UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Jaqueline Mayara da Silva

Topologia para além de $\mathbb{R}^n$: Compacidade em Produtos Finitos e Infinitos Enumeráveis

Recife - PE
Dezembro de 2025

Jaqueline Mayara da Silva

Topologia para além de $\mathbb{R}^n$: Compacidade em Produtos Finitos e Infinitos Enumeráveis

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciada em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho

Recife - PE
Dezembro de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586t Silva, Jaqueline Mayara da.
Topologia para além de $\mathbb{R}^n$: compacidade em produtos finitos e infinitos enumeráveis / Jaqueline Mayara da Silva. – Recife, 2025.
106 f.; il.

Orientador(a): Gilson Mamede de Carvalho.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2026.

Inclui referências.

1. Topologia . 2. Método dos elementos finitos. 3. Topologia de espaços métricos. 4. Análise numérica 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Carvalho, Gilson Mamede de, orient. II. Título

CDD 510

Jaqueline Mayara da Silva

Topologia para além de $\mathbb{R}^n$: Compacidade em Produtos Finitos e Infinitos Enumeráveis

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciada em matemática.

Aprovada em: 15/12/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Recife - PE
Dezembro de 2025

Dedico este trabalho aos dois pais que tive a dádiva de ter, José Dogival (em memória) e Rozil João (em memória), que tanto sonharam os meus sonhos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder saúde, força e fé para sonhar e tornar realidade tudo o que um dia parecia distante. A Ele, que me sustentou nos momentos difíceis e me deu a alegria de viver este grande momento.

À minha maior rede de apoio: minha família. À minha mãe, dona Nicinha, por sua coragem e amor incondicional, que me inspiram todos os dias, a senhora sem dúvidas é minha maior motivação. Ao meu pai, Dogival (em memória), que mesmo tendo partido tão cedo, sonhou que um dia eu realizasse meu sonhos. Ao meu irmão, Júnior, pela presença constante. À minha tia Vera, minha segunda mãe, que me criou com tanto amor, e ao meu tio Rozil (em memória), um verdadeiro pai, cuja ausência deixa saudade, mas cuja lembrança me dá força. Ao meu tio Veraldo e minha tia Zane, que sempre me incentivaram de perto. Aos meus primos Jeane, Lívia e Obadias, que sempre se fizeram presentes e comemoraram minhas conquistas. E a todos os familiares que sempre torceram por mim.

Agradeço à Gabriele, que sempre foi meu ponto de apoio nos dias difíceis e partilhou inúmeras alegrias na minha vida pessoal. À Ruane, que me motivou quando eu mesma desacreditei. Agradeço também a Kauã, que sempre fez questão de mencionar seu carinho e orgulho por mim. À Daiane e à Suianny, minhas irmãs da vida, que comemoraram cada passo dado em direção aos meus sonhos e tornaram cada fardo pessoal mais leve.

Agradeço também aos professores que fizeram parte da minha formação ao longo dos anos, que certamente foram minha inspiração para escolher a licenciatura. De maneira especial, à professora Albérica, que foi minha professora no ensino médio e incentivou fortemente que eu cursasse Matemática.

Aos professores do Departamento de Matemática, por todo o aprendizado e dedicação, especialmente àqueles com quem tive o prazer de estudar. À professora Bárbara Costa, responsável pelo meu primeiro contato com a área acadêmica e por despertar ainda mais meu interesse pela pesquisa. Aos professores Eberson Ferreira, Daniel Tomaz, Thamires Cruz, Eudes Mendes e Filipe Andrade, cuja didática e ensino me inspiraram profundamente. De maneira especial, à professora Yane Araújo, à qual tive o prazer de ser aluna, foi minha orientadora de monitoria e avaliadora na iniciação científica, a quem admiro imensamente e considero um exemplo de profissional e ser humano. Agradeço também aos professores Edgar Corrêa e Lorena Brizza, que além de excelentes profissionais, ajudaram em diversos percursos na conclusão desta monografia. E de modo especial agradeço ao presente coordenador do curso, professor Jogli Gidel, que sempre esteve presente de modo muito atencioso com os alunos e contribuiu de maneira significativa nas dificuldades burocráticas.

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Gilson Carvalho, o qual tive a honra de ser aluna, logo depois realizar minha Iniciação Científica e posteriormente realizar esta monografia. Sua dedicação, paciência e entusiasmo pelo ensino foram essenciais para meu amadurecimento acadêmico. Sou profundamente grata por todo o apoio, incentivo e confiança que me deu ao longo dessa trajetória.

Agradeço à banca examinadora, professor Denílson Pereira e prorfessora Yane Araújo, pela disponibilidade, pelas contribuições valiosas e pelo olhar atento que enriqueceram ainda mais este trabalho.

Estendo meus agradecimentos aos amigos que o curso de Matemática me proporcionou, e que tornaram essa caminhada mais leve. À Sophia, que foi minha parceira durante o curso de graduação e que, além disso, tornou-se uma verdadeira amiga para a vida, compartilhando não só a vida acadêmica, mas também inúmeros momentos significativos. De maneira especial, à Alexandre, que foi minha dupla em diversas etapas do curso, dividindo comigo não só o peso dos estudos na área acadêmica, mas também vários momentos dos quais guardo com carinho. Sua amizade, apoio e presença constante fizeram toda a diferença. Agradeço com muito carinho, às meninas que compartilham essa jornada comigo desde o primeiro período. À Beatriz Bento, Maria Laura e Kewellen. Sou extremamente grata pela amizade, pelas risadas e pela parceria que tornaram cada momento da graduação inesquecível. Estendo também meus agradecimentos à Lucas Kauan, cuja amizade generosa e companheira facilitou muitos percursos ao longo da graduação, sendo uma presença importante em diferentes momentos dessa trajetória. De modo muito especial, agradeço a Tainá Queiroz, que neste último ano de curso se aproximou de maneira significativa e além de uma boa amizade, com enorme generosidade, me ajudou e incentivou na reta final da escrita deste trabalho. Agradeço também a Thais, Warsdley e Pedro Borges, que partilharam comigo tantos momentos significativos. Estendo minha gratidão a Luiz, que dividiu comigo os desafios de uma iniciação científica. Sou eternamente grata a Natanael, Rêne e Fábio, cuja amizade e apoio fizeram total diferença. E não posso deixar de mencionar meu afilhado Gustavo, cuja presença sempre era cheia de carinho e incentivo.

Por fim, agradeço à Universidade Federal Rural de Pernambuco, minha querida Ruralinda, que foi verdadeiramente uma casa durante toda a graduação. Foi nesse espaço que conheci pessoas que guardarei sempre com muito carinho e que cresci como pessoa, acadêmica e futura profissional vivendo experiências que levarei comigo por toda a vida. Sou profundamente grata por tudo o que essa instituição me proporcionou.

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre Topologia Geral e uma análise sobre a Compacidade em produtos finitos e infinitos. Para estabelecer a base teórica necessária, iniciamos com resultados e conceitos preliminares relacionados à teoria dos conjuntos, noções de funções e famílias de conjuntos. Em seguida, introduzimos os espaços topológicos e, posteriormente, a Topologia Euclidiana como um exemplo mais palpável dessa estrutura. Na sequência, são discutidos os conceitos de pontos de acumulação e homeomorfismos, avançando depois para a noção de continuidade. Posteriormente, apresentamos os espaços métricos como uma forma de interpretar e gerar topologias. Mais adiante, estudamos a Compacidade, preparando o caminho para a etapa final, na qual é introduzida a Topologia Produto. Por fim, estudaremos a Topologia Produto com destaque na Compacidade em produtos finitos e em produtos infinitos de Espaços Topológicos.

Palavras-Chave: Topologia Geral, Compacidade, Topologia Produto.

Abstract

This work consists of a study on General Topology and an analysis of Compactness in finite and countably infinite products. To establish the necessary theoretical basis, we begin with preliminary results and concepts related to set theory, notions of functions, and families of sets. Next, we introduce topological spaces and, subsequently, Euclidean Topology as a more tangible example of this structure. Following this, accumulation points and homeomorphisms are discussed, moving on to the notion of continuity. Later, we present metric spaces as a way to interpret and generate topologies. Further on, we study Compactness, preparing the way for the final stage, in which Product Topology is introduced. Finally, we will study Product Topology, focusing on Compactness in finite and infinite products of Topological Spaces.

KeyWords: General Topology, Compactness, Product Topology.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A Topologia, enquanto ramo fundamental da Matemática moderna, surgiu do esforço de compreender propriedades dos espaços que permanecem invariantes sob transformações contínuas. Suas origens remontam ao século XIX, com os trabalhos de matemáticos como Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy, Georg Cantor e Henri Poincaré, cujas ideias prepararam o caminho para o estudo rigoroso da continuidade, convergência e forma. A formalização da Topologia como disciplina independente consolidou-se no início do século XX, especialmente com as contribuições de Felix Hausdorff, que introduziu o conceito de espaço topológico e estabeleceu a base da chamada Topologia Geral.

Desde então, a Topologia Geral tornou-se uma ferramenta essencial para o entendimento e a unificação de diversas áreas da Matemática, como Análise, Geometria e Álgebra. O estudo de conceitos como Compacidade, conexidade e separação fornece uma estrutura abstrata que permite tratar propriedades fundamentais dos espaços sem depender de métricas específicas. Entre esses conceitos, a Compacidade desempenha papel central, pois está intimamente relacionada a noções analíticas como continuidade uniforme, existência de subsequências convergentes e limites.

Um dos temas mais ricos e sutis da Topologia é o comportamento da Compacidade sob a formação de produtos de espaços. No entanto, a diferença entre produtos finitos e produtos infinitos de espaços topológicos levanta questões conceituais e técnicas que merecem uma análise detalhada. Enquanto a compacidade é preservada em produtos finitos, no caso infinito ela também é preservada, embora sua demonstração exija o uso de ferramentas adicionais.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo estudar os fundamentos da Topologia Geral, com ênfase no conceito de Compacidade e em seu comportamento sob produtos finitos e infinitos de espaços topológicos. Para isto, no primeiro capítulo apresentamos os conceitos e resultados preliminares necessários para o início do estudo em Topologia.

Nele são revisados conjuntos, operações entre conjuntos, funções, famílias de conjuntos e o produto cartesiano, ferramentas básicas que sustentam o desenvolvimento teórico posterior.

O segundo capítulo reúne o fundamento teórico central do trabalho, dedicado à Topologia Geral. Nele abordamos as noções essenciais do tema como Espaços Topológicos, Pontos de Acumulação, Homeomorfismos, Continuidade, Espaços Métricos e Compacidade. Esses tópicos permitem construir uma base sólida para as discussões mais avançadas.

Por fim, o terceiro capítulo é dedicado ao estudo da Topologia Produto, inicialmente considerando produtos finitos, e depois avançando para produtos infinitos enumeráveis. Nesse contexto, discutimos condições que garantem a preservação da compacidade e analisamos um caso particular do Teorema de Tychonoff, culminando na demonstração de que o cubo de Hilbert é compacto. Esse resultado ilustra de forma concreta a profundidade e a relevância da compacidade em produtos infinitos dentro da Topologia Geral.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Antes de iniciarmos o estudo em Topologia Geral, é necessário estabelecer uma base conceitual sólida que permita compreender com clareza os resultados que serão apresentados nos capítulos seguintes. Com isto, este capítulo tem por objetivo reunir os conceitos básicos necessários ao estudo da Topologia Geral e, em particular, da Compacidade em produtos de espaços topológicos. Assim, organizamos este capítulo em três partes. Na primeira, revisamos as principais definições e operações de conjuntos, destacando as principais propriedades e resultados elementares de inclusão e igualdade. Na segunda, apresentamos o conceito de função e suas propriedades, como injetividade, sobrejetividade e bijetividade, além das noções do conjunto imagem e do conjunto imagem inversa. Por fim, introduzimos o estudo das famílias de conjuntos, que desempenham papel central na definição de topologias e em propriedades como Compacidade e continuidade, que serão exploradas nos capítulos seguintes.

As demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo podem ser encontradas em [3].

1.1 Conjuntos

Ao estudar Topologia Geral, lidamos constantemente com coleções de objetos matemáticos e as operações que podem ser realizadas entre eles. Portanto, o objetivo desta seção é apresentar a definição de conjunto, as principais operações entre conjuntos e algumas propriedades fundamentais, que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

Definição 1.1. *Um **conjunto** é uma coleção bem definida de elementos, que podem ser* *números, pontos, objetos ou quaisquer entidades matemáticas. Costuma-se denotar conjuntos por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.*

Definição 1.2. *Dizemos que um elemento **pertence** a um conjunto quando ele está contido nesse agrupamento. Essa relação é representada pelo símbolo "$\in$". Assim, se a é elemento do conjunto A, escreve-se $a \in A$. Caso contrário, se a **não pertence** a A, escreve-se $a \notin A$.*

Definição 1.3. *O **conjunto vazio**, denotado por $\emptyset$, é aquele que não contém nenhum elemento.*

Definição 1.4. *O **conjunto universo** é o conjunto que contém todos os elementos sob consideração em um determinado contexto. Todos os demais conjuntos estudados são subconjuntos do conjunto universo.*

Definição 1.5. *Dado um conjunto fundamental E e uma propriedade P, define-se um conjunto X formado por todos os elementos de E que gozam da propriedade P. Escreve-se:*

$$X = \{x \in E \mid x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Lê-se: "X é o conjunto dos elementos x de E tais que x goza da propriedade P".

Exemplo 1.6. *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e considere a propriedade $P(x)$: "x é par". Então, o conjunto dos números naturais pares é dado por:*

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Definição 1.7. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é **subconjunto** de B quando todo elemento de A também é elemento de B. Para indicar este fato, usa-se a notação*

$$A \subset B$$

*Quando $A \subset B$, dizemos também que A é parte de B ou que A está contido em B. Esta relação chama-se **relação de inclusão**.*

Proposição 1.8. *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto X, ou seja*

$$\emptyset \subset X.$$

Proposição 1.9. *Para todo conjunto A e B, a relação de inclusão $A \subset B$ é:*

1. $A \subset A$; *(Reflexiva)*

2. *Se* $A \subset B$ e $B \subset A$, *então* $A = B$. *(Antissimétrica)*

3. *Se* $A \subset B$ e $B \subset C$, *então* $A \subset C$. *(Transitiva)*

1.1.1 Operações entre Conjuntos

Definição 1.10. *A **união** dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, ou a B. Denota-se por $A \cup B$, e define-se por*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Definição 1.11. *A **interseção** dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B. Denota-se por $A \cap B$, e define-se por:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Definição 1.12. *Dois conjuntos A e B são **disjuntos** se não possuem nenhum elemento em comum, isto é*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Proposição 1.13. *Sejam A, B, C conjuntos. Valem as seguintes propriedades:*

(U.1) $A \cup A = A$

(U.2) $A \cup \emptyset = A$

(U.3) $A \cup B = B \cup A$

(U.4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(U.5) $A \cup (A \cap B) = A$

(U.6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Analogamente, para a interseção:

(I.1) $A \cap A = A$

(I.2) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(I.3) $A \cap B = B \cap A$

(I.4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(I.5) $A \cap (A \cup B) = A$

(I.6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Definição 1.14. *Dados dois conjuntos A e B, a* ***diferença*** *$A - B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B. Em qualquer caso, tem-se $A - B = A - (A \cap B)$.*

Definição 1.15. *Quando existe um conjunto fundamental E que contém todos os conjuntos em consideração, a diferença $E - X$ chama-se o* ***complementar de*** *X e indicamos por $E \setminus X$. Então temos*

$$x \in E \setminus X \iff x \notin X.$$

Proposição 1.16. *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto fundamental E. Valem as seguintes propriedades:*

(C.1) $E \setminus (E \setminus A) = A$

(C.2) $A \subseteq B$ *se, e somente se* $(E \setminus B) \subseteq (E \setminus A)$

(C.3) $A = \emptyset$ *se, e somente se* $E \setminus A = E$

(C.4) $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

(C.5) $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

1.2 Funções

O estudo de funções é fundamental para compreender como certas relações entre conjuntos podem preservar ou transformar propriedades importantes. Nesta subseção, revisitamos conceitos básicos como injetividade, sobrejetividade e bijetividade, além das noções de função inversa e o conjunto imagem inversa, que serão essenciais para a definição de estruturas topológicas mais adiante.

Definição 1.17. *Sejam X e Y dois conjuntos. Uma função f de X em Y é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $f(x) \in Y$.*

Definição 1.18. *Seja f uma função de um conjunto X para um conjunto Y.*

*(i) A função f é dita **injetora** se $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$, para $x_1, x_2 \in X$;*

*(ii) A função f é dita **sobrejetora** se para cada $y \in Y$ existe um $x \in X$ tal que $f(x) = y$;*

*(iii) A função f é dita **bijetora** se for tanto injetora quanto sobrejetora.*

Definição 1.19. *Dada uma função $f : A \to B$ e um subconjunto $X \subset A$, chama-se **imagem de** X por f ao conjunto:*

$$f(X) = \{f(x); x \in X\} = \{y \in B; y = f(x), x \in X\}.$$

*O conjunto $f(A)$ chama-se a **imagem da função** f.*

Proposição 1.20. *Dada uma função $f : A \to B$ e subconjuntos $X, Y \subset A$, tem-se:*

(F.1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(F.2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

(F.3) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$

(F.4) $f(\emptyset) = \emptyset$

Definição 1.21. *Seja $f : X \to Y$. A função f é dita ter uma **inversa** se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$, e $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$. A função g é chamada de **função inversa** de f.*

Proposição 1.22. *Seja $f : X \to Y$ uma função.*

*(i) A função f tem uma inversa se, e somente se, f é **bijetora**.*

(ii) Sejam $g_1, g_2 : Y \to X$ funções. Se g_1 e g_2 são ambas funções inversas de f, então $g_1 = g_2$; isto é, $g_1(y) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

(iii) Seja $g : Y \to X$ uma função. Então, g é uma função inversa de f se, e somente se, f é uma função inversa de g.

Definição 1.23. *Seja $f : X \to Y$ uma função. Se S é qualquer subconjunto de Y, então o conjunto $f^{-1}(S)$ é definido por*

$$f^{-1}(S) = \{x \in X \mid f(x) \in S\}.$$

*O subconjunto $f^{-1}(S)$ de X é chamado de **imagem inversa** de S.*

Observação 1.24. *Observe que uma função inversa de $f : X \to Y$ existe se, e somente se, f é bijetora. No entanto, a imagem inversa de qualquer subconjunto de Y existe mesmo que f não seja injetora nem sobrejetora. O próximo exemplo comprova isso.*

Exemplo 1.25. *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dada por $f(z) = |z|$, para cada $z \in \mathbb{Z}$.*
A função f não é injetora, já que $f(1) = f(-1)$. Além disso, também não é sobrejetora, pois não existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = -1$. Assim, f certamente não é bijetora. Portanto, pelo item (i) da Proposição 1.22, f não tem uma função inversa. No entanto, as imagens inversas certamente existem. Por exemplo,
$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$ *e* $f^{-1}(\{-5, 3, 5, 7, 9\}) = \{-3, -5, -7, -9, 3, 5, 7, 9\}$.

Proposição 1.26. *Seja $f : X \to Y$ uma função. Então $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.*

Proposição 1.27. *Seja $f : X \to Y$ uma função. Então $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$*

Proposição 1.28. *Dada $f : A \to B$ uma funçaõ e subconjuntos $Y, Z \subset B$, valem as seguintes propriedades:*

(Inv1) $f^{-1}(B \setminus Y) = (B \setminus f^{-1}(Y))$

(Inv2) $Y \subset Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$

(Inv3) $f^{-1}(B) = A$

(Inv6) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

1.3 Famílias

O estudo de famílias de conjuntos é importante para a construção de diversas estruturas matemáticas. Em especial, na topologia, o conceito de família será amplamente utilizado para descrever coleções de conjuntos com determinadas propriedades em comum. Nesta seção, além de introduzir noções básicas sobre famílias de conjuntos, também apresentaremos a definição de produto cartesiano, conceito fundamental para a construção de topologias em espaços produto.

Definição 1.29. *Seja L um conjunto cujos elementos chamamos de **índices**. Uma **família** de elementos de X com índices em L é uma função $g : L \to X$. O valor de g no ponto $\lambda \in L$ é indicado por g_λ em vez de $g(\lambda)$. A família é representada por $(g_\lambda)_{\lambda\in L}$.*

Definição 1.30. *Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de conjuntos. A **reunião** da família é definida por*

$$\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \{x \mid \textit{existe } \lambda \in L \textit{ tal que } x \in A_\lambda\}.$$

Definição 1.31. *Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de conjuntos. A **intersecção** da família é definida por*

$$\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda = \{x \mid x \in A_\lambda \textit{ para todo } \lambda \in L\}.$$

Definição 1.32. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Uma **n-upla ordenada** de elementos de um conjunto X é uma família indexada pelo conjunto $n = \{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja, uma função:*

$$x : n \to X, \quad i \mapsto x_i.$$

Denotamos a n-upla por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definição 1.33. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos. O **produto cartesiano** $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in X_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \textit{ para todo } i \in n\}.$$

Mas observe que a noção de família nos permite considerar produtos cartesianos de uma quantidade arbitrária de conjuntos.

Definição 1.34. *Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$, o **produto cartesiano** é:*

$$\prod_{\lambda\in L} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda\in L} \mid a_\lambda \in A_\lambda \textit{ para todo } \lambda \in L\}.$$

Este capítulo forneceu os fundamentos necessários para o desenvolvimento do estudo sobre topologia, abordando conceitos essenciais como conjuntos e suas propriedades, funções, famílias de conjuntos e produto cartesiano. Com essas ferramentas, podemos agora avançar para a definição e estudo das estruturas topológicas propriamente ditas.

Capítulo 2

Topologia Geral

Este capítulo tem por objetivo apresentar a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Nele serão abordados os principais conceitos da Topologia Geral, que servem como base para a compreensão dos resultados discutidos no capítulo posterior. Serão abordados temas como Espaços Topológicos, Topologia Euclidiana, Pontos de Acumulação, Aplicações Contínuas, Homeomorfismos, Espaços Métricos e Compacidade. Esses conceitos fornecem a estrutura essencial para o estudo das propriedades topológicas que se mantêm sob transformações contínuas, permitindo uma análise mais abstrata e geral dos espaços matemáticos.

Assim, este capítulo constitui a parte teórica central do trabalho, reunindo os elementos fundamentais que sustentam o estudo da Compacidade em produtos finitos e infinitos, tema abordado no capítulo seguinte.

2.1 Espaços Topológicos

O conceito de topologia é o ponto de partida para todo o estudo da Topologia Geral. Ele fornece a estrutura necessária para compreender como conjuntos podem ser organizados sem recorrer a noções métricas. Nesta seção, introduzimos a definição formal de topologia, bem como alguns exemplos de topologias que ilustram diferentes formas de organizar um mesmo conjunto.

2.1.1 Topologia

Definição 2.1. *Seja X um conjunto não-vazio. Um conjunto τ de subconjuntos de X é dito ser uma **topologia** em X se:*

(i) X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a τ,

(ii) A união de qualquer (finito ou infinito) número de conjuntos em τ pertence a τ, e

(iii) A interseção de quaisquer dois conjuntos em τ pertence a τ.

O par (X, τ) é chamado de espaço topológico.

Exemplo 2.2. *Seja $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e*

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}.$$

Então, τ_1 é uma topologia em X, pois satisfaz as condições da Definição 2.1.

Exemplo 2.3. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e*

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

τ_2 não é uma topologia em X, pois a união

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

ou

$$\{c, d\} \cap \{a, c, e\} = \{c\}$$

não pertencem a τ_2.

Definição 2.4. *Seja X um conjunto arbitrário não-vazio e τ a coleção de todos os subconjuntos de X. Então, τ é chamada de **topologia discreta** sobre X, e o espaço topológico (X, τ) é chamado de um espaço discreto.*

Definição 2.5. *Seja X qualquer conjunto não-vazio e $\tau = \{X, \emptyset\}$. Então, τ é chamada de **topologia indiscreta** e o espaço (X, τ) é dito ser um espaço indiscreto.*

Exemplo 2.6. *Seja $X = \{a, b, c\}$ e τ uma topologia sobre X com $\{a\} \in \tau$, $\{b\} \in \tau$, e $\{c\} \in \tau$. Então τ é a topologia discreta.*

De fato, sabemos que τ é uma topologia e que $\{a\}, \{b\}, \{c\} \in \tau$. Precisamos provar que τ contém todos os subconjuntos de X. O conjunto X tem 3 elementos, daí $2^3 = 8$ subconjuntos: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$, e $S_8 = X = \{a, b, c\}$.

