



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Valdênis Martins da Silva Júnior

O Teste da Segunda Derivada: aplicações e demonstrações em diferentes dimensões

Recife - PE
Julho de 2024

O Teste da Segunda Derivada: aplicações e demonstrações em diferentes dimensões

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Yukio Tanaka

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586t Silva Junior, Valdenis Martins da.
O teste da segunda derivada: aplicações e demonstrações em diferentes dimensões / Valdenis Martins da. – Recife, 2024.
74 f.; il.

Orientador(a): Eudes Mendes Barboza.
Co-orientador(a): Thiago Yukio Tanaka.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Funções (Matemática). 2. Variáveis (Matemática). 3. Matrizes (Matemática). 4. Matemática - Estudo e ensino I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Tanaka, Thiago Yukio, coorient. III. Título

CDD 510

Valdênis Martins da Silva Júnior

O Teste da Segunda Derivada: aplicações e demonstrações em diferentes dimensões

Trabalho de conclusão de curso submetido à Coordenação do Curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em matemática.

Aprovado em: 10/07/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Yukio Tanaka (Coorientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dra. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Recife - PE
Julho de 2024

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Eliane Vicente e Valdênis Martins, as minhas avós, Maria Helena e Inês Lionel, por seu amor incondicional, apoio constante e incentivo ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Sem a base sólida que me proporcionaram, este trabalho não teria sido possível.

À minha esposa, Thais Cristina, por seu amor, compreensão e apoio inabalável. Sua presença e encorajamento constante foram fundamentais para que eu pudesse superar os desafios desta jornada acadêmica.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu orientador, Eudes Mendes, cuja orientação, paciência, dedicação e constante incentivo à carreira acadêmica foram inestimáveis desde o início da minha graduação. Suas valiosas contribuições e ensinamentos moldaram profundamente o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu coorientador, Thiago Yukio Tanaka, por seu apoio contínuo e pelas importantes contribuições que enriqueceram esta pesquisa. Sua orientação e ideias foram fundamentais para a realização deste projeto.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática, cujos ensinamentos e orientações ao longo do curso foram essenciais para minha formação acadêmica. Em especial, agradeço pelas oportunidades de aprendizado e crescimento que me proporcionaram, as quais foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos da universidade, especialmente Ana Beatriz, Pedro Henrique, Marcos Farias e Lucas Leal, sou grato pela amizade, apoio e companheirismo ao longo dessa jornada. Suas palavras de incentivo e momentos de descontração foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

À banca examinadora, composta por Filipe Andrade e Yane Lísley, agradeço por aceitarem o convite para avaliar meu trabalho e pelas valiosas contribuições e sugestões oferecidas para a versão final deste estudo. Sua dedicação e perspicácia foram fundamen-

tais para o aprimoramento desta pesquisa.

Agradeço, ainda, à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco, pelo suporte financeiro que tornou este trabalho possível. Seu apoio foi crucial para a realização desta pesquisa.

Por fim, expresso minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. A todos, meu mais sincero muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, exploramos os fundamentos das derivadas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Inicialmente abordamos a derivada como a taxa de variação de uma função em um ponto, incluindo a regra da cadeia e o teste da primeira derivada para identificar máximos, mínimos e pontos de inflexão. Além disso, introduzimos derivadas parciais em $\mathbb{R}^n$, analisando funções de várias variáveis e utilizando as definições de máximos e mínimos de funções de várias variáveis e por fim definir pontos críticos. Finalmente, focamos no Teste da Segunda Derivada para funções de várias variáveis, destacando a importância da matriz Hessiana e do discriminante na classificação dos pontos críticos como máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela.

Palavras-Chave: Derivadas; Pontos Críticos; Teste da Segunda Derivada.

Abstract

In this work, we explore the fundamentals of derivatives in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. We begin by addressing the derivative as the rate of change of a function at a point, including the chain rule and the first derivative test to identify maxima, minima, and inflection points. Additionally, we introduce partial derivatives in $\mathbb{R}^n$, analyzing functions of several variables and using the definitions of maxima and minima for functions of several variables to define critical points. Finally, we focus on the Second Derivative Test for functions of several variables, highlighting the importance of the Hessian matrix and the discriminant in classifying critical points as local maxima, local minima, or saddle points.

Key-Words: Derivatives; Critical Points; Second Derivative Test.

Lista de Figuras

1.1	Interpretação geométrica da definição de derivada.	17
1.2	Inclinação da reta secante.	17
1.3	Ilustração das diversas possibilidades do Teorema 12.	31
2.1	Interpretação geométrica das derivadas parciais.	33
3.1	Conceito geométrico de concavidade voltada para cima.	50
3.2	Conceito geométrico de concavidade voltada para baixo.	50

Sumário

Lista de Notações	8
Introdução	10
1 Derivada em $\mathbb{R}$	11
1.1 Noção de Derivada	11
1.2 Interpretação Geométrica	16
1.3 Regra da Cadeia	18
1.4 Derivada e Crescimento Local	20
1.5 Pontos Críticos	26
1.6 Teste da Primeira Derivada	28
2 Derivadas em $\mathbb{R}^n$	32
2.1 Derivadas Parciais	32
2.2 Funções de Classe C^1	35
2.3 Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis	44
2.4 Pontos Críticos de uma Função de Várias Variáveis	45
3 O Teste da Segunda Derivada em dimensão $1 \leq n \leq 3$	49
3.1 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}$	49
3.2 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^2$	53
3.3 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^3$	59
3.4 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^n$	66
Considerações Finais	71
Referências Bibliográficas	72

Introdução

Quantificar máximos e mínimos é de extrema importância em diversos campos do conhecimento, desde a economia até a engenharia, pois permite a otimização de recursos e processos. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a otimização é abordada como um dos tópicos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático e suas aplicações práticas. A habilidade de encontrar e interpretar pontos de máximo e mínimo é essencial para resolver problemas do mundo real, como maximizar lucros, minimizar custos e otimizar funções em diversas áreas da ciência e tecnologia.

