gamma_i - m_i x_i \wedge \gamma_j - m_j x_j \wedge \gamma_i + m_i x_j \wedge \gamma_j = 0 \quad (4.14)$$

Tomando a soma em j de 1 até n , e fazendo simplificações utilizando propriedades do produto exterior, concluímos que $M(x_i - c) \wedge \gamma_i = 0$, o que implica que $(x_i - c)$ e γ_i são paralelos. Assim, existe constante λ_i tal que $\gamma_i = \lambda_i(x_i - c)$.

De (4.13) temos $(\frac{\gamma_i}{m_i} - \frac{\gamma_j}{m_j}) \wedge (x_i - x_j) = 0$, o que implica em

$$\left(\frac{\lambda_i}{m_i} - \frac{\lambda_j}{m_j}\right)(x_j - c) \wedge (x_i - c) = 0, \forall i, j. \quad (4.15)$$

Como a configuração não é colinear, temos $\frac{\lambda_i}{m_i} = \frac{\lambda_j}{m_j} = \lambda$, para todo i, j . Portanto,

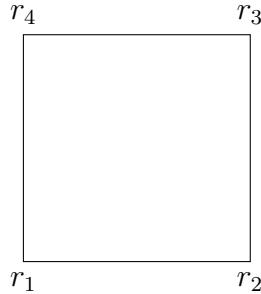
$$\lambda(x_i - c) = \sum_{j \neq i} m_j R_{ij}(x_i - x_j), \quad (4.16)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e assim as equações de configurações centrais são satisfeitas. \square

4.3.1 Equações de Laura Andoyer para configurações de 4 corpos no espaço

Como aplicação das equações de Laura Andoyer, vamos considerar o seguinte exemplo:

A configuração formada por quatro corpos de massas iguais nos vértices de um quadrado constitui uma configuração central.



Fonte: Autor

Precisamos mostrar que as seis equações de Laura-Andoyer-Dziobek (5) são satisfeitas. É simples verificar que as equações $f_{1,3} = 0$ e $f_{2,4} = 0$ são trivialmente satisfeitas. Por outro lado, as equações $f_{1,2} = 0$, $f_{1,4} = 0$, $f_{2,3} = 0$ e $f_{3,4} = 0$ são equivalentes às seguintes equações, respectivamente

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= m_3(R_{1,3} - R_{2,3})\Delta_{123} + m_4(R_{1,4} - R_{2,4})\Delta_{124} = 0, \\ f_{1,3} &= m_2(R_{1,2} - R_{3,2})\Delta_{132} + m_4(R_{1,4} - R_{3,4})\Delta_{134} = 0, \\ f_{1,4} &= m_2(R_{1,2} - R_{4,2})\Delta_{142} + m_3(R_{1,3} - R_{4,3})\Delta_{143} = 0, \\ f_{2,3} &= m_1(R_{2,1} - R_{3,1})\Delta_{231} + m_4(R_{2,4} - R_{3,4})\Delta_{234} = 0, \\ f_{2,4} &= m_1(R_{2,1} - R_{4,1})\Delta_{241} + m_3(R_{1,3} - R_{4,3})\Delta_{243} = 0 \\ f_{3,4} &= m_1(R_{3,1} - R_{4,1})\Delta_{341} + m_2(R_{3,2} - R_{4,2})\Delta_{342} = 0. \end{aligned}$$

Tomando, por hipótese, que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, as equações acima são satisfeitas.

Este é um exemplo de configuração planar. Na próxima fase do trabalho estudaremos configurações centrais de dimensão maior do que 2. Para tanto estamos estudando generalizações das equações de Laura-Andoyer.

4.4 Generalização das equações de Laura-Andoyer

Nesta seção, derivamos um conjunto de equações de Laura-Andoyer equivalentes as equações de configuração central para dimensão arbitrária e número de corpos. Derivamos as equações de Laura-Andoyer para configurações de Dziobek. Descobrimos que existem apenas duas equações para todo d e usamos para obter nossas equações algébricas envolvendo os parâmetros s, k, d, a .

Seja $x = (x_1, \dots, x_{d+h})$ uma configuração central de dimensão d . Suponha sem perda de generalidade que cada $x_i \in \mathbb{R}^d$. A matriz da configuração x é a matriz $(d+h) \times (d+h)$ dada por:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & \dots & x_{1(d+h)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{d1} & \dots & x_{d(d+h)} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos ainda o determinante da configuração x por $\omega(x) = |X|$

Seja $x_{l_1 \dots l_h}$ a subconfiguração obtida de x removendo os corpos x_{l_1}, \dots, x_{l_h} . Seja $X_{l_1 \dots l_h}$ a matriz da configuração $x_{l_1 \dots l_h}$.

Observação: $\omega(x_{l_1}, \dots, x_{l_h})$ é o volume do simplexo obtido da configuração x removendo os corpos l_1, l_2, \dots, l_h .