Como τ é uma topologia, sabemos que $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$ pela Definição 2.1. Além disso, por hipótese sabemos que $\{a\} \in \tau$, $\{b\} \in \tau$, e $\{c\} \in \tau$.

Agora, precisamos mostrar que $\{a, b\}, \{a, c\}$, e $\{b, c\}$ estão em τ. Como $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$, e $\{a\}, \{b\} \in \tau$, segue que $\{a, b\} \in \tau$ pela condição (ii) da Definição 2.1. Similarmente, $\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \tau$ e $\{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \tau$. Portanto, todos os subconjuntos de X estão em τ, o que prova que τ é a topologia discreta.

Proposição 2.7. *Se (X, τ) é um espaço topológico tal que, para cada $x \in X$, o conjunto unitário $\{x\}$ pertence a τ, então τ é a topologia discreta.*

Demonstração: Seja S um subconjunto arbitrário de X. Então

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

Como todos os $\{x\}$ estão em τ, a união de qualquer conjunto de elementos de τ também está em τ. Portanto, $S \in \tau$, o que implica que τ contém todos os subconjuntos de X, ou seja, τ é a topologia discreta. ■

2.1.2 Conjuntos Abertos, Conjuntos Fechados e Conjuntos Clopen

Nesta subseção, nosso objetivo é estudar os conjuntos abertos, fechados e os conjuntos de clopen. Estamos interessados em compreender como esses conjuntos se relacionam com a topologia de um espaço e como eles constituem ferramentas fundamentais para a análise topológica. Ao longo do trabalho, veremos que muitas propriedades e resultados dependerão do uso de conjuntos abertos e fechados, tornando esta subseção essencial para o desenvolvimento dos conceitos posteriores.

Definição 2.8. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então, os membros de τ são chamados de **conjuntos abertos**.*

Com isto, segue da Definição 2.1 a seguinte observação.

Observação 2.9. *Se (X, τ) é qualquer espaço topológico, então:*

(i) X e $\emptyset$ são conjuntos abertos,

(ii) a união de qualquer número (finito ou infinito) de conjuntos abertos é um conjunto aberto, e

(iii) a interseção de qualquer número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Exemplo 2.10. *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais e seja τ a topologia composta por $\emptyset$ e todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ cujos complementos em $\mathbb{N}$ são finitos. A interseção de conjuntos abertos pode não ser aberta.*
De fato, considere os conjuntos $S_n = \{1\} \cup \{n+1, n+2, \dots\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Cada S_n é aberto na topologia τ, pois seu complemento é finito. No entanto, a interseção infinita $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}$ não é aberta, já que o complemento de $\{1\}$ não é finito. Portanto, a interseção de conjuntos abertos pode não ser aberta.

Definição 2.11. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto $S \subseteq X$ é dito ser um **conjunto fechado** em (X, τ) se o complemento de S, denotado por $X \setminus S$, for aberto.*

Proposição 2.12. *Se (X, τ) é um espaço topológico, então:*

(i) X e $\emptyset$ são conjuntos fechados;

(ii) A interseção de qualquer número (finito ou infinito) de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

(iii) A união de qualquer número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Demonstração: (i) Desde que $X, \emptyset \in \tau$ e $X = X \setminus \emptyset$ e $\emptyset = X \setminus X$ segue que X e $\emptyset$ são fechados.
Para (ii) Sejam $\{S_i\}_{i \in I}$ uma coleção (finita ou infinita) de conjuntos fechados em um espaço topológico (X, τ). Como cada S_i é fechado, seus complementos $X \setminus S_i$ são abertos, isto é, $X \setminus S_i \in \tau$ para todo $i \in I$. Sabemos que o complemento da interseção é a união dos complementos: $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} S_i\right) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus S_i)$. Como cada $X \setminus S_i$ é aberto e a topologia é fechada sob uniões arbitrárias, a união $\bigcup_{i \in I}(X \setminus S_i)$ é aberta. Portanto, $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} S_i\right)$ é aberto, o que implica que $\bigcap_{i \in I} S_i$ é fechado.

Para (iii), considere $S_1, S_2, \ldots, S_n$ uma coleção de conjuntos fechados. Precisamos mostrar que $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ é fechado. Como $S_1, S_2, \ldots, S_n$ são fechados, seus complementos são abertos. Então,

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n)$$

é a interseção de conjuntos abertos, que é aberta. Portanto, a união finita de conjuntos fechados é fechada. ■

Observação 2.13. *Em um espaço discreto, todo conjunto é simultaneamente aberto e fechado, enquanto em um espaço indiscreto (X, τ), todos os subconjuntos de X, exceto X e $\emptyset$, não são nem abertos nem fechados.*

Definição 2.14. *Um subconjunto S de um espaço topológico (X, τ) é dito* ***clopen*** *se ele é simultaneamente aberto e fechado em (X, τ).*

Observação 2.15. *Note que, em todo espaço topológico (X, τ), tanto X quanto $\emptyset$ são* ***clopen****. Em um espaço discreto, todos os subconjuntos de X são* ***clopen****. Em um espaço indiscreto, os únicos subconjuntos* ***clopen*** *são X e $\emptyset$.*

Definição 2.16. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia τ em X é chamada de* ***topologia fechada-finita*** *ou* ***topologia cofinita*** *se os subconjuntos fechados de X forem X e todos os subconjuntos finitos de X; ou seja, os conjuntos abertos são $\emptyset$ e todos os subconjuntos de X que têm complemento finito.*

Exemplo 2.17. *Seja τ a topologia dos fechados finitos em um conjunto X. Se X tem pelo menos 3 subconjuntos* ***clopen*** *distintos, então X é um conjunto finito.*
De fato, como o espaço topológico (X, τ) tem 3 subconjuntos ***clopen*** *distintos, sabemos que existe um subconjunto* ***clopen*** *S de X tal que $S \neq X$ e $S \neq \emptyset$. Como S é aberto em (X, τ), a Definição 2.11 implica que seu complemento $X \setminus S$ é um conjunto fechado. Assim, S e $X \setminus S$ são fechados na topologia dos fechados finitos τ. Portanto, S e $X \setminus S$ são ambos finitos, uma vez que nenhum deles é igual a X. Mas $X = S \cup (X \setminus S)$, e assim X é a união de dois conjuntos finitos. Portanto, X é um conjunto finito.*

Apresentamos a seguir um resultado que será útil na caracterização de topologias definidas por meio de funções, destacando o papel das imagens inversas na determinação de abertos.

Proposição 2.18. *Seja (Y, τ) um espaço topológico e X um conjunto não vazio. Além disso, seja $f : X \to Y$ uma função. Definimos $\tau_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \tau\}$. Então τ_1 é uma topologia em X.*

Demonstração: Nosso objetivo é mostrar que a coleção de conjuntos, τ_1, é uma topologia em X; isto é, precisamos mostrar que τ_1 satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 2.1.

Note que, $Y \in \tau$ e seja $f^{-1}(Y) = X$, então $X \in \tau_1$, e também, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, logo $\emptyset \in \tau_1$. Portanto, τ_1 tem a propriedade (i) da Definição 2.1.

Para verificar a condição (ii) da Definição 2.1, seja $\{A_j : j \in J\}$ uma coleção de membros de τ_1, para algum conjunto índice J. Temos que mostrar que $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$. Como $A_j \in \tau_1$, a definição de τ_1 implica que $A_j = f^{-1}(B_j)$, onde $B_j \in \tau$. Assim, pela Proposição 1.26,

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right).$$

Agora, $B_j \in \tau$, para todo $j \in J$, e portanto $\bigcup_{j\in J} B_j \in \tau$, uma vez que τ é uma topologia em Y. Portanto, pela definição de τ, temos $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \in \tau_1$; isto é, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$. Assim, τ_1 tem a propriedade (ii) da Definição 2.1.

Finalmente, sejam A_1 e A_2 em τ_1. Temos que mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \tau_1$. Como $A_1, A_2 \in \tau_1$, temos $A_1 = f^{-1}(B_1)$ e $A_2 = f^{-1}(B_2)$, onde $B_1, B_2 \in \tau$.

Assim, pela Proposição 1.27,

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

Como $B_1 \cap B_2 \in \tau$, temos $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau_1$. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau_1$, e mostramos que τ_1 também possui a propriedade (iii) da Definição 2.1. Assim, τ_1 é de fato uma topologia em X. ■

Observação 2.19. *Vale lembrar de que nem todos os conjuntos são contáveis. Portanto, não seria suficiente, no argumento acima, assumir que os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ estão em τ_1 e mostrar que sua união $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ está em τ_1. Isso provaria apenas que a união de um número contável de conjuntos em τ_1 está em τ_1, mas não mostraria que τ_1 tem a propriedade (ii) da Definição 2.1. Esta propriedade requer que* *todas as uniões, sejam contáveis ou não contáveis, de conjuntos em τ_1 estejam em τ_1.*

2.1.3 Topologia nos Espaços Euclidianos

Nesta subseção, introduzimos a Topologia Euclidiana, que serve como um exemplo concreto e mais intuitivo de espaço topológico dentro do contexto do nosso estudo em Topologia Geral. A Topologia Euclidiana nos permite visualizar de forma concreta conceitos abstratos, como conjuntos abertos e fechados, que já discutimos na subseção anterior. Esse exemplo será útil ao longo do trabalho, pois muitas propriedades e resultados que analisaremos posteriormente podem ser ilustrados e melhor compreendidos nesse contexto.

Definição 2.20. *Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é aberto na Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$ se satisfaz a seguinte propriedade:*

$(*)$ Para cada $x \in S$, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq S$.

Proposição 2.21. *Os abertos da Topologia Euclidiana τ dão origem a uma topologia.*

Demonstração: Para mostrar que os abertos da Topologia Euclidiana dão origem a uma topologia, devemos mostrar que satisfazem as propriedades (i), (ii) e (iii) da Definição 2.1.

(i) Vamos mostrar que $\mathbb{R} \in \tau$.
Seja $x \in \mathbb{R}$. Se colocamos $a = x - 1$ e $b = x + 1$, então $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Ou seja, x tem a propriedade $(*)$, e, portanto, $\mathbb{R} \in \tau$. Em segundo lugar, $\emptyset \in \tau$, pois $\emptyset$ tem a propriedade $(*)$.

(ii) Agora, seja $\{A_j\}_{j \in J}$, para algum conjunto de índice J, uma família de membros de τ. Então, temos que mostrar que $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.
Seja $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Então, existe $k \in J$ tal que $x \in A_k \in \tau$. Como $A_k \in \tau$, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Portanto, x tem a propriedade $(*)$. Logo, $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

(iii) Por fim, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Então, $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como $A_1 \in \tau$, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tais que $x \in (a, b) \subseteq A_1$. Também, como $A_2 \in \tau$, existem $c, d \in \mathbb{R}$, com $c < d$, tais que $x \in (c, d) \subseteq A_2$. Seja $e = \max\{a, c\}$ e $f = \min\{b, d\}$. Então, $e < f$, e ainda $x \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$. Como $x \in (e, f) \subseteq A_1$ e $(e, f) \subseteq A_2$, deduzimos que $x \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$. Portanto, $A_1 \cap A_2$ tem a propriedade $(*)$.

Portanto, τ é uma topologia em $\mathbb{R}$. ■

Descreveremos agora os conjuntos abertos e os conjuntos fechados na Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$. Em particular, veremos que todos os intervalos abertos são de fato conjuntos abertos nesta topologia e todos os intervalos fechados são conjuntos fechados.

Proposição 2.22. *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ com $r < s$. Na Topologia Euclidiana τ em $\mathbb{R}$, o intervalo aberto (r, s) pertence a τ e, portanto, é um conjunto aberto.*

Demonstração: Dado o intervalo aberto (r, s), precisamos mostrar que ele é aberto na Topologia Euclidiana, ou seja, que (r, s) possui a propriedade $(*)$ da Definição 2.20.
Seja $x \in (r, s)$. Queremos encontrar a e $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$. Escolha $a = r$ e $b = s$. Então, claramente $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$. Consequentemente, (r, s) é um conjunto aberto na Topologia Euclidiana. ■

Proposição 2.23. *Os intervalos abertos (r, ∞) e $(-\infty, r)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}$, para todo número real r.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que (r, ∞) é um conjunto aberto, ou seja, possui a propriedade $(*)$. Seja $x \in (r, \infty)$. Coloque $a = r$ e $b = x + 1$. Então, $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$, e assim $(r, \infty) \in \tau$. Um argumento similar mostra que $(-\infty, r)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. ■

Observação 2.24. *É importante notar que, embora todo intervalo aberto seja um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, a recíproca é falsa.* ***Nem todos os conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ são intervalos.*** *Por exemplo, o conjunto $(1, 3) \cup (5, 6)$ é aberto em $\mathbb{R}$, mas não é um intervalo aberto.*

Proposição 2.25. *Para todo $c, d \in \mathbb{R}$ com $c < d$, o intervalo fechado $[c, d]$* ***não*** *é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Provaremos que $[c, d]$ não possui a propriedade $(*)$. Para isso, basta encontrar qualquer x tal que não existam a, b com a propriedade requerida.
Escolha $x = c$. Então, $x \in [c, d]$ implica $a < c < b$, o que é impossível. Logo, $[c, d]$ não possui a propriedade $(*)$ e, portanto, não é um conjunto aberto. ■

Proposição 2.26. *Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado na Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Para mostrar que é fechado, basta observar que seu complemento $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, sendo a união de dois conjuntos abertos, é um conjunto aberto. ■

Proposição 2.27. *Cada conjunto unitário $\{a\}$ é fechado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: O complemento de $\{a\}$ é a união dos dois conjuntos abertos $(-\infty, a)$ e (a, ∞), e assim, é aberto. Portanto, $\{a\}$ é fechado. ■

Proposição 2.28. *O conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os inteiros é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: O complemento de $\mathbb{Z}$ é a união de intervalos abertos $(n, n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\mathbb{Z}$ é fechado. ■

Proposição 2.29. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais **não** é um conjunto fechado nem um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Suponha que $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, onde a e b pertencem a $\mathbb{R}$ com $a < b$. Entre dois números reais distintos, existe pelo menos um número irracional. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin \mathbb{Q}$. Isso contradiz $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Logo, $\mathbb{Q}$ não contém nenhum intervalo (a, b) e, portanto, não é um conjunto aberto. Para provar que $\mathbb{Q}$ não é um conjunto fechado, basta mostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é um conjunto aberto. Usando o fato de que entre dois números reais distintos sempre existe um número racional, vemos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não contém nenhum intervalo (a, b), com $a < b$. Portanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é aberto em $\mathbb{R}$, e consequentemente, $\mathbb{Q}$ não é fechado em $\mathbb{R}$. ■

2.1.4 Base para uma Topologia

O conceito de base para uma topologia é fundamental para a construção e compreensão de espaços topológicos. Por meio de uma base, é possível gerar todos os conjuntos abertos de um espaço , simplificando a análise de suas propriedades. No contexto do nosso estudo, essa abordagem é particularmente útil, pois permite compreender de forma mais clara a estrutura de diferentes topologias. Nosso objetivo nesta subseção é apresentarmos a definição formal de base, exemplos relevantes e resultados que mostram como a topologia pode ser construída a partir dela.

Proposição 2.30. *Um subconjunto S de $\mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, for uma união de intervalos abertos.*

Demonstração: Assuma que S é uma união de intervalos abertos; isto é, existem intervalos abertos (a_j, b_j), onde j pertence a algum conjunto de índice J, tal que $S = \bigcup_{j \in J}(a_j, b_j)$. Pela Proposição 2.22, cada intervalo aberto (a_j, b_j) é um conjunto aberto. Assim, S é uma união de conjuntos abertos, e, portanto, S é um conjunto aberto.

Reciprocamente, assuma que S é aberto em $\mathbb{R}$. Então, para cada $x \in S$, existe um intervalo $I_x = (a, b)$ tal que $x \in I_x \subseteq S$. Agora, afirmamos que $S = \bigcup_{x \in S} I_x$.

Primeiramente, seja $y \in S$. Então $y \in I_y$. Assim, $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$, como requerido. Em segundo lugar, seja $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$. Então $z \in I_t$, para algum $t \in S$. Como $I_t \subseteq S$, vemos que $z \in S$. Logo, $S = \bigcup_{x \in S} I_x$, e concluímos que S é uma união de intervalos abertos. ■

Definição 2.31. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X é dita ser uma **base** para a topologia τ se todo conjunto aberto for uma união de membros de $\mathcal{B}$. Além disso, os membros de $\mathcal{B}$ são chamados de **abertos básicos**.*

Observação 2.32. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ em um conjunto X, então um subconjunto U de X pertence a τ se, e somente se, U é uma união de membros de $\mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{B}$ gera a topologia τ no seguinte sentido: se soubermos quais conjuntos são membros de $\mathcal{B}$, então podemos determinar os membros de τ, eles são exatamente todos os conjuntos que são uniões de membros de $\mathcal{B}$.*

Exemplo 2.33. *Seja $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Então $\mathcal{B}$ é uma base para a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$, conforme a Proposição 2.30.*

Exemplo 2.34. *Seja (X, τ) um espaço discreto e $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos unitários de X; isto é, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Então, pela Proposição 2.7, $\mathcal{B}$ é uma base para τ.*

Exemplo 2.35. *Seja $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$. Então $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ é uma base para τ_1, pois $\mathcal{B} \subseteq \tau_1$ e cada membro de τ_1 pode ser expresso como uma união de membros de $\mathcal{B}$. Observe que $\emptyset$ é uma união vazia de membros de $\mathcal{B}$. Note que τ_1 em si também é uma base para τ_1.*

Observação 2.36. *Observe que, se (X, τ) é um espaço topológico, então $\mathcal{B} = \tau$ é uma base para a topologia τ. Por exemplo, o conjunto de todos os subconjuntos de X é uma base para a topologia discreta em X.*

Portanto, vemos que podem existir muitas bases diferentes para a mesma topologia. De fato, se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ em um conjunto X e $\mathcal{B}_1$ é uma coleção de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \tau$, então $\mathcal{B}_1$ também é uma base para τ.

Como indicado acima, a noção de **base para uma topologia** nos permite definir topologias. No entanto, o exemplo a seguir mostra que devemos ter cuidado.

Exemplo 2.37. *Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Então $\mathcal{B}$ não é uma base para nenhuma topologia em X. Para ver isso, suponha que $\mathcal{B}$ seja uma base para uma topologia τ. Então τ consiste em todas as uniões de conjuntos em $\mathcal{B}$; ou seja,*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

Mais uma vez, usamos o fato de que $\emptyset$ é uma união vazia de membros de $\mathcal{B}$ e, portanto, $\emptyset \in \tau$. No entanto, τ não é uma topologia, já que o conjunto $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ não está em τ e, portanto, τ não satisfaz a propriedade (iii) da Definição 2.1. Isto é uma contradição, e assim nossa suposição é falsa. Portanto, $\mathcal{B}$ não é uma base para nenhuma topologia em X.

Assim, surge a seguinte pergunta: se $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de X, sob quais condições $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia? Esta questão é respondida pelo seguinte resultado.

Proposição 2.38. *Seja X um conjunto não-vazio e seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de X. Então $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X se, e somente se, $\mathcal{B}$ satisfizer as seguintes propriedades:*

(a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(b) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, o conjunto $B_1 \cap B_2$ é uma união de membros de $\mathcal{B}$.

Demonstração: Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ, então τ deve ter as propriedades (i), (ii) e (iii) da Definição 2.1. Em particular, X deve ser um conjunto aberto, e a interseção de dois conjuntos abertos deve ser um conjunto aberto. Como os conjuntos abertos são apenas uniões de membros de $\mathcal{B}$, isso implica que (a) e (b) acima são verdadeiras. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades (a) e (b) e seja τ a coleção de todos os subconjuntos de X que são uniões de membros de $\mathcal{B}$. Mostraremos que τ é uma topologia em X.

Por (a), $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, e assim $X \in \tau$. Note que $\emptyset$ é uma união vazia de membros de $\mathcal{B}$ e, portanto, $\emptyset \in \tau$. Assim, vemos que τ satisfaz a propriedade (i) da Definição 2.1.

Agora seja $\{T_j\}$ uma família de membros de τ. Então cada T_j é uma união de membros de $\mathcal{B}$. Consequentemente, a união de todos os T_j é também uma união de membros de $\mathcal{B}$ e, portanto, está em τ. Assim, τ também satisfaz a condição (ii) da Definição 2.1.

Por fim, sejam C e D em τ. Precisamos verificar que $C \cap D \in \tau$. Mas $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, para algum conjunto de índice K e conjuntos $B_k \in \mathcal{B}$. Também $D = \bigcup_{j \in J} B_j$, para algum conjunto de índice J e $B_j \in \mathcal{B}$. Portanto,

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{k \in K} \bigcup_{j \in J} (B_k \cap B_j).$$

Pela hipótese (b), cada $B_k \cap B_j$ é uma união de membros de $\mathcal{B}$ e, assim, $C \cap D$ é uma união de membros de $\mathcal{B}$. Logo $C \cap D \in \tau$. Portanto, τ tem a propriedade (iii) da Definição 2.1. Assim, τ é de fato uma topologia, e $\mathcal{B}$ é uma base para essa topologia, como requerido. ■

Exemplo 2.39. *Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os retângulos abertos*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\, c < y < d\}$$

no plano que têm cada lado paralelo ao eixo X ou ao eixo Y. Então $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia no plano. Essa topologia é chamada de ***Topologia Euclidiana****.*

Para ver que $\mathcal{B}$ é de fato uma base para uma topologia, observe que:

1. *O plano é a união de todos os retângulos abertos, e*

2. *A interseção de dois retângulos é um retângulo.*

Assim, as condições da Proposição 2.38 são satisfeitas e, portanto, $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia.

Observação 2.40. *Ao generalizar o Exemplo 2.39 vemos como definir uma topologia em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n\}$, para cada inteiro $n > 2$. Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbb{R}^n$ com lados paralelos aos eixos. Essa coleção $\mathcal{B}$ é uma base para a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}^n$.*

2.1.5 Base para uma Topologia determinada

A Proposição 2.38. indicou sob quais condições uma coleção B de subconjuntos de um conjunto X é uma base para alguma topologia em X. No entanto, às vezes nos é dada uma topologia τ em X, e queremos saber se B é uma base para essa topologia específica τ. Para verificar se B é uma base para τ, podemos simplesmente aplicar a Definição 2.31. e mostrar que cada membro de τ é uma união de membros de B. Contudo, o próximo resultado nos oferece um método alternativo.

Mas, antes disso, apresentamos um exemplo que mostra que existe uma diferença entre dizer que uma coleção B de subconjuntos de X é uma base para alguma topologia e dizer que é uma base para uma topologia dada.

Exemplo 2.41. *Seja B a coleção de todos os intervalos semiabertos da forma $(a, b]$, $a < b$, onde $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$. Então, B é uma base para uma topologia, digamos τ_1 em $\mathbb{R}$, uma vez que $\mathbb{R}$ é a união de todos os membros de B e a interseção de dois intervalos semiabertos é um intervalo semiaberto.*

Contudo, a topologia τ_1, que tem B como base, **não é** a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$. De fato, podemos observar que $(a, b]$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ com a topologia τ_1, enquanto $(a, b]$ não é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ com a Topologia Euclidiana. Assim, B é uma base para alguma topologia, mas não para a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$.

Proposição 2.42. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X é uma base para τ se, e somente se, para qualquer ponto x pertencente a qualquer conjunto aberto U, existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base para τ e $x \in U$ com $U \in \tau$. Como $\mathcal{B}$ é uma base para τ, o conjunto aberto U é uma união de membros de $\mathcal{B}$; ou seja, $U = \bigcup_j B_j$, em que $B_j \in \mathcal{B}$ para cada j em algum conjunto de índice j. Mas $x \in U$ implica $x \in B_i$, para algum i. Assim, $x \in B_i \subseteq U$.

Por outro lado, assuma que, para cada $U \in \tau$ e para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subseteq U$. Precisamos mostrar que todo conjunto aberto U é uma união de membros de $\mathcal{B}$. Então, seja V qualquer conjunto aberto. Para cada $x \in V$, existe um $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq V$. Claramente, $V = \bigcup_{x \in V} B_x$. Assim, V é uma união de membros de $\mathcal{B}$. ■

Proposição 2.43. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia τ em um conjunto X. Então, um subconjunto U de X é aberto se, e somente se, para cada $x \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Demonstração: Seja U qualquer subconjunto de X. Assuma que, para cada $x \in U$, existe um $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Claramente, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Assim, U é uma união de conjuntos abertos e, portanto, é aberto, como requerido. A afirmação recíproca segue diretamente da Proposição 2.42. ■

Observe que a propriedade da base descrita na Proposição 2.43. é precisamente o que usamos ao definir a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto U de $\mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, para cada $x \in U$, existe $a < b$, tal que $x \in (a, b) \subseteq U$.

Observação 2.44. *Note a diferença entre a Proposição 2.38 e a Proposição 2.42. A Proposição 2.38 fornece condições para uma família B de subconjuntos de um conjunto X ser uma base para alguma topologia em X. No entanto, a Proposição 2.42 fornece condições para uma família B de subconjuntos de um Espaço Topológico (X, τ) ser uma base para a topologia τ.*

Já vimos que uma topologia pode ter muitas bases diferentes. A próxima proposição nos diz que, quando duas bases B_1 e B_2, no conjunto X, definem a mesma topologia, elas satisfazem propriedades específicas.

Lema 2.45. *O conjunto formado por todas as bolas abertas de $\mathbb{R}^2$ é uma base para Topologia Euclidiana.*

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e para cada $x \in A$ considere $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$ e assim $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$. Logo, pela Proposição 2.38 segue o resultado. ■

Proposição 2.46. *Sejam B_1 e B_2 bases para as topologias τ_1 e τ_2, respectivamente, em um conjunto X não vazio. Então $\tau_1 = \tau_2$ se, e somente se:*

(i) Para cada $A_1 \in B_1$ e cada $x \in A_1$, existe um $A_2 \in B_2$ tal que $x \in A_2 \subseteq A_1$;

(ii) Para cada $A_2 \in B_2$ e cada $x \in A_2$, existe um $A_1 \in B_1$ tal que $x \in A_1 \subseteq A_2$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ (i) Como B_1 é base, então $B_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$; com $B_\lambda \in B_2$.
Como $x \in A_1$ implica que $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, assim existe um $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in B_{\lambda_0} \subset$

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = A_1$ Agora tome $A_2 = B_{\lambda_0}$ e concluímos.

(ii) Além disso, B_2 é base, então $B_2 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$; com $B_\lambda \in B_1$.

Como $x \in A_2$ implica que $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, assim existe um $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in B_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = A_2$ Agora tome $A_1 = B_{\lambda_0}$ e concluímos.

($\Leftarrow$) (i) Seja $A \in \tau_1$ então $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$, com $B_\alpha \in B_1$, para todo $\alpha \in \Lambda$, para cada $x \in A$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in B_\alpha$ por (i) existe $B'_\alpha \in B_2$ tal que $x \in B'_\alpha \subset B_\alpha$. Logo $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B'_a$ e assim, portanto $\tau_1 \subseteq \tau_2$

(ii) O caso segue de maneira análoga. ■

2.2 Pontos de Acumulação

Os pontos de acumulação descrevem como os elementos de um conjunto se aproximam de outros pontos do espaço topológico. O objetivo desta seção é estudar esses pontos detalhadamente, organizando a análise em três subseções. Na primeira, examinaremos os pontos de acumulação em relação ao fecho de um conjunto. Na segunda subseção, abordaremos a noção de vizinhança para entender propriedades locais. E por fim, na terceira subseção investigaremos a relação entre pontos de acumulação e conexidade, mostrando como eles afetam a estrutura do espaço.

2.2.1 Ponto de Acumulação e Fecho

Nesta subseção vamos definir formalmente ponto de acumulação e fecho, discutindo suas propriedades principais e sua relevância para a análise de conjuntos em espaços topológicos. Esses conceitos permitem compreender como pontos "limites" se relacionam com o conjunto original e sua topologia. Se (X,τ) for um Espaço Topológico, é usual se referir aos elementos do conjunto X como **pontos**.

Definição 2.47. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X,τ). Um ponto $x \in X$ é chamado de **ponto de acumulação** (ou **ponto limite**) de A se todo conjunto aberto U contendo x contém um ponto de A diferente de x.*

Exemplo 2.48. *Considere o espaço topológico (X,τ) no qual o conjunto $X = \{a,b,c,d,e\}$, a topologia $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$, e $A = \{a,b,c\}$. Então b, d e e são pontos de acumulação de A, mas a e c não são pontos de acumulação de A.*

De fato, o conjunto $\{a\}$ é aberto e não contém nenhum outro ponto de A. Assim, a não é um ponto de acumulação de A. Os únicos conjuntos abertos que contêm b são X e $\{b, c, d, e\}$, e ambos contêm outro elemento de A, a saber, c. Logo, b é um ponto de acumulação de A. O conjunto $\{c, d\}$ é um conjunto aberto que contém c, mas nenhum outro ponto de A. Assim, c não é um ponto de acumulação de A. O ponto d é um ponto de acumulação de A, embora não esteja em A. Isso ocorre porque todo conjunto aberto que contém d contém um ponto de A. De modo semelhante, e é um ponto de acumulação de A, embora não pertença a A.

Exemplo 2.49. *Seja (X, τ) um espaço discreto e A um subconjunto de X. Então A não possui pontos de acumulação, pois para cada $x \in X$, $\{x\}$ é um conjunto aberto que não contém nenhum ponto de A diferente de x.*

Exemplo 2.50. *Considere o subconjunto $A = [a, b)$ de $\mathbb{R}$. Então é facilmente verificado que cada elemento em $[a, b)$ é um ponto de acumulação de A. O ponto b também é um ponto de acumulação de A.*

Exemplo 2.51. *Seja (X, τ) um espaço indiscreto e A um subconjunto de X com pelo menos dois elementos. Então é facilmente visto que todo ponto de X é um ponto de acumulação de A.*

O próximo resultado fornece um meio útil de verificar se um conjunto é fechado ou não.

Proposição 2.52. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então A é fechado em (X, τ) se, e somente se, A contiver todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração: Assuma que A é fechado em (X, τ). Suponha por contradição que p seja um ponto de acumulação de A que pertence a $X \setminus A$. Então $X \setminus A$ é um conjunto aberto que contém o ponto de acumulação p de A. Portanto, $X \setminus A$ contém um elemento de A. Isso é claramente falso, e assim temos uma contradição. Logo, todo ponto de acumulação de A deve pertencer a A.

Reciprocamente, assuma que A contém todos os seus pontos de acumulação. Para cada $x \in X \setminus A$, nossa suposição implica que existe um conjunto aberto U_x tal que $x \in U_x$ e $U_x \cap A = \emptyset$; isto é, $U_x \subseteq X \setminus A$. Assim, $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$. Logo, $X \setminus A$ é uma união de conjuntos abertos e, portanto, é aberto. Consequentemente, seu complementar, A, é fechado. ■

Exemplo 2.53. *Como aplicações da Proposição 2.52, temos o seguinte:*

(i) O conjunto $[a, b)$ não é fechado em $\mathbb{R}$, pois b é um ponto de acumulação de $[a, b)$ e $b \notin [a, b)$;

(ii) O conjunto $[a, b]$ é fechado em $\mathbb{R}$, pois todos os pontos de acumulação de $[a, b]$ (ou seja, todos os elementos de $[a, b]$) pertencem a $[a, b]$;

(iii) O conjunto (a, b) não é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, pois ele não contém o ponto de acumulação a;

(iv) O conjunto $[a, \infty)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Proposição 2.54. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ), e seja A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A. Então $A \cup A'$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: A partir da Proposição 2.52, é suficiente mostrar que o conjunto $A \cup A'$ contém todos os seus pontos de acumulação, ou, equivalentemente, que nenhum elemento de $X \setminus (A \cup A')$ é um ponto de acumulação de $A \cup A'$.
Considere $E = X \setminus (A \cup A')$ e note que nos basta mostrar que E é aberto. Seja $a \in E$ então $a \notin A \cup A'$ assim $a \notin A$ e $a \notin A'$. Por $a \notin A'$, existe $U_a \in \tau$ tal que $a \in U_a$ e $U_a \cap A = \emptyset$. Além disso, afirmamos que $U_a \cap A' = \emptyset$.
Com efeito, pois se existe $x \in U_a \cap A'$ temos que $x \in U_a$ e $x \in A'$, logo, todo aberto $U \in \tau$ com $x \in U$ satisfaz que $U \cap A$ possui algum elemento $y_u \neq x$. Seja $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $U \subset U_a$, então $y_u \in U \cap A \subseteq U_a \cap A = \emptyset$, o que é uma contradição. Logo, $U_a \cap A' = \emptyset$.
Desta forma, $U_a \in \tau$ e $U_a \subset E$, e portanto E é aberto. ■

Definição 2.55. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então o conjunto $A \cup A'$ formado pelos elementos de A e todos os pontos de acumulação de A é chamado de **fecho de** A e é denotado por $\overline{A}$.*

Observação 2.56. *É claro pela Proposição 2.54 que $\overline{A}$ é um conjunto fechado. Pela Proposição 2.52, todo conjunto fechado contendo A também deve conter o conjunto A'. Assim, $A \cup A' = \overline{A}$ é o menor conjunto fechado contendo A. Isso implica que $\overline{A}$ é a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A.*

Exemplo 2.57. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$. Então, temos que $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = \{a, c, d\}$ e $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. Para encontrar o fecho* *de um conjunto particular, devemos listar todos os conjuntos fechados que contêm esse conjunto e selecionar o menor. Assim, começamos escrevendo todos os conjuntos fechados que são simplesmente os complementos de todos os conjuntos abertos. Os conjuntos fechados são* $\emptyset$, X, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$, $\{b, e\}$. *Portanto,*

$$\overline{\{b\}} = \{b, e\}, \quad \overline{\{a, c\}} = \{a, c, d\}, \quad \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}.$$

Exemplo 2.58. *Seja* $\mathbb{Q}$ *o subconjunto de* $\mathbb{R}$ *contendo todos os números racionais. Vejamos que* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Suponha $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. *Então existe algum* $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. *Como* $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ *é aberto em* $\mathbb{R}$, *existe um intervalo aberto* (a, b) *tal que* $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. *Porém,* (a, b) *contém números racionais, isto é,* $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, *o que implica que* $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. *Isto é uma contradição, logo* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definição 2.59. *Seja* A *um subconjunto de um espaço topológico* (X, τ). *Diz-se que* A *é denso em* X *se* $\overline{A} = X$.

Exemplo 2.60. *Seja* (X, τ) *um espaço discreto. Então, cada subconjunto de* X *é fechado (já que seu complemento é aberto). Portanto, o único subconjunto denso de* X *é o próprio* X, *já que cada subconjunto de* X *é seu próprio fecho.*

Proposição 2.61. *Seja* A *um subconjunto de um espaço topológico* (X, τ). *Então* A *é denso em* X *se, e somente se, todo subconjunto aberto não vazio de* X *intersecta* A *de forma não trivial (isto é, se* $U \in \tau$ *e* $U \neq \emptyset$, *então* $U \cap A \neq \emptyset$*).*

Demonstração: Primeiramente, suponha que todo subconjunto aberto não vazio intersecta A de forma não trivial. Se $A = X$, então claramente A é denso em X. Se $A \neq X$, seja $x \in X \setminus A$. Se $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $x \notin A$. Então $U \cap A \neq \emptyset$. Logo, x é um ponto de acumulação de A. Como x é um ponto arbitrário em $X \setminus A$, cada ponto de $X \setminus A$ é um ponto de acumulação de A. Assim, $\overline{A} = A \cup A'$, e então, pela Definição 2.55, $\overline{A} = A \cup A' = X$. Isto é, A é denso em X.
Reciprocamente, suponha que A é denso em X. Seja U um subconjunto aberto não vazio de X. Suponha $U \cap A = \emptyset$. Então, se $x \in U$, $x \notin A$, e x não é um ponto de acumulação de A, já que U é um conjunto aberto contendo x que não contém nenhum elemento de A. Isto é uma contradição, já que A é denso em X. Assim, todo elemento de $X \setminus A$ é um ponto de acumulação de A, e como A é denso em X, temos $U \cap A \neq \emptyset$, como requerido.
■

2.2.2 Vizinhanças

As vizinhanças permitem descrever a noção de proximidade em espaços topológicos sem recorrer à distância. Nesta seção, apresentamos sua definição e algumas propriedades fundamentais.

Definição 2.62. *Seja (X, τ) um espaço topológico, N um subconjunto de X e p um ponto em N. Então N é dito ser uma* ***vizinhança*** *do ponto p se existir um conjunto aberto U tal que $p \in U \subseteq N$.*

Exemplo 2.63. *O intervalo fechado $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ é uma vizinhança do ponto $\frac{1}{2}$, pois $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$.*

Exemplo 2.64. *O intervalo $(0, 1]$ em $\mathbb{R}$ é uma vizinhança do ponto $\frac{1}{2}$, pois $\frac{1}{2} \in (0, 1]$. Mas $(0, 1]$ não é uma vizinhança do ponto 1, pois não existe um aberto A com $1 \in A \subset (0, 1]$.*

Exemplo 2.65. *Se (X, τ) é qualquer espaço topológico e $U \in \tau$, então, pela Definição 2.62, segue-se que U é uma vizinhança de todo ponto $p \in U$. Assim, por exemplo, todo intervalo aberto (a, b) em $\mathbb{R}$ é uma vizinhança de cada ponto que contém.*

Exemplo 2.66. *Seja (X, τ) um espaço topológico, e N uma vizinhança de um ponto p. Se S é qualquer subconjunto de X tal que $N \subseteq S$, então S também é uma vizinhança de p.*

Proposição 2.67. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de A se, e somente se, toda vizinhança de x contém um ponto de A diferente de x.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) De fato, seja x é um ponto de acumulação de A , pela 2.47, se toda vizinhança N de x contém pelo menos um ponto $y \in A$, com $y \neq x$.
($\Leftarrow$) Se para cada vizinhança N de x existe $y \in A \backslash \{x\}$, então x é um ponto de acumulação de A pela Definição 2.47. ■

Como um conjunto é fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos de acumulação, deduzimos o seguinte:

Corolário 2.68. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então o conjunto A é fechado se, e somente se, para cada $x \in X \setminus A$, existe uma vizinhança N de x tal que $N \subseteq X \setminus A$.*

Demonstração: Um conjunto A é fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos de acumulação. Se A é fechado, então qualquer ponto $x \notin A$ não pode ser um ponto de acumulação de A, ou seja, existe uma vizinhança N de x tal que $N \cap A = \emptyset$, ou seja, $N \subseteq X \setminus A$. Reciprocamente, se para cada $x \notin A$ existe uma vizinhança $N \subseteq X \setminus A$, então nenhum ponto fora de A pode ser um ponto de acumulação de A, logo A contém todos os seus pontos de acumulação e, portanto, é fechado. ■

Corolário 2.69. *Seja U um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então $U \in \tau$ (isto é, U é aberto) se, e somente se, para cada $x \in U$, existe uma vizinhança N de x tal que $N \subseteq U$.*

Demonstração: Um conjunto U é aberto se, e somente se, para cada ponto $x \in U$, existe uma vizinhança N de x tal que $N \subseteq U$. Isso é diretamente a definição de conjunto aberto em um espaço topológico. ■

Corolário 2.70. *Seja U um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então $U \in \tau$ (isto é, U é aberto) se, e somente se, para cada $x \in U$, existe um conjunto aberto $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Demonstração: Este corolário é uma reescrita do Corolário 2.69, enfatizando que a vizinhança N pode ser tomada como um conjunto aberto V. De fato, para qualquer $x \in U$, podemos tomar V como a união de todos os abertos contidos em U que contêm x, garantindo que $x \in V \subseteq U$. Isso confirma que U é aberto. ■

2.2.3 Conexidade

A conexidade trata da impossibilidade de dividir um espaço em partes totalmente separadas. Aqui apresentamos sua definição e exemplos que ilustram quando um espaço é ou não conexo.

Axioma do Supremo: Seja S um conjunto não vazio de números reais. Se S é limitado superiormente, então ele tem um supremo.

Observação 2.71. *O supremo de S, denotado por $\sup(S)$, pode ou não pertencer ao conjunto S. De fato, o supremo de S é um elemento de S se, e somente se, S tiver um maior elemento. Por exemplo, o supremo do intervalo aberto $S = (1, 2)$ é 2, mas $2 \notin (1, 2)$, enquanto o supremo de $[3, 4]$ é 4, que pertence a $[3, 4]$ e é o maior elemento de $[3, 4]$.*

*Qualquer conjunto S de números reais que seja limitado inferiormente tem um **maior minorante**, chamado de ínfimo, denotado por* $\inf(S)$.

Lema 2.72. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente e seja p o supremo de S. Se S é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, então $p \in S$.*

Demonstração: Suponha por contradição que $p \notin S$. Como $\mathbb{R} \setminus S$ é aberto, existem números reais a e b com $a < b$ tal que $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Como p é o *menor* dos majorantes de S e $a < p$, então existe $x \in S$ tal que $a < x$. Além disso, como $x < p < b$, temos que $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Mas isso é uma contradição, pois $x \in S$. Logo, nossa suposição é falsa e concluímos que $p \in S$. ■

Proposição 2.73. *Seja T um subconjunto clopen de $\mathbb{R}$. Então, ou $T = \mathbb{R}$ ou $T = \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que $T \neq \mathbb{R}$ e $T \neq \emptyset$. Então existe um elemento $x \in T$ e um elemento $z \in \mathbb{R} \setminus T$. Sem perda de generalidade, suponha que $x < z$. Defina $S = T \cap [x, z]$. Então S, sendo a interseção de dois conjuntos fechados, é fechado. Além disso, é limitado superiormente, pois z é um majorante evidente. Seja p o supremo de S. Pelo Lema 2.72, temos que $p \in S$. Como T também é aberto e $p \in T$, existe um intervalo aberto $(a, b) \subset T$ contendo p. Seja t tal que $p < t < \min(b, z)$. Então $t \in T$ e $t \in [p, z]$, ou seja, $t \in T \cap [x, z] = S$. Mas isso é uma contradição, pois $t > p$ e p é o supremo de S. Assim, nossa suposição é falsa e, consequentemente, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \emptyset$. ■

Definição 2.74. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que ele é **conexo** se os únicos subconjuntos clopen de X são X e $\emptyset$.*

Exemplo 2.75. *O espaço topológico $\mathbb{R}$ é conexo.*

Exemplo 2.76. *Se (X, τ) é um espaço discreto com mais de um elemento, então (X, τ) não é conexo, pois cada conjunto unitário é clopen.*

Exemplo 2.77. *Se (X, τ) é um espaço indiscreto, então ele é conexo, pois os únicos conjuntos clopen são X e $\emptyset$.*

Exemplo 2.78. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Então (X, τ) não é conexo, pois $\{b, c, d, e\}$ é um subconjunto clopen.*

Observação 2.79. *Da Definição 2.74, segue que um espaço topológico (X, τ) não é conexo (ou seja, é **desconexo**) se, e somente se, existirem conjuntos abertos não vazios A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.*

2.3 Homeomorfismos

Nesta seção, daremos continuidade ao estudo da estrutura dos espaços topológicos, iniciando com a definição de subespaço topológico, que permite restringir a topologia a subconjuntos de um espaço dado. Em seguida, será introduzido o conceito de homeomorfismo, uma função que preserva a estrutura topológica entre dois espaços, sendo usada para identificar quando dois espaços podem ser considerados "equivalentes" do ponto de vista topológico. Por fim, serão discutidos exemplos de espaços não homeomorfos, destacando critérios que impedem tal equivalência e ilustrando a diversidade de comportamentos possíveis dentro da Topologia Geral.

2.3.1 Subespaços

Aqui revisitamos a construção da topologia induzida em subconjuntos de um espaço, ressaltando como essa noção permite analisar propriedades herdadas e estabelecer a base para comparações entre diferentes espaços topológicos.

Definição 2.80. *Seja Y um subconjunto não vazio de um espaço topológico (X, τ). A coleção*

$$\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$$

de subconjuntos de Y é uma topologia em Y, chamada de ***topologia do subespaço*** *(ou* ***topologia relativa*** *ou* ***topologia induzida*** *ou* ***topologia induzida em Y por τ****). O espaço topológico (Y, τ_Y) é chamado de* ***subespaço*** *de (X, τ).*

Exemplo 2.81. *Seja $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$. Seja $Y = \{b, c, e\}$. Então a topologia do subespaço sobre Y é $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$.*

Exemplo 2.82. *Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. E considere $Y = \{a, d, e\}$. Então a topologia induzida sobre Y é $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$.*

Observação 2.83. *Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia τ sobre X e seja Y um subconjunto de X. A coleção $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para a topologia do subespaço τ_Y sobre Y.*

Exemplo 2.84. *Considere o subconjunto $(1, 2)$ de $\mathbb{R}$. Uma base para a topologia induzida sobre $(1, 2)$ é a coleção $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, isto é, $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, 1 \leq a < b \leq 2\}$ é uma base para a topologia induzida sobre $(1, 2)$.*

Exemplo 2.85. *Considere o subconjunto* $[1,2]$ *de* $\mathbb{R}$*. Uma base para a topologia do subespaço* τ *sobre* $[1,2]$ *é* $\{(a,b)\cap[1,2] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$*, isto é,*

$$\{(a,b) : 1\leq a<b\leq 2\}\cup\{[1,b) : 1<b\leq 2\}\cup\{(a,2] : 1\leq a<2\}\cup\{[1,2]\}$$

é uma base para τ*.*

Aqui vemos algumas coisas interessantes acontecendo; por exemplo, $[1,\frac{3}{2})$ *certamente não é um conjunto aberto em* $\mathbb{R}$*, mas*

$$\left[1,\frac{3}{2}\right)=\left(0,\frac{3}{2}\right)\cap[1,2]$$

é um conjunto aberto no subespaço $[1,2]$*. Além disso,* $(1,2]$ *não é aberto em* $\mathbb{R}$ *mas é aberto em* $[1,2]$*. Até mesmo* $[1,2]$ *não é aberto em* $\mathbb{R}$*, mas é um conjunto aberto em* $[1,2]$*. Portanto, sempre que falamos de um conjunto ser aberto, devemos deixar perfeitamente claro em que espaço ou qual topologia estamos considerando.*

Exemplo 2.86. *Seja* $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$*. Note que a topologia induzida sobre* $\mathbb{Z}$ *pela Topologia Euclidiana em* $\mathbb{R}$ *é a topologia discreta. De fato, para vermos que a topologia induzida,* $\tau_{\mathbb{Z}}$*, sobre* $\mathbb{Z}$ *é discreta, basta, pela Proposição 2.7, mostrar que todo conjunto unitário em* $\mathbb{Z}$ *é aberto em* $\tau_{\mathbb{Z}}$*; isto é, se* $n\in\mathbb{Z}$*, então* $\{n\}\in\tau_{\mathbb{Z}}$*. Seja* $n\in\mathbb{Z}$*. Então* $\{n\}=(n-1,n+1)\cap\mathbb{Z}$*. Mas* $(n-1,n+1)$ *é aberto em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* $\{n\}$ *é aberto na topologia induzida sobre* $\mathbb{Z}$*. Assim, a topologia induzida sobre* $\mathbb{Z}$ *é discreta.*

Observação 2.87. *Sempre que nos referimos a* $\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{I}$ *como espaços topológicos sem especificar a topologia, estamos nos referindo à topologia induzida como subespaço de* $\mathbb{R}$*, chamada de* ***topologia usual****.*

2.3.2 Espaços Homeomorfos

Um dos principais objetivos da Topologia é identificar quando dois espaços podem ser considerados essencialmente o mesmo, isto é, quando compartilham a mesma estrutura topológica, mesmo que possam parecer diferentes em sua forma geométrica ou representação visual. Nessa subseção, estudaremos o conceito de homeomorfismo, que formaliza essa noção de equivalência topológica entre espaços. Dois espaços são ditos homeomorfos quando existe uma correspondência contínua entre eles, com inversa também contínua, preservando as relações de vizinhança e a estrutura topológica. O objetivo aqui é compreender essa definição e reconhecer exemplos que ilustrem como espaços aparentemente distintos podem, na verdade, ser topologicamente idênticos. Comecemos considerando o seguinte exemplo:

Exemplo 2.88. *Considere os conjuntos* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *e* $Y = \{g, h, i, j, k\}$*. Definimos sobre eles as topologias*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \text{ e } \tau_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

É claro que, em um sentido intuitivo, os espaços topológicos (X, τ) *e* (Y, τ_1) *são equivalentes. De fato, a função*

$$f : X \to Y, \qquad f(a) = g, \quad f(b) = h, \quad f(c) = i, \quad f(d) = j, \quad f(e) = k$$

fornece a equivalência. Portanto, esses espaços possuem a mesma estrutura topológica, ainda que sejam compostos por elementos distintos.

Agora vamos formalizar a definição de homeomorfismo.