Exemplo 4.4.1. Seja $n = 6, x = (x_1, \dots, x_6)$ e $d = 3$.

$$W(X_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{31} & x_{41} & x_{51} & x_{61} \\ x_{32} & x_{42} & x_{52} & x_{62} \\ x_{33} & x_{43} & x_{53} & x_{63} \end{pmatrix}$$

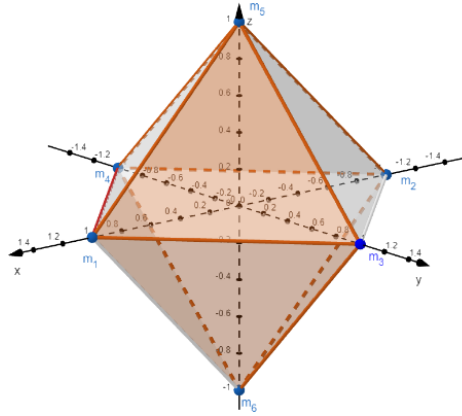


Figura 7 – Configuração Central com 6 corpos nos vértices de um octaedro regular

Fonte: Autor

Como a dimensão de X é $d + 1$, temos que $|X_{l_1 \dots l_{h-1}}| \neq 0$, para todo l_1, \dots, l_{h-1} . Tome por $x_{l_1 \dots l_h}$, em que $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_h \leq n$, a subconfiguração de d corpos obtidos da configuração x removendo os corpos $x_{l_1 \dots l_h}$. A matriz de configuração d de $x_{l_1 \dots l_h}$ é denotada por $X_{l_1 \dots l_h}$, e temos $w(x_{l_1 \dots l_h}) = |X_{l_1 \dots l_h}|$.

Esta é uma generalização para as equações de Laura-Andoyer com dimensão $d > 2$. A demonstração desse resultado foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada em (SILVA; TSAI).

Teorema 4.4.1. *Seja $(x_1, x_2, \dots, x_{d+h})$ uma configuração com $d + h$ corpos em \mathbb{R}^d . X é uma configuração central de dimensão d se, e somente se, X satisfaz as equações de Laura-Andoyer*

$$0 = L_{ijl_1 \dots l_h} = \sum_{\Delta=1}^h m_{l_s} (-1)^s (R_{ils} - R_{jls}) \Delta_{l_1 \dots l_s l_{s+1} \dots l_h}, \quad (4.17)$$

em que,

$$\Delta_{l_1 \dots l_h} = (-1)^{l_1 + \dots + l_h} \omega(X_{l_1 \dots l_h}), \quad R_{ij} = r_{ij}^{-3}.$$

4.4.1 Equações de Laura Andoyer para configurações de 6 corpos no espaço

Vamos utilizar as equações de Laura-Andoyer para mostrar que a configuração de seis corpos com massas iguais nos vértices de um octaedro regular constitui uma configuração central.

Considere uma configuração de 6 corpos no espaço.

Vamos mostrar que $L_{13256} = 0$. Chamemos de m a massa dos 6 corpos.

As posições dos corpos são $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$, $x_4 = (0, -1, 0)$, $x_5 = (0, 0, 1)$, $x_6 = (0, 0, -1)$.

Temos que $R_{12} = R_{34} = R_{56} = 2^{-3}$ e $R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{16} = R_{23} = R_{24} = R_{25} = R_{26} = R_{35} = R_{36} = R_{45} = R_{46} = \sqrt{2}^{-3}$.

$$\Delta_{26} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Similarmente, $\Delta_{12} = 0$ e $\Delta_{25} = 2$.

Sendo $1 \leq l_1 < l_2 \leq l_3 \neq i, j$, temos

$$F_{ijl_1l_2l_3} = m_{l_1}(R_{il_1} - R_{jl_1})\Delta_{l_2l_3} - m_{l_2}(R_{il_2} - R_{jl_2})\Delta_{l_1l_3} + m_{l_3}(R_{il_3} - R_{jl_3})\Delta_{l_1l_2}$$

Logo,

$$f_{13245} = m_2(R_{12} - R_{32})\Delta_{45} - m_4(R_{14} - R_{34})\Delta_{25} + m_5(R_{15} - R_{35})\Delta_{24} = 0 \quad (4.18)$$

$$m \cdot (2^{-3} - \sqrt{2}^{-3}) \cdot 0 - m \cdot (\sqrt{2}^{-3} - \sqrt{2}^{-3}) \cdot 2 + m \cdot (\sqrt{2}^{-3} - \sqrt{2}^{-3}) \cdot (-2) = 0. \quad (4.19)$$

O procedimento para as outras $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} - 1$ equações é análogo.

Referências

- 1 CHAVES, Felipe Emanuel. **Configurações Centrais no problema de n corpos**. 2009. 81f. Dissertação (Mestrado em Ciências: Física e Matemática). Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2009.
- 2 MELLO, Luís Fernando. **Andoyer equations for non-collinear planar central configurations**. 2017. 13f. Artigo Científico. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2017.
- 3 SANTOS, Edjane Oliveira dos. *O Problema de Força Central: Estudo do Movimento de um Satélite Artificial*. 2008. 56f. Monografia (Graduação em Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2008.
- 4 SILVA, João Henrique Lírio da. **Configurações Centrais Empilhadas no Problema de n -corpos**. 2020. 87f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Itajubá. Itajubá, 2020.
- 5 SILVA, Thiago Dias Oliveira. **Finitude Genérica de Configurações Centrais de Dimensão $n-2$ em Potenciais Homogeneos com Expoentes Inteiros**. 2013. 70f. Tese (Doutorado em Matemática). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.
- 6 SILVA, Thiago Dias Oliveira, TSAI, Ya Lun **Generalized Laura-Andoyer equations and the enumeration of some symmetrical classes of Dziobek configurations**, 2024. (Preprint)
- 7 CABRAL, Hildeberto, VIDAL, Cláudio. *Introdução à Mecânica Celeste*. 1999.