Definição 2.89. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, τ_1) *espaços topológicos. Dizemos que eles são* ***homeomorfos*** *se existir uma função* $f : X \to Y$ *que satisfaça as seguintes propriedades:*

(i) f *é injetora (isto é,* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$*) para todos* $x_1, x_2 \in X$*.*

(ii) f *é sobrejetora (isto é, para todo* $y \in Y$*, existe* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$*).*

(iii) Para todo $U \in \tau_1$*, tem-se* $f^{-1}(U) \in \tau$*.*

(iv) Para todo $V \in \tau$*, tem-se* $f(V) \in \tau_1$*.*

Além disso, dizemos que f *é um* ***homeomorfismo*** *entre* (X, τ) *e* (Y, τ_1)*, e escrevemos* $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$*.*

Proposição 2.90. *Sejam* (X, τ)*,* (Y, τ_1) *e* (Z, τ_2) *espaços topológicos. Se* $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$ *e* $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$*, então* $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$*.*

Demonstração: Sabemos que $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$, ou seja, existe uma função $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ que é um homeomorfismo. Também sabemos que $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$, isto é, existe um homeomorfismo $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$.

Precisamos provar que $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$, ou seja, encontrar um homeomorfismo $h : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$. Mostraremos que a função composta $g \circ f : X \to Z$ é o homeomorfismo desejado. Como $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$ e $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$, temos que f e g são homeomorfismos, logo:

- $g \circ f$ é bijetora, pois composição de funções bijetoras é bijetora.
- Para todo $U \in \tau_2$, temos que $g^{-1}(U) \in \tau_1$, e como f é homeomorfismo, então $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(U) \in \tau$.
- Para todo $V \in \tau$, temos que $f(V) \in \tau_1$ e, como g é homeomorfismo, $g(f(V)) \in \tau_2$. Logo, $(g \circ f)(V) \in \tau_2$.

Portanto, $g \circ f$ satisfaz as condições da Definição 2.89 e é um homeomorfismo. Concluímos que $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$. $\blacksquare$

Observação 2.91. *A Proposição 2.90 mostra que $\cong$ é uma relação binária transitiva. De fato, verifica-se facilmente que se trata de uma relação de equivalência, ou seja:*

(i) $(X, \tau) \cong (X, \tau)$ *(Reflexividade).*

(ii) Se $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$, *então* $(Y, \tau_1) \cong (X, \tau)$ *(Simetria).*

(iii) Se $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$ *e* $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$, *então* $(X, \tau) \cong (Z, \tau_2)$ *(Transitividade).*

2.3.3 Espaços Não Homeomorfos

Para provar que dois espaços topológicos são homeomorfos, precisamos encontrar um homeomorfismo entre eles. Por outro lado, provar que dois espaços topológicos não são homeomorfos geralmente é muito mais difícil, uma vez que precisamos mostrar que nenhum homeomorfismo existe. O exemplo a seguir nos fornece um caminho de como proceder em relação a isso.

Exemplo 2.92. *Note que* $[0, 2]$ *não é homeomorfo ao subespaço* $[0, 1] \cup [2, 3]$ *de* $\mathbb{R}$. *Seja* $(X, \tau) = [0, 2]$ *e* $(Y, \tau_1) = [0, 1] \cup [2, 3]$. *Então* $[0, 1] = [0, 1] \cap Y \Rightarrow [0, 1]$ *é fechado em* (Y, τ_1), *e também,* $[0, 1] = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cap Y \Rightarrow [0, 1]$ *é aberto em* (Y, τ_1). *Assim,* Y *não é conexo, pois possui* $[0, 1]$ *como um subconjunto clopen (aberto e fechado) próprio e não vazio. Suponha que* $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$. *Então, existe um homeomorfismo* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. *Assim,*

$f^{-1}([0,1])$ *é um subconjunto clopen de* X*, o que significa que* X *não é conexo. No entanto, isso é falso, pois* $X = [0,2]$ *é conexo. Isso leva a uma contradição, logo* $(X, \tau) \ncong (Y, \tau_1)$.

Proposição 2.93. *Qualquer espaço topológico homeomorfo a um espaço conexo também é conexo.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo e suponha, por contradição, que Y é desconexo. Então existem abertos $U, V \subseteq Y$ tais que $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = Y$. Como f é contínua, $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos em X. Além disso, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ e $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) = X$. Logo X é a união de dois abertos disjuntos e não-vazios, o que contradiz a conexidade de X. Portanto, Y é conexo. ■

A Proposição 2.93 nos dá um método para mostrar que dois espaços topológicos não são homeomorfos, identificando uma propriedade preservada por homeomorfismos que um dos espaços possui e o outro não.

Definição 2.94. *Um subconjunto* S *de* $\mathbb{R}$ *é chamado de* ***intervalo*** *se satisfaz a seguinte propriedade: se* $x \in S$*,* $z \in S$ *e* $y \in \mathbb{R}$ *são tais que* $x < y < z$*, então* $y \in S$.

Proposição 2.95. *Um subconjunto* S *de* $\mathbb{R}$ *é conexo se, e somente se, ele for um intervalo.*

Demonstração: Todos os intervalos são conexos e isso pode ser provado de forma semelhante à Proposição 2.73, substituindo $\mathbb{R}$ pelo intervalo que queremos provar ser conexo. Reciprocamente, suponha que S seja conexo. Suponha que $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$, mas $y \notin S$. Então, $(-\infty, y) \cap S$ é um subconjunto aberto e fechado de S. Como S é conexo, isso implica que S é um intervalo. ■

Agora podemos entender melhor o termo **conexo**. Note que, subespaços de $\mathbb{R}$ como $[a,b]$, (a,b) e etc, são conexos, enquanto subespaços como $X = [0,1] \cup [2,3] \cup [5,6]$, que são uniões de partes desconexas, não são conexos.

Agora, podemons concluir a partir do Corolário abaixo que $(0,1) \ncong [0,1]$.

Corolário 2.96. *Se* a, b, c, d *são números reais com* $a < b$ *e* $c < d$*, então:*

1. $(a,b) \ncong [c,d]$,

2. $[c,d] \ncong (a,b)$,

3. $[a,b] \ncong [c,d]$.

Demonstração:

1. Seja $(X, \tau) = [c, d]$ e $(Y, \tau_1) = (a, b)$. Suponha que $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$. Então, $X \setminus \{c\}$ é conexo, enquanto $(a, b) \setminus \{y\}$ é desconexo para qualquer $y \in (a, b)$. Assim, $(a, b) \not\cong [c, d]$.

2. $[c, d] \setminus \{c\}$ é conexo, enquanto $(a, b) \setminus \{y\}$ é desconexo para qualquer $y \in (a, b)$. Portanto, $(a, b) \not\cong [c, d]$.

3. Suponha que $[a, b] \cong [c, d]$. Então, $[c, d] \setminus \{c\} \cong [a, b] \setminus \{y\}$ para algum $y \in [a, b]$. Mas $[c, d] \setminus \{c\}$ é conexo, enquanto $[a, b] \setminus \{y, z\}$, para quaisquer pontos distintos $y, z \in [a, b]$, é desconexo. Isso gera uma contradição. Portanto, $[a, b] \not\cong [c, d]$.

■

2.4 Continuidade

Nesta seção, abordamos a noção de continuidade em espaços topológicos. O estudo da continuidade é central em Análise e Topologia, pois garante que propriedades locais e globais sejam preservadas pelas aplicações. Para prosseguirmos com o estudo, iniciamos com alguns lemas na reta real, que servirão de base para a compreensão no contexto geral. Em seguida, apresentamos definições e resultados que esclarecem o comportamento de mapas contínuos, culminando em teoremas que evidenciam a relevância desse contexto.

2.4.1 Mapas Contínuos

O estudo dos mapas contínuos entre espaços topológicos será iniciado a partir de lemas estabelecidos na reta real, que fornecem intuições e ferramentas úteis para a formulação geral. A partir daí, apresentamos a definição formal e discutimos exemplos e propriedades que evidenciam como as estruturas topológicas se relacionam por meio de aplicações contínuas.

Lema 2.97. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para cada $a \in \mathbb{R}$ e cada conjunto aberto U contendo $f(a)$, existe um conjunto aberto V contendo a tal que $f(V) \subseteq U$.*

Demonstração: Suponha que f seja contínua. Seja U um conjunto aberto contendo $f(a)$. Então, existem números reais c e d tais que $f(a) \in (c,d) \subseteq U$. Seja ε igual ao menor dos números $d - f(a)$ e $f(a) - c$, de modo que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq U$.
Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Considere $V = (a - \delta, a + \delta)$, então $a \in V$ e $f(V) \subseteq U$. Reciprocamente, seja $\varepsilon > 0$ e tome $U = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, que é um aberto contendo $f(a)$. Pelo que assumimos, existe um aberto V contendo a, tal que $f(V) \subseteq U$. Como V é aberto e contém a, existem reais c e d tais que $a \in (c,d) \subseteq V$. Definindo δ como o menor entre $d - a$ e $a - c$, garantindo que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq V$. Assim, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$, temos $f(x) \in f(V) \subseteq U$, como desejado. Portanto, f é contínua. ■

Lema 2.98. *Seja f um mapeamento de um espaço topológico (X, τ) em um espaço topológico (Y, τ_1), $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para cada $U \in \tau_1, f^{-1}(U) \in \tau$.*

2. *Para cada $a \in X$ e $U \in \tau_1$ com $f(a) \in U$, existe um conjunto aberto V contendo a tal que $f(V) \subseteq U$.*

Demonstração: (1) Se $a \in X$ e $U \in \tau_1$ com $f(a) \in U$, tome $V = f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U) \in \tau$, temos que $a \in V$ e $f(V) \subseteq U$. Logo a condição (2) é satisfeita.
(2) Seja $U \in \tau_1$. Se $f^{-1}(U) = \emptyset$, então claramente $f^{-1}(U) \in \tau$. Se $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, seja $a \in f^{-1}(U)$, então $f(a) \in U$. Por hipótese, existe um conjunto aberto V contendo a tal que $f(V) \subseteq U$. Como $a \in f^{-1}(U)$, concluímos que $V \subseteq f^{-1}(U)$, e pelo Corolário 2.70, $f^{-1}(U) \in \tau$. Portanto, a condição (1) é satisfeita. ■
Reunindo os Lemas 2.97 e 2.98, vemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, se e somente se, para cada subconjunto aberto U de $\mathbb{R}, f^{-1}(U)$ também é aberto.

Definição 2.99. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. Dizemos que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ é um **mapeamento contínuo** se, para cada $U \in \tau_1, f^{-1}(U) \in \tau$.*

Exemplo 2.100. *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função identidade. Então, para qualquer conjunto aberto $U \in \mathbb{R}, f^{-1}(U) = U$, e portanto, é aberto. Portanto, f é contínua.*

Proposição 2.101. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ um mapeamento. Então f é contínua se, e somente se, para cada $x \in X$ e cada $U \in \tau_1$ com $f(x) \in U$, existe um $V \in \tau$ tal que $x \in V$ e $f(V) \subseteq U$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ contínua. Se $x \in X$ e $U \in \tau_1$ com $f(x) \in U$, então $f^{-1}(U) \in \tau$. Como $x \in f^{-1}(U)$ e $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$, tomando $V = f^{-1}(U)$ obtemos $x \in V \in \tau$ e $f(V) \subseteq U$.
($\Leftarrow$) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $U \in \tau_1$ com $f(x) \in U$, exista $V \in \tau$ tal que $x \in V$ e $f(V) \subseteq U$. Seja $U \in \tau_1$. Para cada $x \in f^{-1}(U)$, existe $V_x \in \tau$ com $x \in V_x \subseteq f^{-1}(U)$. Logo $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$ é aberto em X. Portanto f é contínua. ■

Proposição 2.102. *Sejam $(X, \tau), (Y, \tau_1)$ e (Z, τ_2) espaços topológicos. Se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ e $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$ são mapeamentos contínuos, então a função composta $g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$ também é contínua.*

Demonstração: Seja U um conjunto aberto em (Z, τ_2). Como g é contínua, $g^{-1}(U)$ é aberto em τ_1. Então, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em τ, pois f é contínua.
Mas $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, assim $g \circ f$ é contínua. ■

Proposição 2.103. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos. Então $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ é contínua se, e somente se, para todo subconjunto fechado $S \subseteq Y$, $f^{-1}(S)$ for subconjunto fechado de X.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha f contínua e seja $S \subseteq Y$ fechado. Então $Y \setminus S$ é aberto e, como f é contínua, $f^{-1}(Y \setminus S)$ é aberto em X. Como $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$, segue que $f^{-1}(S)$ é fechado em X.
($\Leftarrow$) Suponha que para todo fechado $S \subseteq Y$ temos $f^{-1}(S)$ fechado em X. Seja $U \subseteq Y$ aberto e escreva $U = Y \setminus S$ com S fechado. Então $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(S)$ é aberto em X. Logo, f é contínua. ■

Observação 2.104. *Existe uma relação entre funções contínuas e homeomorfismo: se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ é um homeomorfismo, então f é uma função contínua. No entanto, nem toda função contínua é um homeomorfismo.*

Proposição 2.105. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é um homeomorfismo se, e somente se:*

1. *f é contínua,*
2. *f é bijetora, ou seja, sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ existe,*
3. *f^{-1} é contínua.*

Demonstração: Pela Definição 2.89, como f é um homeomorfismo segue que, para cada $U \in \tau_1, f^{-1}(U) \in \tau$, portanto, f é contínua. Além disso, pela definição de homeomorfismo, f é bijetora. E também temos pela mesma definição que, para todo $V \in \tau, f(V) \in \tau_1$. Reciprocamente, f é bijetora, e sua inversa está bem definida. Temos que f é contínua, ou seja, $U \in \tau_1$, é aberto em Y, então $f^{-1}(U) \in \tau$. E por fim, f^{-1} é contínua, ou seja , se $V \in \tau$, é aberto em $X, f(V) \in \tau_1$. ■

Um resultado útil é a seguinte proposição que nos diz que qualquer restrição de um mapeamento contínuo é um mapeamento contínuo.

Proposição 2.106. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos, $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ uma função contínua e A um subconjunto de X, onde τ_2 é a topologia induzida em A. Se definirmos $g : (A, \tau_2) \to (Y, \tau_1)$ como restrição de f a A, ou seja, $g(x) = f(x)$, para todo $x \in A$, então g é contínua.*

Demonstração: Seja $W \in \tau_1$. Temos

$$g^{-1}(W) = \{x \in A : \ g(x) \in W\} = \{x \in A : \ f(x) \in W\} = A \cap f^{-1}(W).$$

Como f é contínua, $f^{-1}(W) \in \tau$. Pela definição da topologia induzida, $A \cap f^{-1}(W) \in \tau_2$. Logo $g^{-1}(W) \in \tau_2$ para todo $W \in \tau_1$, e portanto g é contínua. ■

2.4.2 Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário é um resultado clássico que expressa uma propriedade fundamental das funções contínuas: se uma função assume dois valores distintos em pontos diferentes do domínio, então ela também assume todos os valores intermediários entre eles. Nesta subseção, nosso objetivo é apresentar um importante resultado sobre espaços conexos, introduzir o conceito de conexidade por caminhos e mostrar que todo espaço conexo por caminhos é, em particular, conexo. Em seguida, enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Valor Intermediário e, por fim, abordaremos a noção de ponto fixo, concluindo com a demonstração do Teorema do Ponto Fixo.

Proposição 2.107. *Se (X, τ) e (Y, τ_1) são espaços topológicos e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ é contínua e sobrejetora e (X, τ) é conexo, então (Y, τ_1) também é conexo.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que (Y, τ_1) não seja conexo. Então existe um subconjunto clopen $U \subset Y$ tal que $U \neq \emptyset$ e $U \neq Y$. Por outro lado, $f^{-1}(U)$ é um conjunto aberto, já que f é contínua e também é um conjunto fechado, pela Proposição 2.103, ou seja, $f^{-1}(U)$ é um subconjunto clopen de X. Agora, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ como f é sobrejetora e $U \neq \emptyset$. Também $f^{-1}(U) \neq X$, já que se fosse igual, U seria igual a Y, pela sobrejetividade de f. Assim (X, τ) não é conexo, o que é uma contradição. ∎

Definição 2.108. *Um espaço topológico (X, τ) é chamado de conexo por caminhos se, para cada par de pontos distintos $a, b \in X$, existe uma função contínua $f : [0, 1] \to (X, \tau)$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Essa função é chamada de caminho que liga a até b.*

Proposição 2.109. *Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Seja (X, τ) um espaço conexo por caminhos e suponha que não é conexo. Então tem um subconjunto próprio não vazio que é simultaneamente aberto e fechado U. Logo existem a e b tais que $a \in U$ e $b \in X \setminus U$. Como (X, τ) é conexo por caminhos, existe uma função contínua $f : [0, 1] \to (X, \tau)$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. No entanto, $f^{-1}(U)$ é um subconjunto de $[0, 1]$ que é simultaneamente aberto e fechado. Como $a \in U$, $0 \in f^{-1}(U)$ e assim $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Como $b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$ então $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$. Logo $f^{-1}(U)$ é um subconjunto próprio não vazio de $[0, 1]$ que é simultaneamente aberto e fechado, o que contradiz a conexidade de $[0, 1]$. Consequentemente (X, τ) é conexo. ∎

Agora apresentamos o Teorema do Valor Intermediário de Weierstrass, que é uma bela aplicação da topologia à teoria das funções de uma variável real. O conceito topológico crucial para o resultado é o de conexidade.

Teorema 2.110. ***(Teorema do Valor Intermediário de Weierstrass)***
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que $f(a) \neq f(b)$. Então, para todo número p entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = p$.

Demonstração: Como $[a, b]$ é conexo e f é contínua, pela Proposição 2.107 $f([a, b])$ também é conexo. E pela Proposição 2.95, $f([a, b])$ é um intervalo. Agora como $f(a)$ e $f(b)$ pertencem a $f([a, b])$, segue que p está entre $f(a)$ e $f(b)$, então $p \in f([a, b])$, ou seja, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = p$. ∎

Corolário 2.111. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Demonstração: Como $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, o intervalo $f([a, b])$ contém todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive o 0, ou seja, $0 \in f([a, b])$. Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 2.110, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. ∎

Definição 2.112. *Seja $f : X \to X$ uma função. Então $x \in X$ é dito ser um **ponto fixo** de f se $f(x) = x$.*

Teorema 2.113. *(**Teorema do Ponto Fixo**) Seja f uma função contínua de $[0, 1]$ em si mesmo. Então, existe $z \in [0, 1]$ tal que $f(z) = z$.*

Demonstração: Defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - x$. Note que g é contínua, pois f é contínua. Além disso, $g(0) = f(0) - 0$ e $g(1) = f(1) - 1$. Se $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, então $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, e o resultado segue. Caso contrário, suponha sem perda de generalidade, que $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$ pelo Corolário 2.111, existe $z \in [0, 1]$ tal que $g(z) = 0$, isto é, $f(z) = z$. ■

2.5 Espaços Métricos

Entre todas as classes de espaços topológicos, a dos espaços métricos ocupa um papel de destaque. Esses espaços são fundamentais porque sua estrutura está associada a uma noção de distância, o que torna muitos conceitos topológicos mais intuitivos e acessíveis. Além disso, a maior parte das aplicações da Topologia à Análise ocorre justamente por meio dos espaços métricos, que fornecem uma base sólida para o estudo de convergência, continuidade, compacidade e outras propriedades essenciais. Nesta seção, estudaremos os principais aspectos relacionados a essa classe de espaços. Abordaremos inicialmente a definição formal de espaço métrico e veremos exemplos clássicos que ilustram suas propriedades fundamentais. Em seguida, discutiremos temas como convergência de sequências, completude, contrações de aplicações e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, finalizando com uma breve introdução aos espaços de Baire.

2.5.1 Espaços Métricos

Aqui definimos formalmente o conceito de espaço métrico, discutindo exemplos clássicos e propriedades fundamentais que caracterizam essas estruturas. Este conceito é essencial para todas as construções e resultados subsequentes.

Definição 2.114. *Seja X um conjunto não-vazio e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função tal que para $a, b, c \in X$:*

(i) $d(a, b) \geq 0$ *e* $d(a, b) = 0$ *se, e somente se,* $a = b$*;*

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$;

(iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, *(desigualdade triangular).*

*Então d é dita uma **métrica** em X, (X,d) é chamado de **espaço métrico** e $d(a,b)$ é referida como a distância entre a e b.*

Exemplo 2.115. *A função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d(a,b) = |a-b|, \text{ com } a,b \in \mathbb{R}$$

é uma métrica no conjunto $\mathbb{R}$, pois

(i) $|a-b| \geq 0$, *para todo* $a,b \in \mathbb{R}$ *e* $|a-b| = 0$ *se, e somente se* $a = b$;

(ii) $|a-b| = |b-a|$;

(iii) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$.

Chamamos d de métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.116. *A função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$d((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^2$ chamada de métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.117. *Seja X um conjunto não-vazio e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(a,b) = \begin{cases} 0, se \ \ a = b; \\ \\ 1, se \ a \neq b. \end{cases}$$

Então d é uma métrica em X e é chamada de métrica discreta.

Exemplo 2.118. *Podemos definir uma métrica em $\mathbb{R}^2$ considerando*

$$d((a_1,a_2),(b_1,b_2) = max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$$

no qual o $max\{x,y\}$ é o maior entre os números.

Exemplo 2.119. *Outra métrica em $\mathbb{R}^2$ é dada por*

$$d_1((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$$

Uma rica fonte de exemplos de espaços métricos é a família de espaços vetoriais, vejamos o seguinte exemplo.

Definição 2.120. *Seja V um espaço vetorial sobre o campo dos números reais ou complexos. Uma norma $\|.\|$ em V é um mapa $V \to \mathbb{R}$ tal que para todos $a, b \in V$ e λ no campo,*

(i) $\|a\| > 0$ *e* $\|a\| = 0$ *se, e somente se,* $a = 0$,

(ii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, *e*

(iii) $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$.

Chamamos este espaço vetorial de espaço vetorial normado, denotado por $(V, \|.\|)$.

Observação 2.121. *Seja $(V, \|.\|)$ qualquer espaço vetorial normado. Então existe uma métrica correspondente, d, no conjunto V dada por $d(a, b) = \|a - b\|$, para todo $a, b \in V$.*

Definição 2.122. *Seja (X, d) um espaço métrico e r um número real positivo. Então, a bola aberta centrada em $a \in X$ com o raio r é o conjunto*

$$B_r(a) = \{x : x \in X \text{ e } d(a, x) < r\}.$$

Exemplo 2.123. *Em $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana, $B_r(a)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$.*

Lema 2.124. *Seja (X, d) um espaço métrico e $a, b \in X$. Além disso, sejam δ_1 e δ_2 números reais positivos. Se $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$, então existe um $\delta > 0$ tal que $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$.*

Demonstração: Como $c \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$, temos que $d(c, a) < \delta_1$ e $d(c, b) < \delta_2$. Defina:

$$\delta = \min\{\delta_1 - d(c, a), \delta_2 - d(c, b)\}.$$

Note que $\delta > 0$. Agora, tome qualquer $x \in B_\delta(c)$. Então $d(x, c) < \delta$. Pela desigualdade triangular:

$$d(x, a) \leq d(x, c) + d(c, a) < \delta + d(c, a) \leq (\delta_1 - d(c, a)) + d(c, a) = \delta_1,$$

logo $x \in B_{\delta_1}(a)$. Analogamente:

$$d(x, b) \leq d(x, c) + d(c, b) < \delta + d(c, b) \leq (\delta_2 - d(c, b)) + d(c, b) = \delta_2,$$

logo $x \in B_{\delta_2}(b)$. Portanto, $x \in B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$, ou seja, $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(b)$. ■

Corolário 2.125. *Seja (X, d) um espaço métrico e B_1 e B_2 bolas abertas em (X, d). Então $B_1 \cap B_2$ é uma união de bolas abertas em (X, d).*

Demonstração: Se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então é trivialmente uma união (vazia) de bolas abertas. Caso contrário, seja $c \in B_1 \cap B_2$. Pelo Lema 2.124, existe uma bola aberta $B_\delta(c)$ tal que $B_\delta(c) \subseteq B_1 \cap B_2$. Portanto:

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{c \in B_1 \cap B_2} B_\delta(c),$$

que é uma união de bolas abertas. ■

Com isto, podemos relacionar espaços métricos com espaços topológicos.

Proposição 2.126. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, a coleção de bolas abertas em (X, d) é uma base para a topologia τ em X.*

Demonstração: Isso decorre da Proposição 2.38 e do Corolário 2.125. ■

Definição 2.127. *A topologia τ é referida como a topologia induzida pela métrica d, e (X, τ) é chamado de espaço topológico induzido.*

Exemplo 2.128. *Se d é a métrica euclidiana em $\mathbb{R}$, então uma base para a topologia τ induzida pela métrica d é o conjunto de todas as bolas abertas. Mas $B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$. Visto que τ é a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$. Então a métrica euclidiana em $\mathbb{R}$ induz a Topologia Euclidiana em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.129. *Se d é a métrica discreta do conjunto X, então para cada $x \in X$, $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. Assim todos os conjuntos unitários são abertos na topologia τ induzida em X por d. Consequentemente, τ é a topologia discreta.*

Definição 2.130. *Métricas em um conjunto X são ditas equivalentes se elas induzem a mesma topologia.*

Proposição 2.131. *Seja (X, d) um espaço métrico e τ a topologia induzida em X pela métrica d. Então, um subconjunto U de X é aberto em (X, τ) se, e somente se, para cada $a \in U$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B_\varepsilon(a) \subseteq U$.*

Demonstração: Suponha que $U \in \tau$. Então pelas Proposições 2.42 e 2.126, para qualquer $a \in U$ existe um ponto $b \in X$ e um $\delta > 0$ tal que $a \in B_\delta(b) \subseteq U$. Seja $\varepsilon = \delta - d(a, b)$.

Então $a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U$. Reciprocamente, suponha que $U \subseteq X$, com a propriedade de que para cada $a \in U$ existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(a) \subseteq U$. Então, pelas Proposições 2.43 e 2.126, U é aberto. ■

Definição 2.132. *Um espaço topológico (X, τ) é dito um espaço de* ***Hausdorff*** *se para cada par de pontos distintos a e b em X, existem conjuntos abertos distintos U e V tais que $a \in U, b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Exemplo 2.133. *Considere o conjunto $X = \{a, b\}$ munido da topologia $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Este espaço não é de Hausdorff.*

Proposição 2.134. *Seja (X, d) um espaço métrico qualquer e τ a topologia induzida em X por d. Então (X, τ) é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Sejam a e b quaisquer pontos de X, com $a \neq b$. Então $d(a, b) > 0$. Tome $\varepsilon = d(a, b)$ e considere as bolas abertas $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. Então esses são conjuntos abertos em (X, τ) com $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ e $b \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. Assim, para mostrar que τ é Hausdorff, temos apenas que provar que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \emptyset$. Então, suponha que $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$, ou seja, $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo,

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que implica que $d(a, b) < \varepsilon$, o que é falso. Consequentemente, não existe $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$, ou seja, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \emptyset$ ■

Observação 2.135. *Note que um espaço métrico com pelo menos dois pontos tem uma topologia que não é induzida por nenhuma métrica.*

Definição 2.136. *Um espaço (X, τ) é dito* ***metrizável*** *se existe uma métrica d no conjunto X com a propriedade de que τ é a topologia induzida por d.*

Exemplo 2.137. *Então, por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}$ com a topologia cofinita não é um espaço metrizável*

2.5.2 Convergências de Sequências

Nesta subsubseção, estendemos a noção de convergência de sequências, originalmente definida em $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana, para qualquer espaço métrico. Essa generalização permite analisar o comportamento limite de sequências de forma abstrata, servindo de base para conceitos posteriores, como completude e continuidade.

Definição 2.138. *Seja* (X, d) *um espaço métrico e* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *uma sequência de pontos em* X. *Então a sequência é dita convergir para* $x \in X$ *se dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0, d(x, x_n) < \varepsilon$. *Denotamos por* $x_n \to x$.

Proposição 2.139. *Seja* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *uma sequência de pontos em um espaço métrico* (X, d). *Além disso, sejam* x *e* y *pontos em* (X, d) *tais que* $x_n \to x$ *e* $x_n \to y$. *Então* $x = y$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $x \neq y$. Então $d(x, y) > 0$. Considere $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Pela convergência $x_n \to x$ e $x_n \to y$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(x_n, y) < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x, y),$$

o que é uma contradição. Portanto $x = y$. ■

Observação 2.140. *Por conveniência, diremos que um subconjunto* A *de um espaço métrico* (X, d) *é fechado (respectivamente, aberto) no espaço métrico* (X, d) *se ele for fechado (respectivamente, aberto) na topologia induzida em* X *pela métrica* d.

Proposição 2.141. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Um subconjunto* $A \subseteq X$ *é fechado em* (X, d) *se, e somente se, toda sequência convergente de pontos em* A *convergir para um ponto em* A.

Demonstração: Suponha que A é fechado em (X, d) e seja $a_n \to x$, onde $a_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $x \in X \setminus A$. Então, como $X \setminus A$ é aberto contendo x, existe $B_\varepsilon(x)$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Como cada $a_n \in A$ implica que $d(x, a_n) > \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $(a_1, ..., a_n, ...)$ não converge para x, o que é uma contradição. Portanto, $x \in A$.

Reciprocamente, suponha que toda sequência convergente em A converge para um ponto de A. Suponha que $X \setminus A$ não é aberto. Então existe um ponto $y \in X \setminus A$ tal que para cada $\varepsilon > 0, B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja x_n qualquer ponto em $B_{\frac{1}{n}}(y) \cap A$. Note que $x_n \to y$. De fato, para $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > \frac{1}{n}$, temos que para $n \geq n_0$,

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subseteq B_{\frac{1}{n_0}}(y) \subseteq B_\varepsilon(y).$$

E por suposição $y \notin A$. O que é uma contradição, e portanto, $X \setminus A$ é aberto, o que implica que A é fechado. ■

Proposição 2.142. *Sejam (X, d) e (Y, d_1) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Sejam τ e τ_1 as topologias determinadas por d e d_1, respectivamente. Então $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ é contínua se, e somente se, $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$, ou seja, $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é uma sequência de pontos em (X, d) convergindo para x, então a sequência de pontos $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...)$ em (Y, d_1) converge para $f(x)$.*

Demonstração: Suponha que f é contínua e $x_n \to x$. Seja $\varepsilon > 0$, então $B_\varepsilon(f(x))$ é um conjunto aberto em (Y, τ_1). Como f é contínua, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é um conjunto aberto em (X, τ) e contém x. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)).$$

Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_\delta(x)$. Logo, $f(x_n) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, para todo $n \geq n_0$. Assim, $f(x_n) \to f(x)$.
Reciprocamente, suponha que $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$. Seja A um conjunto fechado em (Y, τ_1). Considere $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ uma sequência de pontos em $f^{-1}(A)$ convergindo para um ponto $x \in X$. Como $x_n \to x$, temos que $f(x_n) \to f(x)$. Mas como cada $f(x_n) \in A$ e A é fechado, a Proposição 2.141 implica que $f(x) \in A$. Portanto, $x \in f^{-1}(A)$, logo $f^{-1}(A)$ é fechado e, consequentemente, f é contínua. ■

Corolário 2.143. *Sejam (X, d) e (Y, d_1) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Sejam τ e τ_1 as topologias determinadas por d e d_1, respectivamente. Então $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ é contínua se, e somente se, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $d(x, x_0) < \delta \implies d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Demonstração: Seja f contínua no ponto $x_0 \in X$. Então para qualquer aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(x) \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $x_0 \in U$ e $f(U) \in V$. Tome $B_0 = B_\varepsilon(f(x_0))$, uma bola aberta em Y. Pela continuidade, existe $\delta > 0$ tal que a $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_0)$, ou

seja, para todo $x \in X, d(x, x_0) < \delta \implies d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Reciprocamente, seja $x_n \to x_0$ em X, ou seja, para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$ implica que $d(x_n, x_0) < \delta$, então $d_1(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$, o que garante que f é contínua. ■

2.5.3 Completude

Nesta subseção tratamos da propriedade de completude em espaços métricos, a qual garante que sequências de Cauchy convergentes tenham limites no próprio espaço. Depois prosseguimos com algumas definições e resultados bastantes importantes, como por exemplo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass e o fato de que $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.

Definição 2.144. *Uma sequência $(x_1, ..., x_n, ...)$ de pontos em um espaço métrico (X, d) é chamada de sequência de **Cauchy** se, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Proposição 2.145. *Seja (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de pontos em (X, d). Se existe um ponto $a \in X$ tal que a sequência converge para a, ou seja, $x_n \to a$, então a sequência é de Cauchy.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e definindo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, a) < \delta$. Tome $m > n_0$ e $n > n_0$, então $d(x_m, a) < \delta$ e $d(x_n, a) < \delta$. E pela desigualdade triangular,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Portanto, a sequência é de Cauchy. ■

Definição 2.146. *Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy em (X, d) converge para um ponto em X.*

Definição 2.147. *Se (x_n) é uma sequência qualquer, então a sequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ é dita ser uma subsequência se $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.*

Definição 2.148. *Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Então (x_n) é dita ser uma sequência crescente se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que (x_n) é uma sequência decrescente* *se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência que é crescente ou decrescente é chamada de sequência monótona.*

Definição 2.149. *Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Então n_0 é dito ser um ponto de pico se $x_n \leq x_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$.*

Definição 2.150. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (X, d), dizemos que (x_n) é limitada se existe $x_0 \in X$ e $M > 0$ tais que*

$$d(x_n, x_0) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.151. *Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Então (x_n) possui uma subsequência monótona.*

Demonstração: Vamos considerar dois casos:

(1) (x_n) é uma sequência com infinitos pontos de pico. E seja (x_{n_k}) uma subsequência onde cada n_k é um ponto de pico, em particular, $x_{n_k} \geq x_{n_k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$; ou seja, (x_{n_k}) é uma subsequência decrescente de (x_n), então é uma subsequência monótona.

(2) (x_n) tem um número finito de pontos de pico. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que não há pontos de pico com índice maior que n_0. Seja $n_1 > n_0$, então n_1 não é ponto de pico. Assim existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Agora $n_2 > n_0$ e, portanto, também não é um ponto de pico. Continuando assim, por indução, produzimos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) com $x_{n_k} < x_{n_k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, (x_{n_k}) é crescente, ou seja, é uma subsequência monótona.

■

Proposição 2.152. *Seja (x_n) uma sequência monótona em $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana. Então (x_n) converge para um ponto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, (x_n) for limitada.*

Demonstração: Claramente, se (x_n) não é limitada, então não converge. Seja (x_n) uma sequência que é crescente e limitada. Pelo axioma do Supremo, existe um menor limite superior L do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(x_{n_0}, L) < \varepsilon$, ou seja, $x_{n_0} > L - \varepsilon$. Mas como (x_n) é crescente e L é um limite superior, temos

$$L - \varepsilon < x_n < L, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Ou seja, $x_n \to L$.

Para o caso de (x_n) decrescente a demonstração segue de maneira análoga. ■

Com o Lema 2.151 e a Proposição 2.152, obtemos imediatamente o seguinte resultado:

Teorema 2.153. ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana tem uma subsequência convergente.*

Com isso conseguimos provar que $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.

Corolário 2.154. *O espaço métrico $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy arbitrária em $(\mathbb{R}, d)$. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < 1$; ou seja, $|x_n - x_m| < 1$. Defina $M = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{n_0}| + 1$. Então $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$; ou seja, a sequência (x_n) é limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 2.153, esta sequência possui uma subsequência convergente; isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ e uma subsequência (x_{n_k}) com $x_{n_k} \to a$. Seja ε um número real positivo qualquer. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todos $m \geq n_1$ e $n \geq n_1$. Como $x_{n_k} \to a$, existe um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todos $n_k \geq n_2$. Se escolhermos $k_0 = \max\{n_1, n_2\}$, a combinação das duas desigualdades acima resulta em

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n > k_0$ e $n_k > k_0$. Portanto, $x_n \to a$. ■

Corolário 2.155. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, o espaço métrico $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, para todo $n, m > n_0$. Como $\mathbb{R}$ é completo, cada uma de suas sequências converge para um número real $x_i \in \mathbb{R}$. Dessa forma a sequência (x_n) converge para $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Logo, $\mathbb{R}^n$ é completo. ■

Proposição 2.156. *Seja (X, d) um espaço métrico, Y um subconjunto de X, e d_1 a métrica induzida em Y por d.*

(i) Se (X, d) é um espaço métrico completo e Y é um subespaço fechado de (X, d), então (Y, d_1) é um espaço métrico completo.

(ii) Se (Y, d_1) é um espaço métrico completo, então Y é um subespaço fechado de (X, d).

Demonstração: (i) Suponha que (X, d) é um espaço métrico completo e que $Y \subseteq X$ seja um subconjunto fechado. Seja (y_n) uma sequência de Cauchy em (Y, d_1). Como d_1 é a métrica induzida em Y por d, temos que (y_n) também é de Cauchy em (X, d). E como X é completo, existe $x \in X$ tal que $y_n \to x$ em X. Como Y é fechado em X, então $x \in Y$, o que implica que $y_n \to x$ em Y. Logo, (y_n) converge em (Y, d_1), ou seja, (Y, d_1) é completo.
(ii) Suponha agora que (Y, d_1) seja completo. Seja $x \in X$ tal que existe uma sequência $(y_n) \subset Y$ com $y_n \to x$ em X. Isso implica que (y_n) é uma sequência de Cauchy em (X, d), e portanto também é de Cauchy em (Y, d_1), já que a métrica é a mesma. Pela hipótese de que (Y, d_1) é completo, a sequência (y_n) converge para algum ponto $y \in Y$. Mas a convergência em (X, d) é única, logo $y = x$, e então $x \in Y$. Logo, Y contém todos os seus pontos limites, portanto é fechado em X. ■

Observação 2.157. *A completude não é preservada por homeomorfismo e consequentemente não é uma propriedade topológica.*

Definição 2.158. *Um espaço topológico (X, τ) é dito* ***completamente metrizável*** *se existe uma métrica d em X tal que τ é a topologia em X determinada por d e (X, d) é um espaço métrico completo.*

Observação 2.159. *Note que ser completamente metrizável é de fato uma propriedade topológica. Além disso, todo espaço discreto e todo intervalo de $\mathbb{R}$ com a topologia induzida são completamente metrizáveis. Assim, para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, os espaços topológicos $\mathbb{R}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ e $\{a\}$ com suas topologias* *induzidas são todos completamente metrizáveis. Além disso, como* $(0,1)$ *é um subespaço completamente metrizável de* $\mathbb{R}$ *que não é um subconjunto fechado, vemos que a Proposição 2.156 (ii) não seria verdadeira se "espaço métrico completo" fosse substituído por "completamente metrizável".*

Definição 2.160. *Um espaço topológico é dito* ***separável*** *se possui um subconjunto denso enumerável.*

Exemplo 2.161. *Considere o espaço dos números reais* $\mathbb{R}$ *munido da topologia usual, gerada pela métrica* $d(x,y) = |x-y|$. *Então* $\mathbb{R}$ *é um espaço separável.*
Uma vez que o espaço $\mathbb{R}$ *é separável visto que possui um subconjunto enumerável e denso. O conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$ *é enumerável e satisfaz* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. *Isso acontece porque todo intervalo aberto de* $\mathbb{R}$ *contém pelo menos um número racional. Assim,* $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$, *e portanto concluímos que* $\mathbb{R}$ *é separável, visto que possui um subconjunto enumerável e denso.*

Definição 2.162. *Um espaço topológico* (X,τ) *é dito* ***espaço de Polish*** *se é separável e completamente metrizável.*

Exemplo 2.163. *Seja* $\mathbb{R}$ *munido da topologia usual, gerada pela métrica* $d(x,y) = |x-y|$. *Então* $\mathbb{R}$ *é um espaço de Polish.*
De fato, o espaço $\mathbb{R}$ *é separável, visto que possui um subconjunto enumerável e denso, como o conjunto dos racionais* $\mathbb{Q}$. *Além disso,* $\mathbb{R}$ *é completo com respeito à métrica usual, pois toda sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$ *converge para um ponto de* $\mathbb{R}$. *Assim,* $\mathbb{R}$ *admite uma métrica que gera sua topologia e em relação à qual é completo e separável. Portanto,* $\mathbb{R}$ *é um espaço de Polish.*

Definição 2.164. *Um espaço topológico* (X,τ) *é dito* ***espaço de Souslin*** *se é Hausdorff e imagem contínua de um espaço de Polish.*

Exemplo 2.165. *O intervalo aberto* $(0,1)$ *é um espaço de Souslin. Note que,* $(0,1)$ *é a imagem contínua do espaço de Polish* $\mathbb{R}$ *pela função*

$$f : \mathbb{R} \to (0,1), \qquad f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

que é contínua e sobrejetiva. Assim, (0,1) é um espaço de Souslin, visto que é imagem contínua de um espaço de Polish.

Definição 2.166. *Se A é um subconjunto de um espaço topológico (Y, τ_1) tal que com a topologia induzida τ_2, o espaço (A, τ_2) é um espaço de Souslin, então A é dito um* ***conjunto analítico*** *em (Y, τ_1).*

Exemplo 2.167. *Considere $Y = \mathbb{R}$ munido da topologia usual e o subconjunto $A = (0, 1)$. A topologia induzida em A é a topologia usual dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$, e o espaço (A, τ_2) é um espaço de Souslin, pois A é imagem contínua do espaço de Polish $\mathbb{R}$ pela função $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Assim, $(0, 1)$ é um espaço de Souslin com a topologia induzida. Portanto, A é um conjunto analítico em (Y, τ_1).*

Definição 2.168. *Sejam (X, d) e (Y, d_1) espaços métricos. Então (X, d) é dito* ***isométrico*** *a (Y, d_1) se existe uma aplicação sobrejetiva $f : X \to Y$ tal que para todos x_1 e x_2 em X, $d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$. Tal aplicação f é dita uma* ***isometria****.*

Exemplo 2.169. *Seja d uma métrica qualquer em $\mathbb{R}$ e a um número real positivo. Se d_1 é definida por $d_1(x, y) = a \cdot d(x, y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, então $(\mathbb{R}, d_1)$ é um espaço métrico isométrico a $(\mathbb{R}, d)$.*

Definição 2.170. *Sejam (X, d) e (Y, d_1) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Seja $Z = f(X)$, e d_2 a métrica induzida em Z por d_1. Se $f : (X, d) \to (Z, d_2)$ é uma isometria, então f é dita um* ***imersão isométrica*** *de (X, d) em (Y, d_1).*

Definição 2.171. *Sejam (X, d) e (Y, d_1) espaços métricos e f uma aplicação de X em Y. Se (Y, d_1) é um espaço métrico completo, $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ é um imersão isométrica e $f(X)$ é um subconjunto denso de Y no espaço topológico associado, então (Y, d_1) é dito um* ***completamento*** *de (X, d).*

Proposição 2.172. *Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então (X, d) tem um completamento.*

Demonstração: Começamos dizendo que duas sequências de Cauchy (y_n) e (z_n) em (X, d) são equivalentes se $d(y_n, z_n) \to 0$ em $\mathbb{R}$. Esta é de fato uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva). Seja $\widetilde{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy equivalentes em (X, d). Queremos definir uma métrica em $\widetilde{X}$. Sejam $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ dois pontos quaisquer em $\widetilde{X}$. Considere sequências de Cauchy $(y_n) \in \tilde{y}$ e $(z_n) \in \tilde{z}$. A sequência $(d(y_n, z_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, esta sequência converge para algum número, que denotaremos por $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$.

Para cada $x \in X$, a sequência constante $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy em (X, d) convergindo para x. Seja $\tilde{x}$ a classe de equivalência de todas as sequências de Cauchy que convergem para $x \in X$. Defina o subconjunto Y de $\widetilde{X}$ como $\{\tilde{x} : x \in X\}$. Se d_2 é a métrica em Y induzida por d_1 em $\widetilde{X}$, então a aplicação $f : (X, d) \to (Y, d_2)$, dada por $f(x) = \tilde{x}$, é claramente uma isometria.

Mostremos agora que Y é denso em $\widetilde{X}$. Dado $\varepsilon > 0$ e $z \in \widetilde{X}$, queremos encontrar $\tilde{x} \in Y$ tal que $d_1(z, \tilde{x}) < \varepsilon$. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy na classe de equivalência z. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $d_1(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. A sequência constante $(x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots)$ está na classe $\widetilde{x_{n_0}} \in Y$, e $d_1(\widetilde{x_{n_0}}, z) < \varepsilon$. Portanto, Y é denso em $\widetilde{X}$.

Finalmente, mostremos que $(\widetilde{X}, d_1)$ é completo. Seja (z_n) uma sequência de Cauchy em $\widetilde{X}$. Como Y é denso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\widetilde{x_n} \in Y$ com $d_1(\widetilde{x_n}, z_n) < 1/n$. Mostremos que $(\widetilde{x_n})$ é Cauchy em Y.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_1(z_n, z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n, m > N$. Tome n_1 com $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Para $n, m > n_1 + N$, temos

$$d_1(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_1(\widetilde{x_n}, z_n) + d_1(z_n, z_m) + d_1(z_m, \widetilde{x_m}) < \tfrac{1}{n} + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{m} < \varepsilon.$$

Logo $(\widetilde{x_n})$ é Cauchy em Y, o que implica que (x_n) é Cauchy em (X, d). Portanto $(x_n) \in z$ para algum $z \in \widetilde{X}$. Segue que $\widetilde{x_n} \to z$ e consequentemente $z_n \to z$, completando a demonstração. ∎

Proposição 2.173. *Sejam (A, d_1) e (B, d_2) espaços métricos completos. Seja X um subconjunto de (A, d_1) com métrica induzida d_3, e Y um subconjunto de (B, d_2) com métrica induzida d_4. Além disso, suponha que X é denso em (A, d_1) e Y é denso em (B, d_2). Se existe uma isometria $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$, então existe uma isometria $g : (A, d_1) \to (B, d_2)$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Seja $a \in A$. Como X é denso em (A, d_1), existe uma sequência $x_n \to a$ com cada $x_n \in X$. Logo (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como f é isometria, $(f(x_n))$ é Cauchy em (Y, d_4) e portanto também em (B, d_2). Como (B, d_2) é completo, existe $b \in B$ tal que $f(x_n) \to b$. Definimos $g(a) = b$.

Para mostrar que g está bem definida, devemos verificar que se (z_n) é outra sequência em X convergindo para a, então $f(z_n) \to b$. Isto segue do fato que $d_1(x_n, z_n) \to 0$ e portanto $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

Finalmente, sejam $a_1, a_2 \in A$ com $a_{1n} \to a_1$ e $a_{2n} \to a_2$, onde cada $a_{1n}, a_{2n} \in X$. Então:

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2)).$$

Logo g é de fato uma isometria. ■

Definição 2.174. *Seja $(N, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e d a métrica associada em N. Dizemos que $(N, \|\cdot\|)$ é um* ***espaço de Banach*** *se (N, d) é um espaço métrico completo.*

Exemplo 2.175. *Um exemplo de um espaço de Banach é $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, isto é, o conjunto dos números reais munido da norma valor absoluto.*

2.5.4 Contrações

Agora estudamos funções que reduzem as distâncias entre pontos de um espaço métrico. Tais funções, são de grande relevância na Topologia Geral e na Análise, pois possuem propriedades que garantem estabilidade e convergência. Essas funções são importantes, pois permitem resultados como o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que assegura que toda contração definida em um espaço métrico completo possui exatamente um ponto fixo. Esse teorema é fundamental porque fornece uma ferramenta poderosa para demonstrar a existência e a unicidade de soluções de diversos problemas matemáticos, como equações diferenciais. Além disso, ele exemplifica como propriedades topológicas, como completude e continuidade, interagem para garantir resultados estruturais profundos sobre funções em espaços métricos.

Definição 2.176. *Seja $f : X \to X$ uma função. Então f é dita ser uma* ***contração*** *se existe um número real $r \in (0, 1)$, tal que*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq r.d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in X$.

Proposição 2.177. *Seja f uma contração do espaço métrico (X, d). Então f é uma função contínua.*

Demonstração: Seja $x \in X$ e U um aberto contendo $f(x)$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$

tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Como f é uma contração, existe $r \in (0,1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq r.d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Agora, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{r} > 0$. Então, se $y \in B(x, \delta)$, temos

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{r},$$

logo,

$$d(f(x), f(y)) \leq r.d(x, y) < r.\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

o que implica que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Assim, $y \in B(x, \delta)$ e, portanto, $f(y) \in U$, consequentemente $f(B(x, \delta)) \subseteq U$. Logo, $f^{-1}(U) \supseteq B(x, \delta)$, ou seja, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x e, portanto, é aberto. Com isso, concluimos que f é contínua. ∎

Teorema 2.178. ***(Teorema da Contração ou Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e f uma contração de (X, d) em si mesmo. Então f tem exatamente um ponto fixo.*

Demonstração: Seja x um ponto qualquer em X e considere a sequência

$$(x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f(f(x))), \ldots, f^n(x), \ldots)$$

Defina $a = d(x, f(x))$. Como f é uma contração, existe $r \in (0,1)$ tal que $d(f(x_1), f(x_2)) \leq rd(x_1, x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in X$.

Temos claramente,

$$d(f(x), f^2(x)) \leq rd(x, f(x)) = r.a,$$
$$d(f^2(x), f^3(x)) \leq r^2 d(x, f(x)) = r^2.a,$$

e por indução obtemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq r^k d(x, f(x)) = r^k.a$$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Então

$$d(f^m(x), f^n(x)) = d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x))) \leq r^m d(x, f^{n-m}(x))$$

$$\leq r^m[d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \cdots + d(f^{n-m-1}(x), f^{n-m}(x))]$$

$$\leq r^m d(x, f(x))[1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-m-1}] \leq \frac{r^m a}{1-r}.$$

Como $r < 1$, temos que $(f^n(x))$ é uma sequência de Cauchy. Como (X, d) é completo, existe $z \in X$ tal que $f^n(x) \to z$.

Pela Proposição 2.177, f é contínua e portanto

$$f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z$$

logo z é de fato um ponto fixo de f.

Finalmente, seja t qualquer ponto fixo de f. Então

$$d(t, z) = d(f(t), f(z)) \leq rd(t, z).$$

Como $r < 1$, isto implica $d(t, z) = 0$ e portanto $t = z$, logo f tem apenas um ponto fixo.

■

2.5.5 Espaços de Baire

O interesse desta subseção é estudar os espaços de Baire, enfatizando as noções de completude e, principalmente, densidade, que estão intimamente relacionadas à estrutura desses espaços. O objetivo é compreender como essas propriedades se combinam para descrever comportamentos típicos de conjuntos e funções em contextos topológicos e métricos. Ao longo desta subseção, serão reunidos resultados que conectam completude e densidade, como o Teorema da Categoria de Baire, um dos resultados mais importantes dessa teoria. Esse teorema mostra que, em espaços completos, a interseção contável de abertos densos é ainda densa, uma propriedade fundamental para diversos argumentos de existência e generalidade em análise. Por fim, concluiremos com o Teorema da Aplicação Aberta, que sintetiza algumas dessas ideias e ilustra a importância dos espaços de Baire no estudo de funções contínuas e operadores lineares em espaços topológicos.

Teorema 2.179. ***(Teorema da Categoria de Baire)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ é uma sequência de subconjuntos abertos e densos em X, então o conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ também é denso em X.*

Demonstração: Como X_1 é aberto e denso em X, o conjunto $U \cap X_1$ é um subconjunto aberto não vazio de (X, d). Seja U_1 uma bola aberta com raio no máximo 1, tal que $\overline{U_1} \subset U \cap X_1$.

Definindo, por indução, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, uma bola aberta U_n com raio no máximo $\frac{1}{n}$ tal que $\overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap X_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja x_n qualquer ponto em U_n. Claramente, a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como (X, d) é um espaço métrico completo, essa sequência converge para um ponto $x \in X$.

Observe que, para todo $m \in \mathbb{N}$, todo ponto da sequência (x_n) está no conjunto fechado $\overline{U}_m$, e portanto o ponto limite x também está no conjunto $\overline{U}_m$. Então $x \in \overline{U_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$. Mas como $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \ni x$, isso implica que $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. ■

Definição 2.180. *Seja (X, τ) um espaço topológico qualquer e A um subconjunto qualquer de X. O maior conjunto aberto contido em A é chamado de* ***interior*** *de A e é denotado por Int(A).*

Definição 2.181. *Um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) é dito* ***denso em lugar nenhum*** *se o conjunto $\overline{A}$ tem interior vazio.*

Essas definições nos permitem reformular o Teorema 2.179.

Corolário 2.182. ***(Teorema da Categoria de Baire)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ é uma sequência de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, então para pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\overline{X_n}$ tem interior não vazio, ou seja, X_n não é denso em lugar nenhum.*

Demonstração: Suponha que todo X_n seja denso em lugar nenhum, isto é,

$$\text{Int}(\overline{X_n}) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que o complementar de $\overline{X_n}$, ou seja, $U_n = X \setminus \overline{X_n}$ é um conjunto aberto e denso. Assim, temos uma sequência de conjuntos abertos e densos U_n. Pelo Teorema da Categoria de Baire, como (X,d) é um espaço métrico completo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ é denso em X. Mas observe que,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Como $\overline{X_n} \supseteq X_n$, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Ou seja,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = X \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset.$$

O que é uma contradição, pois o conjunto $\bigcap U_n$ não poderia ser vazio se todos fossem abertos e densos.

■

Definição 2.183. *Um espaço topológico (X,τ) é dito um* ***espaço de Baire*** *se para toda sequência X_n de subconjuntos abertos e densos em X, o conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ também é denso em X.*

Corolário 2.184. *Todo espaço metrizável completo X é um espaço de Baire.*

Demonstração: Para toda sequência $(a_n), n \in \mathbb{N}$ de conjuntos abertos e densos em X, a $\bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$ é densa em X. O que é justamente a Teorema da Categoria de Baire para espaços métricos. ■

Exemplo 2.185. *O espaço topológico $\mathbb{Q}$ não é um espaço de Baire e, portanto, não é completamente metrizável. De fato, observe que o conjunto dos números racionais é enumerável e seja $\mathbb{Q} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Cada um dos conjuntos $X_n = \mathbb{Q} \setminus x_n$ é aberto e denso em $\mathbb{Q}$, no entanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Assim, $\mathbb{Q}$ não possui a propriedade de espaço de Baire.*

Observação 2.186. *Note que, uma vez que tínhamos o Teorema da Categoria de Baire, foi mais difícil provar que $\mathbb{Q}$ não é completamente metrizável do que o resultado mais geral de que $\mathbb{Q}$ não é um espaço de Baire. É uma característica muito interessante e importante não apenas da topologia, mas da matemática em geral, que um resultado mais geral às vezes é mais fácil de provar.*

Definição 2.187. *Seja Y um subconjunto de um espaço topológico (X,τ). Se Y é uma união enumerável de subconjuntos densos em lugar nenhum de X, então Y é dito um conjunto* *de **primeira categoria** ou **magro** em (X,τ). Se Y não é de primeira categoria, diz-se que é um **segunda categoria** em (X,τ).*

Exemplo 2.188. *Considere o espaço topológico $\mathbb{R}$ com a topologia usual. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de primeira categoria, pois é enumerável e pode ser escrito como união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. Por outro lado, o próprio espaço $\mathbb{R}$ é um conjunto de segunda categoria, uma vez que é um espaço métrico completo e, pelo Teorema da Categoria de Baire, não pode ser expresso como união enumerável de conjuntos de primeira categoria.*

O Teorema da Categoria de Baire tem muitas aplicações em análise, mas estas estão fora do nosso estudo de Topologia. No entanto, concluiremos esta subseção com um teorema importante na teoria do espaço de Banach, o Teorema da Aplicação Aberta. Este teorema é uma consequência do Teorema da Categoria de Baire, para isso precisamos de alguns resultados preliminares e alguns conceitos elencados a seguir.

Proposição 2.189. *Se Y é um subconjunto de primeira categoria de um espaço de Baire (X,τ), então o interior de Y é vazio.*

Demonstração: Como Y é de primeira categoria, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, onde cada Y_n, $n \in \mathbb{N}$, é denso em lugar nenhum. Seja $U \in \tau$ tal que $U \subseteq Y$. Então $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}$. Logo, $X \setminus U \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{Y_n})$, e cada um dos conjuntos $X \setminus \overline{Y_n}$ é aberto e denso em (X,τ). Como (X,τ) é de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{Y_n})$ é denso em (X,τ). Assim, o conjunto fechado $X \setminus U$ é denso em (X,τ). Isso implica que $X \setminus U = X$. Portanto, $U = \emptyset$. ■

Corolário 2.190. *Se Y é um subconjunto de primeira categoria de um espaço de Baire (X,τ), então $X \setminus Y$ é um conjunto de segunda categoria.*

Demonstração: Se $X \setminus Y$ fosse de primeira categoria, $X = Y \cup (X \setminus Y)$ também seria, contradizendo a definição de um espaço de Baire. ■

Observação 2.191. *Como $\mathbb{Q}$ é um subconjunto de primeira categoria de $\mathbb{R}$, segue do Corolário 2.190 que o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos irracionais é um conjunto de segunda categoria.*

Definição 2.192. *Seja S um subconjunto de um espaço vetorial real V. O conjunto S é dito **convexo** se para cada $x, y \in S$ e todo número real $0 < \lambda < 1$, o ponto $\lambda x + (1-\lambda)y$ pertence a S.*

Observação 2.193. *Claramente, todo subespaço de um espaço vetorial é convexo. Além disso, em qualquer espaço vetorial normado, toda bola aberta e toda bola fechada são convexas.*

Definição 2.194. *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) espaços topológicos. Uma aplicação $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ é dita uma **aplicação aberta** se para todo subconjunto aberto A de (X, τ), o conjunto $f(A)$ é aberto em (Y, τ_1). A aplicação f é dita ser uma **aplicação fechada** se para todo conjunto fechado B em (X, τ), $f(B)$ é fechado em (Y, τ_1).*

Exemplo 2.195. *Considere a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. A aplicação f é* fechada*, pois a imagem de todo conjunto fechado de $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$. De fato, se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $f(F)$ é fechado por continuidade e pela forma explícita da função. Entretanto, f não é uma aplicação aberta, uma vez que, por exemplo, a imagem do aberto $(-1, 1)$ é o intervalo $[0, 1)$, que não é aberto em $\mathbb{R}$. Por outro lado, a aplicação identidade* $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é simultaneamente aberta e fechada, pois preserva abertos e fechados.*

Proposição 2.196. *Sejam $(N, \|\cdot\|)$ e $(N_1, \|\cdot\|_1)$ espaços vetoriais normados e f uma aplicação linear de N em N_1. Então f é uma aplicação aberta se, e somente se, existe $s > 0$ tal que $f(B_s(0)) \supseteq B_r(0)$, para algum $r > 0$.*

Demonstração: Suponha que f é uma aplicação aberta. Então, como $B_s(0) \subset N$ é aberto para todo $s > 0$, então $f(B_s(0)) \subset N_1$ também é aberto. Como $0 \in f(B_s(0))$ e como $f(B_s(0))$ é um aberto que contém o ponto 0, existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset f(B_s(0))$, isto é, $f(B_s(0)) \supseteq B_r(0)$.

Reciprocamente, suponha que existam constantes $s, r > 0$ tais que:

$$f(B_s(0)) \supseteq B_r(0).$$

Seja $U \subset N$ um aberto arbitrário. Para mostrar que $f(U) \subset N_1$ é aberto, tome $x \in U$ qualquer. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Pela linearidade de f, temos

$$f(B_\varepsilon(x)) = f(x + B_\varepsilon(0)) = f(x) + f(B_\varepsilon(0)).$$

Observamos que

$$f(B_\varepsilon(0)) = \varepsilon f(B_1(0))$$

pois para qualquer $y \in B_1(0)$ temos $\varepsilon y \in B_\varepsilon(0)$.

Da hipótese inicial, usando a linearidade novamente, obtemos:

$$f(B_1(0)) = \frac{1}{s} f(B_s(0)) \supseteq \frac{1}{s} B_r(0) = B_{r/s}(0).$$

Multiplicando ambos os lados por ε,

$$f(B_\varepsilon(0)) \supseteq \varepsilon B_{r/s}(0) = B_{\varepsilon r/s}(0).$$

Portanto

$$f(B_\varepsilon(x))) = f(x) + f(B_\varepsilon(0))) \supseteq f(x) + B_{\varepsilon r/s}(0) = B_{\varepsilon r/s}(f(x))) \subset f(U).$$

Como U é um aberto arbitrário, f é uma aplicação aberta. ■

Teorema 2.197. ***(Teorema da Aplicação Aberta)*** *Sejam $(B, \|\cdot\|)$ e $(B_1, \|\cdot\|_1)$ espaços de Banach e $L : B \to B_1$ uma aplicação linear contínua (no sentido de espaço vetorial) sobrejetora de B em B_1. Então L é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Pela Proposição 2.196, basta mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L(B_N(0)) \supset B_s(0)$, para algum $s > 0$.

Claramente $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(0)$ e como L é sobrejetora, temos

$$B_1 = L(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_n(0)).$$

Como B_1 é um espaço de Banach, pelo Corolário 2.182 do Teorema da Categoria de Baire, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{L(B_N(0))}$ tem interior não vazio. Portanto, existem $z \in B_1$ e $t > 0$ tais que $B_t(z) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$z \in L(B_N(0))$. Como $B_t(z) = B_t(0) + z$, temos

$$B_t(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} - z \subseteq \overline{L(B_N(0))} - L(B_N(0)) \subseteq \overline{L(B_{2N}(0))},$$

o que, pela linearidade de L, implica que $B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.
Seja $w \in B_{t/2}(0)$. Então existe $x_1 \in B_N(0)$ tal que $\|w - L(x_1)\|_1 < \frac{t}{4}$. Note que pela linearidade de L, para cada inteiro $k > 0$,

$$B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} \Rightarrow B_{t/(2k)}(0) \subseteq \overline{L(B_{N/k}(0))}.$$

Assim, existe $x_2 \in B_{N/2}(0)$ tal que

$$\|(w - L(x_1)) - L(x_2)\|_1 = \|w - L(x_1) - L(x_2)\|_1 < \frac{t}{8}.$$

Continuando deste modo, obtemos por indução uma sequência (x_m) com $\|x_m\| < \frac{N}{2^{m-1}}$ e

$$\|w - L(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\|_1 < \frac{t}{2^m}.$$

Como B é completo, a série $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ converge para um limite a. Claramente $\|a\| < 2N$ e pela continuidade de L, temos $w = L(a) \in L(B_{2N}(0))$. Portanto, $B_{t/2}(0) \subseteq L(B_{2N}(0))$ e consequentemente $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$. ■

O seguinte Corolário do Teorema da Aplicação Aberta segue imediatamente e é um caso especial muito importante.

Corolário 2.198. *Uma aplicação linear contínua bijetora de um espaço de Banach em outro espaço de Banach é um homeomorfismo. Em particular, uma aplicação linear contínua bijetora de um espaço de Banach em si mesmo é um homeomorfismo.*

2.6 Compacidade

A compacidade é uma das propriedades mais importantes da topologia, aparecendo de forma recorrente em teoremas fundamentais e em diversas aplicações na análise, na álgebra e na geometria. Muitos autores destacam que compreender a compacidade é essencial para compreender a própria topologia, pois ela generaliza a noção de finitude e garante resultados profundos relacionados à continuidade, à convergência e à existência de soluções em diferentes contextos matemáticos. Nesta seção, apresentamos as definições e os principais resultados, como o Teorema de Heine-Borel, que caracterizam os espaços compactos, destacando sua importância teórica e suas consequências práticas. O estudo da compacidade servirá como culminação desta etapa da Topologia Geral, preparando o caminho para o capítulo seguinte, dedicado à Topologia Produto, onde a compacidade desempenha um papel central na formulação e demonstração de resultados que veremos neste trabalho.

2.6.1 Espaços Compactos

Nesta subseção, definimos formalmente os espaços compactos, explorando exemplos e propriedades fundamentais. A compacidade constitui uma das noções mais poderosas da topologia, pois garante a existência de limites e de diversas propriedades estruturais que tornam o estudo dos espaços topológicos mais abrangente.

Definição 2.199. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então diz-se que A é **compacto** se, para todo conjunto I e toda família de conjuntos abertos, O_i, $i \in I$, tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, existe uma subfamília finita $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_n}$ tal que $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.*

Exemplo 2.200. *Se $(X, \tau) = \mathbb{R}$ e $A = (0, \infty)$, então A não é compacto.*
De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja O_i o intervalo aberto $(0, i)$. Então, claramente, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. Mas não existem $i_1, i_2, \ldots i_n$ tais que $A \subseteq (0, i_1) \cup (0, i_2) \cup \cdots \cup (0, i_n)$. Portanto, A não é compacto.

Exemplo 2.201. *Seja (X, τ) um espaço topológico qualquer e $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um subconjunto finito qualquer de (X, τ). Então A é compacto.*
Com efeito, seja O_i, $i \in I$, uma família qualquer de conjuntos abertos tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Então, para cada $x_j \in A$, existe um O_{i_j}, tal que $x_j \in O_{i_j}$. Assim, $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$. Logo, A é compacto.

Observação 2.202. *Vemos, portanto, a partir do Exemplo 2.201, que todo conjunto finito em um espaço topológico é compacto. Com efeito, a "Compacidade" pode ser pensada como uma generalização topológica da "finitude".*

Exemplo 2.203. *Um subconjunto A de um espaço discreto (X, τ) é compacto se e somente se for finito.*
De fato, se A é finito, então o Exemplo 2.201 mostra que é compacto.
Reciprocamente, seja A compacto. Então a família de conjuntos unitários $O_x = \{x\}, x \in A$ é tal que cada O_x é aberto e $A \subseteq \bigcup_{x \in A} O_x$. Como A é compacto, existem $O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}$ tais que $A \subseteq O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_n}$; isto é, $A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Logo, A é um conjunto finito.

Claramente, se todos os conjuntos compactos fossem finitos, então o estudo da "Compacidade" não seria interessante. No entanto, veremos em breve que, por exemplo, todo intervalo fechado $[a, b]$ é compacto. Primeiramente, introduzimos um pouco de terminologia.

Definição 2.204. *Seja I um conjunto e $O_i, i \in I$, uma família de conjuntos abertos num espaço topológico (X, τ). Seja A um subconjunto de (X, τ). Então $O_i, i \in I$, diz-se uma* ***cobertura aberta*** *de A se $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Uma subfamília finita, $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_n}$, de O_i, $i \in I$ é chamada uma* ***subcobertura finita*** *(de A) se $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.*

Assim, podemos reformular a definição de Compacidade da seguinte forma:

Definição 2.205. *Um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) diz-se* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de A tem uma subcobertura finita. Se o subconjunto compacto A é igual a X, então (X, τ) diz-se um* ***espaço compacto****.*

Proposição 2.206. *O intervalo fechado $[0, 1]$ é compacto.*

Demonstração: Seja O_i, $i \in I$ uma cobertura aberta qualquer de $[0, 1]$. Então, para cada $x \in [0, 1]$, existe um O_i tal que $x \in O_i$. Como O_i é aberto contendo x, existe um intervalo U_x, aberto em $[0, 1]$, tal que $x \in U_x \subseteq O_i$.
Agora defina um subconjunto S de $[0, 1]$ como,

$$S = \{z : [0, z] \text{ pode ser coberto por um número finito dos conjuntos } U_x\}.$$

Portanto, $z \in S \Rightarrow [0, z] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, para alguns $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Agora, seja $x \in S$ e $y \in U_x$. Então, como U_x é um intervalo contendo x e y, $[x, y] \subseteq U_x$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $x \leq y$. Logo,

$$[0, y] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n} \cup U_x$$

e, portanto, $y \in S$. Assim, para cada $x \in [0,1]$, $U_x \cap S = U_x$ ou $\emptyset$. Isso implica que

$$S = \bigcup_{x \in S} U_x \text{ e } [0,1] \setminus S = \bigcup_{x \notin S} U_x.$$

Portanto, S é aberto em $[0,1]$ e S é fechado em $[0,1]$. Mas $[0,1]$ é conexo. Logo, $S = [0,1]$ ou $\emptyset$. No entanto, $0 \in S$ e, assim, $S = [0,1]$, isto é, $[0,1]$ pode ser coberto por um número finito de U_x. Então, $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Mas cada U_{x_i} está contido em algum O_i, $i \in I$. Portanto, $[0,1] \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_m}$ e assim concluímos que $[0,1]$ é compacto.
■

2.6.2 O Teorema de Heine-Borel

Nesta subseção, apresentamos o Teorema de Heine–Borel, um dos resultados mais importantes relacionados à compacidade, pois ele fornece uma caracterização precisa dos subconjuntos compactos do espaço euclidiano, estabelecendo as condições de fechamento e limitação como critérios equivalentes à compacidade. Para prosseguirmos iremos precisar enunciar alguns resultados preliminares.

Proposição 2.207. *Seja $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau_1)$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se (X,τ) é compacto, então (Y,τ_1) é compacto.*

Demonstração: Seja O_i, $i \in I$, uma cobertura aberta qualquer de Y; isto é, $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Então $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i)$; isto é, $X \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$. Logo, $f^{-1}(O_i)$, $i \in I$, é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existem $i_1, i_2, \ldots, i_n$ em I tais que

$$X \subseteq f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{i_n}).$$

$$\begin{aligned} \text{Assim,} \quad Y &= f(X) \\ &\subseteq f\left(f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{i_n})\right) \\ &= f(f^{-1}(O_{i_1})) \cup f(f^{-1}(O_{i_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(O_{i_n})) \\ &= O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}, \quad \text{pois } f \text{ é sobrejetora.} \end{aligned}$$

Portanto, temos $Y \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$; isto é, Y é coberto por um número finito de O_i. Logo, Y é compacto. ■

Corolário 2.208. *Sejam (X,τ) e (Y,τ_1) espaços topológicos homeomorfos. Se (X,τ) é compacto, então (Y,τ_1) é compacto.*

Demonstração: É uma consequêcia direta da Proposição 2.207, como são homeomorfos, em particular temos uma aplicação contínua e sobrejetora. ■

Corolário 2.209. *Para a e b em $\mathbb{R}$ com $a < b$, $[a,b]$ é compacto enquanto (a,b) não é compacto.*

Demonstração: O espaço $[a,b]$ é homeomorfo ao espaço compacto $[0,1]$ e, portanto, pelo Corolário 2.208, é compacto.
O espaço (a,b) é homeomorfo a $(0,\infty)$. Se (a,b) fosse compacto, então $(0,\infty)$ seria compacto, mas vimos no Exemplo 2.200 que $(0,\infty)$ não é compacto. Logo, (a,b) não é compacto. ■

Proposição 2.210. *Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração: Seja A um subconjunto fechado de um espaço compacto (X,τ). Seja $U_i \in \tau, i \in I$, uma cobertura aberta qualquer de A. Então

$$X \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cup (X \setminus A),$$

isto é, U_i, com $i \in I$, juntamente com o conjunto aberto $X \setminus A$, formam uma cobertura aberta de X. Portanto, existe uma subcobertura finita $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}, X \setminus A$.
Assim,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A).$$

Portanto,

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A),$$

o que implica

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k}$$

uma vez que $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Logo, A tem uma subcobertura finita e, portanto, é compacto. ■

Proposição 2.211. *Um subconjunto compacto de um espaço topológico de Hausdorff é fechado.*

Demonstração: Seja A um subconjunto compacto do espaço de Hausdorff (X, τ). Seja $p \in X \setminus A$. Então, para cada $a \in A$, existem conjuntos abertos U_a e V_a tais que $a \in U_a$, $p \in V_a$ e $U_a \cap V_a = \emptyset$. Então $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Como A é compacto, existem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em A tais que

$$A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}.$$

Defina $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ e $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}$. Então $p \in V$ e $V_a \cap U_a = \emptyset$ o que implica que $V \cap U = \emptyset$, que por sua vez implica $V \cap A = \emptyset$. Logo, p não é um ponto de acumulação de A, e V é um conjunto aberto contendo p que não intersecta A. Portanto, A contém todos os seus pontos de acumulação e é, assim, fechado. ■

Corolário 2.212. *Um subconjunto compacto de um espaço metrizável é fechado.*

Demonstração: Segue como consequência direta da Proposição 2.211, visto que pela Proposição 2.134 um espaço metrizável é um espaço de Hausdorff. ■

Exemplo 2.213. *Para a e b em $\mathbb{R}$ com $a < b$, os intervalos $[a, b)$ e $(a, b]$ não são compactos, pois não são subconjuntos fechados do espaço metrizável $\mathbb{R}$.*

Proposição 2.214. *Um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ é limitado.*

Demonstração: Suponha por contradição que $A \subseteq \mathbb{R}$ seja compacto, porém ilimitado. Então $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$, mas $\{(-n, n) : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ não possui nenhuma subcobertura finita de A, pois A é ilimitado. Portanto, A não é compacto, o que é uma contradição. Logo, todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ são limitados. ■

Teorema 2.215. ***(Teorema de Heine-Borel)*** *Todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração: Se A é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$, então $A \subseteq [a, b]$, para alguns a e b em $\mathbb{R}$. Como $[a, b]$ é compacto e A é um subconjunto fechado, A é compacto.
■

Proposição 2.216. ***(Recíproca do Teorema de Heine-Borel)*** *Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ é fechado e limitado.*

Demonstração: Isto segue imediatamente das Proposições 2.211 e 2.214. ■

Definição 2.217. *Um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) diz-se **limitado** se existe um número real r tal que $d(a_1, a_2) \leq r$, para todos a_1 e a_2 em A.*

Proposição 2.218. *Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d). Então A é fechado e limitado.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.212, A é um conjunto fechado. Agora fixe $x_0 \in X$ e defina a função $f : (A, \tau) \to \mathbb{R}$ por

$$f(a) = d(a, x_0), \quad \text{para todo } a \in A,$$

em que τ é a topologia induzida em A. Então f é contínua e, portanto, pela Proposição 2.207, $f(A)$ é compacto. Assim, pela Proposição 2.216, $f(A)$ é limitado, isto é, existe um número real M tal que

$$f(a) \leq M, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Logo, $d(a, x_0) \leq M$, para todo $a \in A$. Tomando $r = 2M$, vemos pela desigualdade triangular que $d(a_1, a_2) \leq r$, para todos a_1 e a_2 em A. ■

Proposição 2.219. *Seja (X, τ) um espaço compacto e $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ contínua. Então o conjunto $f(X)$ tem um elemento máximo e um elemento mínimo.*

Demonstração: Como f é contínua, $f(X)$ é compacto. Portanto, $f(X)$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Além disso, por $f(X)$ ser limitado admite um supremo. Como $f(X)$ é fechado, o Lema 2.72 implica que o supremo pertence a $f(X)$. Assim, $f(X)$ tem um elemento máximo ou seja, seu supremo. Da maneira análoga, $f(X)$ tem um elemento mínimo. ■

Proposição 2.220. *Sejam a e b em $\mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então $f([a, b]) = [c, d]$, para alguns c e d em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Como $[a, b]$ é conexo, $f([a, b])$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ e, portanto, é um intervalo. Por $[a, b]$ ser compacto, $f([a, b])$ é compacto. Logo, $f([a, b])$ é um intervalo fechado e limitado. Assim,

$$f([a, b]) = [c, d]$$

para alguns c e d em $\mathbb{R}$. ■

Encerramos, assim, o estudo da Topologia Geral, no qual foram introduzidos os conceitos fundamentais que sustentam toda a estrutura topológica : continuidade, homeomorfimo, compacidade, conexidade e propriedades relacionadas à completude e densidade. Esses resultados formam a base para compreendermos construções mais complexas, como a Topologia Produto, que é justamente o que abordaremos no próximo capítulo, onde investigaremos como as propriedades estudadas se comportam e se preservam em produtos de espaços topológicos.

Capítulo 3

Topologia Produto

Este capítulo tem por objetivo estudar a Topologia Produto. Após o estudo dos fundamentos da Topologia Geral, realizado no capítulo anterior, voltamo-nos agora para compreender como se comportam a Topologia e a Compacidade quando tratamos de produtos de espaços topológicos.

Nosso objetivo é analisar a formação da Topologia Produto, tanto no caso de produtos finitos quanto no de produtos infinitos enumeráveis, observando como suas propriedades se manifestam em cada situação. Assim, este capítulo está dividido nessas duas partes, buscando compreender de forma mais ampla o comportamento topológico dessas construções.

3.1 Produtos Finitos

O objetivo principal desta seção é estudar a Topologia Produto para produtos finitos, isto é, compreender como se define uma topologia sobre o produto cartesiano de um número finito de espaços topológicos. Além disso, será analisado o comportamento da Compacidade nesse contexto, observando de que forma essa propriedade se manifesta e é preservada em produtos finitos.

O resultado central desta seção é o Teorema de Tychonoff para produtos finitos, que possibilita estabelecer uma generalização do Teorema de Heine–Borel sob uma perspectiva topológica. Esse resultado é fundamental para compreender a relação entre topologia e Compacidade em construções de produtos, preparando o caminho para o estudo da Compacidade em produtos infinitos enumeráveis, que será abordado na próxima seção.

3.1.1 A Topologia Produto para Produto Finitos

Definimos a Topologia Produto para a combinação de espaços topológicos, descrevendo como abertos no produto são determinados pelos abertos em cada fator. Essa construção é fundamental para estudar propriedades topológicas de produtos de espaços.
Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são conjuntos, então o produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é o conjunto consistindo de todas as n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, no qual $x_i \in X_i$, $i = 1, \cdots, n$.
O problema que discutimos agora é:
Dados os espaços topológicos (X_1, τ_1), $(X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ como definimos uma topologia razoável τ no conjunto produto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$?
Um candidato intuitivo (mas incorreto!) para τ é o conjunto de todos os conjuntos $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$, onde $O_i \in \tau_i$, $i = 1, \cdots, n$. Infelizmente, isto não é uma topologia.

Exemplo 3.1. *Considere $n = 2$ e $(X, \tau_1) = (X, \tau_2) = \mathbb{R}$, então τ conteria os retângulos $(0,1) \times (0,1)$ e $(2,3) \times (2,3)$ mas não o conjunto $[(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)]$, pois este não é $O_1 \times O_2$ para qualquer escolha de O_1 e O_2.*
Se fosse $O_1 \times O_2$ para algum O_1 e O_2, então $\frac{1}{2} \in (0,1) \subseteq O_1$ e $2\frac{1}{2} \in (2,3) \subseteq O_2$ e então o par ordenado $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \in O_1 \times O_2$ mas $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \notin [(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)]$. Assim, τ não é fechada sob uniões e portanto não é uma topologia.

Definição 3.2. *Sejam (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), $\cdots$, (X_n, τ_n) espaços topológicos. Então a **Topologia Produto** τ no conjunto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é a topologia que tem a família $\{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n,\ \text{com } O_i \in \tau_i, i = 1, \cdots, n\}$ como uma base. O conjunto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ com a topologia τ é dito ser o produto dos espaços (X_1, τ_1), $(X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ e é denotado por $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$ ou $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \cdots \times (X_n, \tau_n)$.*

Proposição 3.3. *Sejam $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ bases para os espaços topológicos $(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n)$, respectivamente. Então a família $\{O_1 \times \cdots \times O_n; O_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \cdots, n\}$ é uma base para a Topologia Produto em $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Demonstração: Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um ponto arbitrário do espaço produto. Para cada coordenada $x_i \in X_i$, como B_i é uma base para τ_i, existe pelo menos um conjunto aberto $O_i \in B_i$ tal que $x_i \in O_i$. Portanto, o produto cartesiano $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$

pertence a $\mathcal{B}$ pela definição da família $\mathcal{B}$, e temos que:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n.$$

Sejam $A = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ e $A' = O'_1 \times O'_2 \times \cdots \times O'_n$ dois elementos arbitrários de $\mathcal{B}$, e seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um ponto em sua interseção $A \cap A'$. Para cada índice $i = 1, \cdots, n$, temos que $x_i \in O_i \cap O'_i$. Como B_i é uma base para τ_i, existe um conjunto $W_i \in B_i$ tal que,

$$x_i \in W_i \subseteq O_i \cap O'_i.$$

Defina agora o conjunto $W = W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n$. Pela definição de $\mathcal{B}$, temos que $W \in \mathcal{B}$. Além disso, para cada i, $x_i \in W_i$, logo $x \in W$. E também para cada i, $W_i \subseteq O_i \cap O'_i$, logo $W \subseteq O_1 \times \cdots \times O_n = A$ e $W \subseteq O'_1 \times \cdots \times O'_n = A'$, portanto $W \subseteq A \cap A'$. Assim, encontramos $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq A \cap A'$.

Seja $\tau_{\mathcal{B}}$ a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$, e seja τ a Topologia Produto usual. Devemos mostrar que $\tau_{\mathcal{B}} = \tau$. Primeiro, note que todo elemento de $\mathcal{B}$ é da forma $O_1 \times \cdots \times O_n$ com $O_i \in \mathcal{B}_i \subseteq \tau_i$. Portanto, cada elemento de $\mathcal{B}$ é um aberto básico da Topologia Produto, ou seja, $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Como $\tau_{\mathcal{B}}$ é a topologia gerada por $\mathcal{B}$, segue que $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$.

Agora, seja U um aberto básico da Topologia Produto τ. Então U pode ser escrito como

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n,$$

no qual $U_i \in \tau_i$ para cada i. Como cada $\mathcal{B}_i$ é uma base para τ_i, podemos escrever cada U_i como uma união de elementos de $\mathcal{B}_i$,

$$U_i = \bigcup_{\alpha \in I_i} O_{i,\alpha}, \quad \text{com } O_{i,\alpha} \in \mathcal{B}_i.$$

Portanto, temos,

$$U = \bigcup_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n} O_{1,\alpha_1} \times O_{2,\alpha_2} \times \cdots \times O_{n,\alpha_n}.$$

Cada conjunto $O_{1,\alpha_1} \times \cdots \times O_{n,\alpha_n}$ pertence a $\mathcal{B}$, logo U é uma união de elementos de $\mathcal{B}$ e, portanto, $U \in \tau_{\mathcal{B}}$. Como os abertos básicos geram a topologia, concluímos que $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. Das duas inclusões, segue que $\tau_{\mathcal{B}} = \tau$, ou seja, $\mathcal{B}$ é de fato uma base para a Topologia

Produto. ■

Observação 3.4. *(i) Podemos concluir que a topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é justamente a Topologia Produto no conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.*
(ii) Qualquer produto de conjuntos abertos é um conjunto aberto ou mais precisamente, se $O_1, O_2, \cdots, O_n$ são subconjuntos abertos dos espaços topológicos $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$, respectivamente, então $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ é um subconjunto aberto de $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \cdots \times (X_n, \tau_n)$.

Lema 3.5. *Sejam C_1 e C_2 subconjuntos fechados dos espaços topológicos (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2), respectivamente. Então $C_1 \times C_2$ é um subconjunto fechado do espaço produto $(X_1 \times X_2, \tau)$.*

Demonstração: Observe que $(X_1 \times X_2) \setminus (C_1 \times C_2) = (X_1 \setminus C_1) \times X_2 \,\cup\, X_1 \times (X_2 \setminus C_2)$. Como C_1 e C_2 são fechados, seus complementos $X_1 \setminus C_1$ e $X_2 \setminus C_2$ são abertos. Além disso, na topologia produto, o produto de abertos é aberto. Logo $(X_1 \setminus C_1) \times X_2$ e $X_1 \times (X_2 \setminus C_2)$ são abertos em $X_1 \times X_2$. A união desses dois conjuntos abertos é aberta, portanto $(X_1 \times X_2) \setminus (C_1 \times C_2)$ é aberto. Assim, $C_1 \times C_2$ é fechado em $X_1 \times X_2$. ■

Proposição 3.6. *Sejam $C_1, C_2, \cdots, C_n$ subconjuntos fechados dos espaços topológicos $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$, respectivamente. Então $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$ é um subconjunto fechado do espaço produto $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$.*

Demonstração: Note que,
$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \setminus (C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n) = [(X_1 \setminus C_1) \times X_2 \times \cdots \times X_n] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus C_2) \times X_3 \times \cdots \times X_n] \cup \cdots \cup [X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus C_n)]$ que é uma união de conjuntos abertos (pois um produto de conjuntos abertos é aberto) e portanto é um conjunto aberto em $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \cdots \times (X_n, \tau_n)$. Logo, seu complemento, $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$, é um conjunto fechado. ■

3.1.2 Projeções nos Fatores de um Produto

Nesta subseção, estudamos as projeções associadas a um produto de espaços topológicos, que relacionam cada ponto do produto com suas coordenadas em cada fator. Essas aplicações são fundamentais para a definição da Topologia Produto, pois é a partir delas que se determina quais conjuntos devem ser considerados abertos no produto, assegurando que as propriedades topológicas dos fatores sejam refletidas adequadamente no espaço resultante.

Definição 3.7. *Sejam τ_1 e τ_2 topologias em um conjunto X. Então τ_1 é dita ser uma topologia mais fina que τ_2 (e τ_2 é dita ser uma topologia mais grossa que τ_1) se $\tau_1 \supseteq \tau_2$.*

Exemplo 3.8. *Seja $X = \{a, b\}; \tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ e $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$. Aqui, τ_1 é mais fina que τ_2.*

Proposição 3.9. *Sejam $(X, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ espaços topológicos e $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$ seu espaço produto. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, seja $p_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$ a aplicação projeção; isto é, $p_i((x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) = x_i$, para cada $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Então*

(i) cada p_i é uma aplicação contínua, sobrejetora e aberta, e

(ii) τ é a topologia mais grossa no conjunto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ tal que cada p_i é contínua.

Demonstração: (i) Note que p_i é sobrejetora, pois, dado qualquer $x_i \in X_i$, basta escolher elementos arbitrários $x_j \in X_j$ para $j \neq i$ e fixar $x_i \in X_i$. Assim, o ponto $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ satisfaz $p_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$. Logo, todo elemento de X_i é imagem de algum ponto do produto, e portanto p_i é sobrejetora. Agora seja U um conjunto aberto em (X_i, τ_i). Então

$$p_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

que é um produto de conjuntos abertos e portanto é aberto em $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$. Logo, cada p_i é contínua.
Note que para cada conjunto básico aberto $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, no qual U_j é aberto em (X_j, τ_j), para $j = 1, \cdots, n$, o conjunto $p_i(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) = U_i$ é aberto em (X_i, τ_i). Então cada p_i é uma aplicação aberta.
(ii) Agora, seja τ' qualquer topologia no conjunto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ tal que cada aplicação projeção $p_i : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ é contínua. Temos que mostrar que $\tau' \supseteq \tau$. Seja $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \tau$. Observe que como p_i é contínua, $p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Assim

$$p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n,$$

de modo que

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n.$$

Então $p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$ para $i = 1, \cdots, n$, implica $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$; isto é, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \tau'$. ■

Corolário 3.10. *Para $n \geq 2$, as aplicações projeções de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ são aplicações contínuas e abertas.*

Observação 3.11. *A Proposição 3.9 (ii) nos dá outra maneira de definir a Topologia Produto. Dados os espaços topológicos (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), ..., (X_n, τ_n) a Topologia Produto pode ser definida como a topologia mais grossa em $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ tal que cada projeção $p_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$ é contínua.*

Proposição 3.12. *Sejam $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ espaços topológicos e $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$ o espaço produto. Então cada (X_i, τ_i) é homeomorfo a um subespaço de $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$.*

Demonstração: Para cada j, seja a_j qualquer elemento fixo em X_j. Para cada i, defina uma aplicação $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau)$ por

$$f_i(x) = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

Afirmamos que $f_i : (X_i, \tau_i) \to (f_i(X_i), \tau')$ é um homeomorfismo, na qual τ' é a topologia induzida em $f_i(X_i)$ por τ. A aplicação $f_i : X_i \to f_i(X_i)$ é bijetora. De fato, se $f_i(x) = f_i(y)$, então $(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \cdots, a_n)$, o que implica $x = y$, logo f_i é injetora. Além disso, dado qualquer elemento de $f_i(X_i)$, ele possui a forma $(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ para algum $x \in X_i$, de modo que f_i é sobrejetora. Assim, f_i é bijetora.

Seja $U \in \tau_i$. Então

$$f_i(U) = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times U \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}$$

$$= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap (\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\})$$

$$= (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n) \cap f_i(X_i) \in \tau'$$

dado que $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \in \tau$. Logo, $U \in \tau_i$ implica que $f_i(U) \in \tau'$. Agora vamos mostrar que f é contínua. Para isto observe que a família

$$\{(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i(X_i) : U_i \in \tau_i, i = 1, \cdots, n\}$$

é uma base para τ'. Mas

$$f_i^{-1}\left((U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i(X_i)\right) = f_i^{-1}(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) \cap f_i^{-1}(f_i(X_i))$$

$$= \begin{cases} U_i \cap X_i, & \text{se } a_j \in U_j, j \neq i \\ \emptyset, & \text{se } a_j \notin U_j, \text{para algum } j \neq i. \end{cases}$$

Como $U_i \cap X_i = U_i \in \tau_i$ e $\emptyset \in \tau_i$, concluímos que f_i é contínua. ■

Notação: Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são conjuntos, então o produto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é denotado por $\prod_{i=1}^n X_i$. Se $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ são espaços topológicos, então o espaço produto $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \cdots \times (X_n, \tau_n)$ é denotado por $\prod_{i=1}^n (X_i, \tau_i)$.

3.1.3 O Teorema de Tychonoff para Produtos Finitos

Agora já vimos todos os resultados que vimos sobre compacidade necessários para aplicá-los na Topologia Produto. A partir disto conseguimos usar os conceitos que exploramos para entender como a compacidade se comporta em produtos de espaços topológicos. Começamos pelo caso dos produtos finitos, enunciando e demonstrando o Teorema de Tychonoff, que é o resultado principal desta seção. Esse teorema também prepara o caminho para o estudo dos produtos infinitos, onde a ideia de compacidade se torna ainda mais rica e geral.

Teorema 3.13. ***(Teorema de Tychonoff para Produtos Finitos)*** *Se (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), ..., (X_n, τ_n) são espaços compactos, então $\prod_{i=1}^n (X_i, \tau_i)$ é um espaço compacto.*

Demonstração: Considere primeiro o produto de dois espaços compactos (X, τ_1) e (Y, τ_2). Seja U_i, $i \in I$ qualquer cobertura aberta de $X \times Y$. Então para cada $x \in X$ e $y \in Y$, existe um $i \in I$ tal que $(x, y) \in U_i$. Logo, existe um conjunto aberto básico $V(x, y) \times W(x, y)$, tal que $V(x, y) \in \tau_1$, $W(x, y) \in \tau_2$ e $(x, y) \in V(x, y) \times W(x, y) \subseteq U_i$.
À medida que (x, y) percorre todos os pontos de $X \times Y$ obtemos uma cobertura aberta

$V(x,y)\times W(x,y)$, $x \in X, y \in Y$, de $X \times Y$ tal que cada $V(x,y)\times W(x,y)$ é um subconjunto de algum U_i, $i \in I$. Assim, para provar que $(X,\tau_1)\times(Y,\tau_2)$ é compacto, basta encontrar uma subcobertura finita da cobertura aberta $V(x,y)\times W(x,y)$, $x \in X, y \in Y$.

Agora, fixe $x_0 \in X$ e considere o subespaço $\{x_0\}\times Y$ de $X \times Y$. Como visto na Proposição 3.12, este subespaço é homeomorfo a (Y,τ_2) e portanto é compacto. Como $V(x_0,y)\times W(x_0,y)$, $y \in Y$, é uma cobertura aberta de $\{x_0\}\times Y$, ela tem uma subcobertura finita,

$$V(x_0,y_1)\times W(x_0,y_1), \quad V(x_0,y_2)\times W(x_0,y_2), \cdots, V(x_0,y_m)\times W(x_0,y_m).$$

Coloque $V(x_0) = V(x_0,y_1)\cap V(x_0,y_2)\cap\cdots\cap V(x_0,y_m)$. Então vemos que o conjunto $V(x_0)\times Y$ está contido na união de um número finito de conjuntos da forma $V(x_0,y)\times W(x_0,y)$, $y \in Y$.

Assim, para provar que $X \times Y$ é compacto, basta mostrar que $X \times Y$ está contido em uma união finita de conjuntos da forma $V(x)\times Y$. Como cada $V(x)$ é um conjunto aberto contendo $x \in X$, a família $V(x)$, $x \in X$, é uma cobertura aberta do espaço compacto (X,τ_1). Portanto, existem $x_1, x_2, \cdots, x_k$ tais que $X \subseteq V(x_1)\cup V(x_2)\cup\cdots V(x_k)$. Logo, $X \times Y \subseteq (V(x_1)\times Y)\cup(V(x_2)\times Y)\cup\cdots\cup(V(x_k)\times Y)$. Portanto, $(X,\tau_1)\times(Y,\tau_2)$ é compacto. ■

Proposição 3.14. ***(Recíproca do Teorema de Tychonoff)*** *Sejam $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$, $\cdots,(X_n,\tau_n)$ espaços topológicos. Se $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ é compacto, então cada (X_i,τ_i) é compacto.*

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 2.207 e da Proposição 3.9 (i). ■

Teorema 3.15. ***(Generalização do Teorema de Heine-Borel)*** *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$, é compacto se e somente se for fechado e limitado.*

Demonstração: Note que, para provar que qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ é limitado podemos proceder de maneira análoga à Proposição 2.214. Assim, pela Proposição 2.211, qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ é fechado e limitado.

Reciprocamente, seja S um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, S é um subconjunto fechado do produto:

$$\overbrace{[-M,M]\times[-M,M]\times\cdots\times[-M,M]}^{n \text{ termos}}$$

para algum número real positivo M. Como cada intervalo fechado $[-M, M]$ é compacto, pelo Corolário 2.209, o Teorema de Tychonoff implica que o espaço produto

$$[-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$$

também é compacto. Como S é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, ele também é compacto. ■

Exemplo 3.16. *Defina o subespaço* $\mathbb{S}^1$ *de* $\mathbb{R}^2$ *por:*

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Então, $\mathbb{S}^1$ *é um subconjunto fechado e limitado de* $\mathbb{R}^2$ *e, portanto, é compacto.*
Da mesma forma, definimos a n-esfera $\mathbb{S}^n$ *como o subespaço de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dado por*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Então, $\mathbb{S}^n$ *é um subconjunto fechado e limitado de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e, portanto, é compacto.*

3.1.4 Produtos e Conexidade

Nesta subseção, estudamos como a conexidade se comporta em produtos de espaços topológicos. Nosso interesse é entender de que forma a conexidade entre os fatores se reflete no espaço produto e como resultados já conhecidos podem ser aplicados nesse novo contexto. Assim como na compacidade, veremos que certas propriedades de cada fator garantem a conexidade do produto, permitindo estender o que foi desenvolvido anteriormente para uma situação mais geral.

Definição 3.17. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e seja* x *um ponto qualquer em* X*. A* ***componente*** *em* X *de* x*,* $C_X(x)$*, define-se como a união de todos os subconjuntos conexos de* X *que contêm* x*.*

Proposição 3.18. *Seja* x *um ponto qualquer num espaço topológico* (X, τ)*. Então* $C_X(x)$ *é conexo.*

Demonstração: Seja $\{C_i : i \in I\}$ a família de todos os subconjuntos conexos de (X, τ) que contêm x. Note-se que $\{x\} \in \{C_i : i \in I\}$. Então $C_X(x) = \bigcup_{i \in I} C_i$.

Seja O um subconjunto de $C_X(x)$ que é simultaneamente aberto e fechado na topologia induzida em $C_X(x)$ por τ. Então $O \cap C_i$ é simultaneamente aberto e fechado na topologia induzida em C_i, para cada i. Mas como cada C_i é conexo, $O \cap C_i = C_i$ ou $\emptyset$, para cada i. Se $O \cap C_j = C_j$ para algum $j \in I$, então $x \in O$. Logo, neste caso, $O \cap C_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$, uma vez que cada C_i contém x. Portanto, $O \cap C_i = C_i$, para todo $i \in I$, ou $O \cap C_i = \emptyset$, para todo $i \in I$; isto é, $O = C_X(x)$ ou $O = \emptyset$.

Assim, $C_X(x)$ não tem nenhum subconjunto próprio não vazio que seja simultaneamente aberto e fechado e, portanto, é conexo. ■

Observação 3.19. *Vemos pela Definição 3.17 e pela Proposição 3.18 que $C_X(x)$ é o maior subconjunto conexo de X que contém x.*

Lema 3.20. *Sejam a e b pontos num espaço topológico (X, τ). Se existir um conjunto conexo C contendo ambos a e b, então $C_X(a) = C_X(b)$.*

Demonstração: Pela Definição 3.17, $C_X(a) \supseteq C$ e $C_X(b) \supseteq C$. Portanto, $a \in C_X(b)$.

Pela Proposição 3.18, $C_X(b)$ é conexo e, assim, é um conjunto conexo contendo a. Logo, pela Definição 3.17, $C_X(a) \supseteq C_X(b)$.

Analogamente, $C_X(b) \supseteq C_X(a)$, e portanto, $C_X(a) = C_X(b)$. ■

Proposição 3.21. *Sejam $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ espaços topológicos. Então $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ é conexo se, e somente se, cada (X_i, τ_i) é conexo.*

Demonstração: Sejam então (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços conexos e (x_0, y_0) um ponto qualquer no espaço produto $(X \times Y, \tau)$. Seja (x_1, y_1) qualquer outro ponto em $X \times Y$. Então o subespaço $\{x_0\} \times Y$ de $(X \times Y, \tau)$ é homeomorfo ao espaço conexo (Y, τ_2) e, portanto, é conexo.

Analogamente, o subespaço $X \times \{y_1\}$ é conexo. Além disso, (x_0, y_1) pertence ao espaço conexo $\{x_0\} \times Y$, logo

$$C_{X\times Y}((x_0, y_1)) \supseteq \{x_0\} \times Y \ni (x_0, y_0),$$

enquanto $(x_0, y_1) \in X \times \{y_1\}$, e assim

$$C_{X\times Y}((x_0, y_1)) \supseteq X \times \{y_1\} \ni (x_1, y_1).$$

Portanto, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) pertencem ao conjunto conexo $C_{X\times Y}((x_0, y_1))$, e assim, pelo Lema 3.20, $C_{X\times Y}((x_0, y_0)) = C_{X\times Y}((x_1, y_1))$. Em particular, $(x_1, y_1) \in C_{X\times Y}((x_0, y_0))$. Como (x_1, y_1) era um ponto arbitrário em $X \times Y$, temos que $C_{X\times Y}((x_0, y_0)) = X \times Y$. Logo, $(X \times Y, \tau)$ é conexo.

Reciprocamente, se $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ é conexo, então as Proposições 3.9 e 2.107 implicam que cada (X_i, τ_i) é conexo. ■

Definição 3.22. *Um espaço topológico é dito* ***contínuo*** *se for compacto e conexo.*

Exemplo 3.23. *Considere o intervalo fechado* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *munido da topologia usual. O conjunto* $[0, 1]$ *é compacto, pois em* $\mathbb{R}$ *todo conjunto fechado e limitado é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel. Além disso,* $[0, 1]$ *é conexo, uma vez que todo intervalo da reta real é um conjunto conexo. Logo, pela Definição 3.22,* $[0, 1]$ *é um espaço topológico contínuo.*

Como consequência imediata do Teorema 3.13 e das Proposições 3.21 e 3.14, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.24. *Sejam* $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n)$ *espaços topológicos. Então* $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ *é um contínuo se, e somente se cada* (X_i, τ_i) *é contínuo.*

3.2 Produtos Infinitos Enumeráveis

Nesta seção, daremos continuidade ao estudo da Topologia Produto, avançando gradualmente do caso finito para o caso de produtos infinitos enumeráveis. Iniciaremos nossa análise com o conjunto de Cantor, que servirá como ponto de partida para compreender construções topológicas obtidas por produtos de espaços simples. Em seguida, ampliaremos o estudo para produtos infinitos, investigando suas propriedades e as sutis diferenças em relação ao caso finito.

A partir dessa base, introduziremos o espaço de Cantor e, posteriormente, o cubo de Hilbert, exemplos notáveis de espaços construídos como produtos infinitos. Por fim, será demonstrado que o cubo de Hilbert é compacto, resultado que decorre diretamente do Teorema de Tychonoff em sua forma generalizada. Essa demonstração evidencia a profundidade e a elegância do conceito de Compacidade em contextos infinitos, reforçando a relevância da Topologia Produto no desenvolvimento da Topologia Geral.

3.2.1 O Conjunto de Cantor

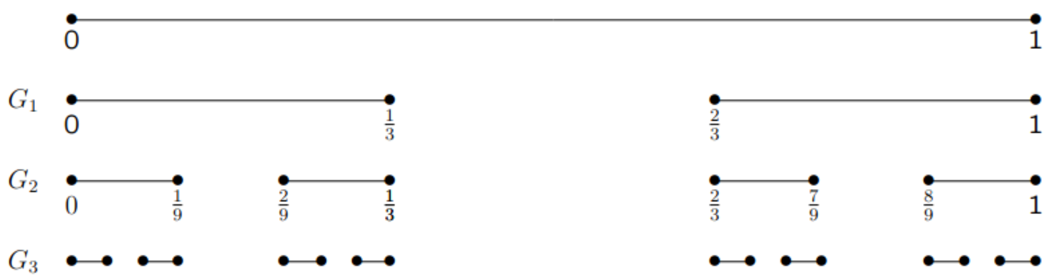
Construímos agora um conjunto muito curioso e bastante útil, conhecido como Conjunto de Cantor. Considerando o intervalo unitário fechado $[0,1]$ e deletando dele o intervalo aberto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, que é o terço médio, e denotando o conjunto fechado restante por G_1. Temos que

$$G_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Em seguida, deletando de G_1 os intervalos abertos $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ que são o terço médio de suas duas partes e denotando o conjunto fechado restante por G_2. Temos que

$$G_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Figura 3.1: Conjunto de Cantor



Fonte: Morris, 2011, p 189.

Se continuarmos desse modo, em cada estágio deletando o terço médio aberto de cada intervalo fechado remanescente do estágio anterior, obtemos uma sequência decrescente de conjuntos fechados, de modo que,

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \cdots G_n \supseteq \cdots.$$

O Conjunto de Cantor, G, é definido por

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

e, por ser a interseção de conjuntos fechados, é um subconjunto fechado de $[0,1]$. Observe que o Conjunto de Cantor G não é vazio, visto que em todas as etapas da construção, os pontos extremos dos intervalos não são removidos, pois a cada estágio elimina-se apenas o terço aberto central. Em particular, o ponto 0, que é extremo esquerdo do intervalo inicial $[0,1]$, permanece em G_1, em G_2 e assim sucessivamente. O mesmo ocorre com o ponto 1, extremo direito. Assim, $0 \in G_n$ e $1 \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $[0,1]$ é compacto, o Espaço de Cantor, (G, τ), isto é, G com a topologia de subespaço é compacto.

Lema 3.25. *O Conjunto de Cantor é infinito.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto G_n obtido após n etapas da construção do Conjunto de Cantor é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos. Assim, G_n possui 2^{n+1} pontos extremos distintos. Como em cada etapa são removidos apenas intervalos abertos, nenhum desses extremos é eliminado nas etapas posteriores; logo todo extremo de G_n pertence a G_m para todo $m \geq n$. Em particular, todos esses extremos pertencem à interseção

$$G = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Portanto, para cada n existem pelo menos 2^{n+1} pontos distintos em G. Como $2^{n+1} \to \infty$ quando $n \to \infty$, segue que G possui infinitos pontos. Assim, G é infinito. ■

Para compreender a estrutura do Conjunto de Cantor, é conveniente representá-lo utilizando números reais escritos na base 3, também chamada base ternária. Estamos habituados à representação decimal (base 10), mas podemos escrever números em diferentes bases. No caso do Conjunto de Cantor, a base 3 é a mais adequada.

Um número real pode ser escrito em base 3 de maneira análoga ao sistema decimal. Por exemplo,

$$76\frac{5}{81} = 2211.0012_3,$$

pois essa expansão corresponde à soma

$$2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4}.$$

Todo número $x \in [0,1]$ pode ser representado como

$$x = 0.a_1a_2a_3\ldots \quad \text{(na base 3)},$$

onde cada dígito a_n pertence ao conjunto $\{0, 1, 2\}$. Essa representação corresponde à série

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

Recordemos que o processo de construção do Conjunto de Cantor consiste na remoção sucessiva do terço central de cada intervalo remanescente. Essa remoção corresponde exatamente aos números cuja expansão ternária utiliza o dígito 1 na posição correspondente. Dessa forma, obtemos a seguinte caracterização:

$$x \in G \quad \text{se, e somente se} \quad a_n \in \{0, 2\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como os elementos do Conjunto de Cantor utilizam apenas os dígitos 0 e 2 em sua expansão ternária, podemos associar a cada elemento $x \in G$ uma sequência infinita

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots), \qquad a_n \in \{0, 2\}.$$

Essa associação define uma função

$$f : G \longrightarrow \{0, 2\}$$

que é bijetiva pois números distintos em G têm sequências distintas, e toda sequência infinita de dígitos $\{0, 2\}$ corresponde a um elemento de G.

Essa descrição será utilizada posteriormente no estudo das propriedades topológicas do Conjunto de Cantor, bem como na interpretação de G como um produto cartesiano de espaços discretos.

3.2.2 A Topologia Produto para Produtos Infinitos Enumeráveis

Depois de entendermos bem o caso dos produtos finitos, seguimos agora para os produtos infinitos e enumeráveis. Essa é uma continuação natural do que vimos até aqui, mas que exige um pouco mais de cuidado. Quando passamos para infinitos fatores, a forma de construir a topologia muda um pouco, e precisamos entender como lidar com essas novas situações. O objetivo desta subseção é justamente ver como os resultados anteriores se estendem para esse caso mais geral, analisando o que permanece válido e o que precisa ser ajustado quando o número de fatores deixa de ser finito.

Definição 3.26. *Seja (X_1, τ_1), (X_2, τ_2), $\cdots$, (X_n, τ_n), $\cdots$ uma família infinita enumerável de espaços topológicos. Então o produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ dos conjuntos X_i, com $i \in \mathbb{N}$ consiste de todas as sequências infinitas $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$, onde $x_i \in X_i$ para todo i. O espaço produto, $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$, consiste do produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ com a topologia τ que tem como base a família*

$$B = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \tau_i, \text{ e } O_i = X_i \textit{ para todos, exceto para um número finito de } i. \right\}$$

A topologia τ é chamada de Topologia Produto. Portanto, um conjunto aberto básico é da forma

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$$

Observação 3.27. *Um produto de conjuntos abertos não precisa ser aberto na Topologia Produto τ. Em particular, se $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_n, \cdots$ são tais que cada $O_i \in \tau_i$, e $O_i \neq X_i$ para todo i, então $\prod_{i=1}^{\infty} O_i$ não pode ser expresso como uma união de membros de B e, portanto, não é aberto no espaço produto $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau)$.*

Exemplo 3.28. *Seja $(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n), \cdots$ uma família infinita enumerável de espaços topológicos. Então a topologia caixa τ' no produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ é a topologia que tem como base a família*

$$B' = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \tau_i \right\}.$$

Observação 3.29. *Pode-se ver que se cada (X_i, τ_i) é um espaço discreto, então o produto caixa $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau')$ é um espaço discreto. Então, se cada (X_i, τ_i) é um conjunto finito com a topologia discreta, então $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau')$ é um espaço discreto infinito, que certamente não é compacto. Assim, temos um produto caixa de espaços compactos (X_i, τ_i) resultando em um espaço não compacto.*

Proposição 3.30. *Seja $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \cdots, (X_n, \tau_n), \cdots$ uma família infinita enumerável de espaços topológicos e $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau)$ seu espaço produto. Para cada i, seja $p_i : \prod_{j=1}^{\infty} X_j \to X_i$ a aplicação projeção; isto é, $p_i((x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)) = x_i$ para cada $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$. Então,*

(i) cada p_i é uma aplicação contínua, sobrejetiva e aberta, e

(ii) τ é a topologia mais grossa no conjunto $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ tal que cada p_i é contínua.

Demonstração: A demonstração é análoga a da Proposição 3.9 e por isso será omitida aqui. ■

Proposição 3.31. *Sejam (X_i, τ_i) e (Y_i, τ_i'), $i \in \mathbb{N}$, famílias infinitas enumeráveis de espaços topológicos com espaços produto $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau)$ e $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \tau')$, respectivamente. Se a aplicação $h_i : (X_i, \tau_i) \to (Y_i, \tau_i')$ é contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, então a aplicação $h : (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau) \to (\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \tau')$ dada por $h(\prod_{i=1}^{\infty} x_i) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i)$ também é contínua; isto é, $h((x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)) = (h_1(x_1), h_2(x_2), \cdots, h_n(x_n), \cdots)$ é contínua.*

Demonstração: Basta mostrar que se O é um conjunto aberto básico em $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i, \tau')$, então $h^{-1}(O)$ é aberto em $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \tau)$. Considere o conjunto aberto básico $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots$ onde $U_i \in \tau_i'$, para $i = 1, \cdots, n$. Então

$$h^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots) = h_1^{-1}(U_1) \times \cdots \times h_n^{-1}(U_n) \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots$$

e o conjunto do lado direito está em τ, devido a continuidade de cada h_i implica que $h_i^{-1}(U_i) \in \tau_i$, para $i = 1, \cdots, n$. Logo, h é contínua. ■

3.2.3 O Espaço de Cantor e o Cubo de Hilbert

Nesta subseção, vamos revisitar o espaço de Cantor para mostrar que ele é homeomorfo a um produto infinito enumerável de espaço de dois pontos. Em seguida, faremos uso de alguns resultados anteriores para definir o cubo de Hilbert e analisar seu comportamento no contexto da compacidade em produtos infinitos e enumeráveis. Nosso interesse principal aqui é entender como a compacidade se comporta em produtos infinitos enumeráveis, reunindo as ideias que desenvolvemos anteriormente sobre Topologia Produto. Nosso objetivo principal nessa subseção é mostrar que o cubo de Hilbert é compacto, sendo uma particularidade de um resultado mais geral sobre compacidade em produtos infinitos. Com isso, concluímos o nosso trabalho, reunindo os principais resultados explorados ao longo desse estudo.

Pra prosseguirmos, para cada $i \in \mathbb{N}$ tomamos (A_i, τ_i) como o conjunto $\{0, 2\}$ com a topologia discreta, e consideramos o espaço produto $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \tau')$. Mostramos no próximo resultado que ele é homeomorfo ao Espaço de Cantor (G, τ).

Lema 3.32. *Seja $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ uma bijeção contínua. Se (X, τ) é compacto e (Y, τ_1) é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração: Queremos mostrar que f^{-1} é contínua. Seja $C \subset X$ fechado. Como X é compacto, C é compacto. Pela continuidade de f, a imagem $f(C)$ é compacta em Y. Num espaço Hausdorff, pela Proposição 2.211 todo subconjunto compacto é fechado, portanto $f(C)$ é fechado em Y. Assim, a imagem por f de qualquer conjunto fechado de X é um conjunto fechado em Y, isto é, f é uma aplicação fechada. Como f é bijetora e fechada, a inversa f^{-1} envia conjuntos fechados de Y em conjuntos fechados de X, o que equivale à continuidade de f^{-1}. Logo f é um homeomorfismo. ■

Proposição 3.33. *Seja (G, τ) o Espaço de Cantor e $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \tau')$ o espaço produto do conjunto $\{0, 2\}$. Então a aplicação $f : (G, \tau) \to (\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \tau')$ dada por $f(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pode-se notar que f é bijetora, pois todo elemento $x \in G$ admite uma representação ternária única da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0, 2\},$$

o que garante que a aplicação

$$f(x) = (a_1, a_2, \ldots)$$

é bem definida e injetiva. Além disso, dada qualquer sequência $(a_1, a_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, com $a_i \in \{0, 2\}$, o número

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

pertence ao conjunto de Cantor G e satisfaz $f(x) = (a_1, a_2, \ldots)$, o que mostra que f é sobrejetiva.. Como (G, τ) é compacto e $(\prod_{i=1}^{\infty} A_i, \tau')$ é Hausdorff, pelo Lema 3.32 tem-se que f é um homeomorfismo se for contínua. Basta, portanto, provarmos a continuidade de f. Seja $U \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = A$ um aberto básico. Então existem abertos $U_i \subseteq A_i$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$, de modo que

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times A_{n+1} \times A_{n+2} \times \cdots$$

Seja $b \in f^{-1}(U)$, o que implica que $f(b) = a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in U$. Assim, por f

ser injetora, $b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$. Considere o intervalo aberto em G dado por

$$I = \left(b - \frac{1}{3^{n+2}},\, b + \frac{1}{3^{n+2}}\right) \cap G,$$

ou seja, I é aberto em G e se $x \in I$ e $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$, temos

$$f(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots).$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ se $k > n$, por $x \in G$, temos $x_k = 0$ ou $x_k = 2$, assim $x_k \in A_k$. Por outro lado, se $k \in \{1, \cdots, n\}$, temos $x_k = \frac{2}{k}$ ou $x_k = 0$. Então aqui temos dois casos:

Caso (i) Se $x_k = \frac{2}{3^k}$,

Por $x \in I$, temos

$$||x - a|| < \frac{1}{3^{n+2}}, \text{ ou seja, } |x_k - a_k| < \frac{1}{3^{n+2}}.$$

Note que, $a_k = 2$, pois se $a_k = 0$, temos

$$\frac{1}{3^{n+2}} > x_k = \frac{2}{3^k} \text{ o que implica que } \frac{3^k}{3^{n+2}} > 2, \text{ com } n > k.$$

O que nos leva a uma contradição. Logo, $a_k = 2$, então $x_k = a_k$, e portanto, $x_k \in U_k$, pois $a_k \in U_k$.

(ii) Se $x_k = 0$,

Observe que $a_k = 0$, uma vez que se $a_k = 2$, temos

$$\frac{2}{3^k} < \frac{1}{3^{n+2}}$$

O que também é uma contradição, então $x_k = a_k = 0$, e portanto, $x_k \in U_k$. Assim, concluímos que $x \in f^{-1}(U)$, logo $f^{-1}(U)$ é aberto e, portanto, f é contínua. ■

Proposição 3.34. *Seja (G_i, τ_i), $i \in \mathbb{N}$, uma família infinita enumerável de espaços topológicos, cada um homeomorfo ao Espaço de Cantor (G, τ). Então*

$$(G, \tau) \cong \prod_{i=1}^{\infty} (G_i, \tau_i) \cong \prod_{i=1}^{n} (G_i, \tau_i),$$

Em particular para cada $n \in \mathbb{N}$, $(G, \tau) \cong \prod_{i=1}^{n} (G_i, \tau_i)$.

Demonstração: Primeiramente verificamos que $(G, \tau) \cong (G_1, \tau_1) \times (G_2, \tau_2)$. Isto é, em virtude da Proposição 3.33, equivalente a mostrar que

$$\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i)$$

no qual cada (A_i, τ_i) é o conjunto $\{0, 2\}$ com a topologia discreta.
Agora definimos uma função θ do conjunto $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i)$ para o conjunto $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i)$ por

$$\theta((a_1, a_2, a_3, \cdots), (b_1, b_2, b_3, \cdots)) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots).$$

Note que θ é um homeomorfismo, visto que a aplicação θ é injetora e sobrejetora, pois cada elemento da imagem determina de forma única os elementos do domínio, bastando separar as coordenadas de posições ímpares e pares. Além disso, θ é contínua, pois, pela definição da topologia produto, basta que cada projeção $p_k \circ \theta$ seja contínua. Isso ocorre porque cada coordenada da imagem de θ depende apenas de uma coordenada da entrada, e projeções são sempre contínuas. A inversa de θ é dada por

$$\theta^{-1}(c_1, c_2, c_3, c_4, \dots) = ((c_1, c_3, c_5, \dots), (c_2, c_4, c_6, \dots)),$$

que também é contínua pelo mesmo argumento, já que cada coordenada da imagem de θ^{-1} depende apenas de uma coordenada da entrada. Com isso $(G_1, \tau_1) \times (G_2, \tau_2) \cong (G, \tau)$.
Por indução, então, $(G, \tau) \cong \prod_{i=1}^{n}(G_i, \tau_i)$, para todo inteiro positivo n.
Voltando ao caso do produto infinito, defina a aplicação

$$\phi : \left[\prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \times \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i) \times \cdots\right] \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(A_i, \tau_i)$$

por

$$\phi((a_1, a_2, \cdots), (b_1, b_2, \cdots), (c_1, c_2, \cdots), (d_1, d_2, \cdots), (e_1, e_2, \cdots), \cdots)$$

$$= (a_1, a_2, b_1, a_3, b_2, c_1, a_4, b_3, c_2, d_1, a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, \cdots).$$

Novamente, observe que ϕ é um homeomorfismo, e com isto concluímos.

■

Observação 3.35. *Deve-se observar que a afirmação*

$$(G,\tau) \cong \prod_{i=1}^{\infty}(G_i,\tau_i)$$

na Proposição 3.34 é talvez mais transparente se a escrevermos como

$$(A,\tau)\times(A,\tau)\times\cdots \cong [(A,\tau)\times(A,\tau)\times\cdots]\times[(A,\tau)\times(A,\tau)\times\cdots]\times\cdots,$$

em que (A,τ) é o conjunto $\{0,2\}$ com a topologia discreta.

Observação 3.36. *A Proposição 3.34 e a Observação 3.35 exploram uma propriedade específica do conjunto de Cantor.*

Proposição 3.37. *O espaço topológico $[0,1]$ é uma imagem contínua do Espaço de Cantor (G,τ).*

Demonstração: Pela Proposição 3.33, basta encontrar uma aplicação contínua ϕ de $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ sobre $[0,1]$. Tal aplicação é dada por

$$\phi((a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}.$$

Lembrando que cada $a_i \in \{0,2\}$ e que cada número $x\in[0,1]$ tem uma expansão diádica da forma $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{2^j}$, onde $b_j \in \{0,1\}$, vemos que ϕ é uma aplicação sobrejetora. Para mostrar que ϕ é contínua, basta, pela Proposição 2.101, verificar que se U é o intervalo aberto

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}-\varepsilon, \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}+\varepsilon\right) \ni \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}, \quad \text{para qualquer } \varepsilon>0,$$

então existe um conjunto aberto $W \ni (a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)$ tal que $\phi(W)\subseteq U$. Escolha N suficientemente grande tal que $\sum_{i=N}^{\infty}\frac{2}{2^{i+1}}<\varepsilon$, e defina

$$W = \{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_N\}\times A_{N+1}\times A_{N+2}\times\cdots.$$

Então W é aberto em $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$, $W\ni(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)$, e $\phi(W)\subseteq U$, pois se $x\in W$ então $|\phi(x)-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}| = \sum_{i>N}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}<\varepsilon$, como requerido.

∎

Definição 3.38. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja o espaço topológico (I_n, τ_n) homeomorfo a $[0,1]$. Então o espaço produto $\prod_{i=1}^{\infty}(I_n, \tau_n)$, onde τ é a Topologia Produto, é chamado de* ***cubo de Hilbert*** *e é denotado por I^{∞}. O espaço produto $\prod_{i=1}^{n}(I_i, \tau_i)$ é chamado de n-cubo e é denotado por I^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Sabemos pelo Teorema de Tychonoff para produtos finitos que I^n é compacto para cada n. Provaremos agora que I^{∞} é compacto.

Teorema 3.39. *O cubo de Hilbert é compacto.*

Demonstração: Pela Proposição 3.37, existe uma aplicação contínua ϕ_n de (G_n, τ_n) sobre (I_n, τ'_n) em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, (G_n, τ_n) e (I_n, τ'_n) são homeomorfos ao Espaço de Cantor e a $[0,1]$, respectivamente. Portanto, pela Proposição 3.31 , existe uma aplicação contínua ψ de $\prod_{i=1}^{\infty}(G_n, \tau_n)$ sobre $\prod_{i=1}^{\infty}(I_n, \tau'_n) = I^{\infty}$. Mas a Proposição 3.34 diz que $\prod_{i=1}^{\infty}(G_n, \tau_n)$ é homeomorfo ao Espaço de Cantor (G, τ). Portanto, I^{∞} é uma imagem contínua do espaço compacto (G, τ), e portanto é compacto. ∎

Observação 3.40. *O Teorema 3.39 que garante que o cubo de Hilbert é compacto pode ser interpretado como um caso particular do Teorema de Tychonoff em sua forma geral. De fato, o cubo de Hilbert é um produto infinito enumerável de espaços compactos, e sua compacidade decorre diretamente da validade do teorema nesse contexto. Além disso, o Teorema de Tychonoff permanece válido para produtos não enumeráveis de espaços compactos, entretanto, nesse caso geral, a demonstração completa do resultado depende essencialmente do Axioma da Escolha.*

Esse resultado evidencia que a compacidade se mantém mesmo quando passamos do caso finito para o produto infinito enumerável. Assim, o cubo de Hilbert conserva uma propriedade central dos espaços que o compõem, mostrando como a topologia produto permite estender características fundamentais para um contexto infinitamente dimensional.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, realizamos um estudo sobre Topologia Geral, com foco na Compacidade em produtos finitos e infinitos enumeráveis. Buscamos compreender como esse conceito se manifesta em diferentes contextos e como a Topologia Geral oferece uma base teórica essencial para o desenvolvimento da Análise e de outras áreas da matemática.

Iniciamos abordando os fundamentos da Topologia Geral, apresentando noções como espaços topológicos, homeomorfismo, continuidade, Espaços Métricos, convergência e Compacidade. A partir dessa base, estudamos a Topologia Produto, analisando sua construção e verificando como ela se comporta em produtos finitos e infinitos enumeráveis de espaços topológicos.

Durante o trabalho, exploramos diversos resultados importantes que ilustram a profundidade e a abrangência da teoria, como o Teorema da Categoria de Baire, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o Teorema de Heine–Borel e o Teorema de Tychonoff no caso de produtos finitos. Além disso, estudamos o Cubo de Hilbert, que se destacou como um exemplo notável na análise da Compacidade em produtos infinitos enumeráveis, mostrando a aplicação prática dos conceitos desenvolvidos.

Dessa forma, o trabalho evidenciou a importância da Topologia Geral para a compreensão de propriedades fundamentais dos espaços topológicos, em especial no estudo da Compacidade e da Topologia Produto. Com a conclusão deste estudo, atingimos os objetivos propostos, reforçando a relevância dessa teoria na formação matemática e no entendimento de estruturas que sustentam grande parte da Análise.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. **Análise Real, vol. 1.** 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária).

[2] LIMA, E. L. **Análise Real, vol. 2.** 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).

[3] LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 1.** 15 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. (Coleção Projeto Euclides).

[4] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[5] Morris, S. A. **Topology Without Tears**, 2011.