No primeiro capítulo deste trabalho, são explorados os fundamentos das derivadas em $\mathbb{R}$. A derivada é introduzida como a medida da taxa de variação de uma função em um ponto específico, sendo fundamental para entender a inclinação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. A abordagem geométrica da derivada ilustra como essa medida descreve a inclinação da curva da função em um ponto, oferecendo uma interpretação visual da taxa de mudança instantânea. A regra da cadeia é discutida detalhadamente para mostrar como a composição de funções afeta suas derivadas, permitindo o cálculo eficiente de derivadas de funções complexas por meio de suas partes constituintes. Além disso, o estudo das derivadas e do crescimento local explora como informações derivativas ajudam a determinar os intervalos onde uma função está crescendo ou decrescendo em seu domínio. Pontos críticos, onde a derivada da função é zero ou indefinida, são identificados como potenciais pontos de máximo, mínimo ou pontos de inflexão. O teste da primeira derivada é então apresentado como uma ferramenta crucial para classificar esses pontos e entender a natureza das mudanças de comportamento da função.

No segundo capítulo, a análise se estende para as derivadas em $\mathbb{R}^n$, onde n representa o número de variáveis da função. O conceito de derivadas parciais é introduzido como medidas da taxa de variação da função em relação a cada uma de suas variáveis independentes, mantendo as outras constantes. Isso permite compreender como a função

varia em diferentes direções no espaço multidimensional. A classe de funções C^1 , cujas derivadas parciais são contínuas, é discutida como fundamental para garantir a suavidade e a continuidade das funções em $\mathbb{R}^n$, sendo essencial para diversas aplicações em análise matemática e física. A análise de máximos e mínimos de funções de várias variáveis se concentra na identificação de pontos críticos, onde as derivadas parciais são nulas. A investigação desses pontos é enriquecida pelo teste da segunda derivada, que utiliza a matriz Hessiana da função para determinar a natureza desses pontos como máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela. Esse teste é crucial para entender o comportamento detalhado da função em diferentes regiões de $\mathbb{R}^n$.

No terceiro capítulo, exploramos o Teste da Segunda Derivada para funções de várias variáveis, uma ferramenta essencial na análise de pontos críticos. Em $\mathbb{R}$, a determinação da natureza dos pontos críticos é facilitada pelo teste da primeira derivada, que indica se um ponto é um máximo ou mínimo local. No entanto, em $\mathbb{R}^2$, e especialmente em $\mathbb{R}^3$, a situação se complica devido à multiplicidade de direções possíveis. Aqui, o teste da segunda derivada se torna crucial: através da análise da matriz Hessiana, calculamos o discriminante para determinar se um ponto crítico é um máximo local, mínimo local ou um ponto de sela.

Este trabalho foi fundamentado em uma extensa revisão bibliográfica, incluindo livros de cálculo e análise real. A maioria das técnicas e conceitos aqui apresentados foram extraídos e expandidos a partir dessas fontes, como [1] - [10]. Minhas contribuições incluem a síntese e a contextualização desses conceitos, bem como a aplicação prática dos testes de derivadas em exemplos ilustrativos e problemas reais, o que busca enriquecer a compreensão teórica com aplicações práticas relevantes.

Capítulo 1

Derivada em $\mathbb{R}$

O primeiro capítulo deste trabalho explora os fundamentos das derivadas em $\mathbb{R}$, abordando conceitos essenciais. Inicia-se com a noção de derivada, que mede a taxa de variação de uma função em um ponto específico e representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função. A ideia geométrica da derivada é apresentada para oferecer uma interpretação visual da mudança instantânea. A regra da cadeia, um resultado importante da diferenciação, é discutida para entender como a composição de funções afeta suas derivadas, o que é essencial para calcular derivadas de funções complexas. O estudo também analisa como as derivadas indicam onde a função está crescendo ou decrescendo. Pontos críticos, onde a derivada é zero ou indefinida, são identificados como potenciais máximos, mínimos ou pontos de inflexão. O teste da primeira derivada é então apresentado como uma ferramenta para classificar esses pontos e analisar o comportamento da função.

1.1 Noção de Derivada

Inicialmente vamos tratar de pontos de acumulação e derivadas. Um ponto de acumulação é um ponto onde qualquer vizinhança contém um ponto do conjunto, exceto o próprio ponto. A derivada de uma função em um ponto é o limite da razão das diferenças entre a variação da função e a variação do ponto à medida que este se aproxima do ponto em questão. Exemplos demonstram que funções constantes têm derivada zero e mostram como calcular a derivada de funções polinomiais. Um teorema importante afirma que uma função é derivável em um ponto se ela pode ser aproximada linearmente nesse ponto. Isso significa que a função pode ser representada como uma linha reta mais um pequeno

erro. Além disso, a derivabilidade implica continuidade: se uma função é derivável em um ponto, ela é contínua nesse ponto. Exemplos mostram funções que são contínuas mas não deriváveis em certos pontos, destacando a relação entre derivada e continuidade.

Definição 1. Quando temos $a \in \mathbb{R}$ dizemos que é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a . Significa que, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Equivalentemente, para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

Exemplo 1. Seja o conjunto $X = [0, 4]$. Se $0 < x < 4, \forall \epsilon > 0$ tem que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap ([0, 4] - \{x\}) \neq \emptyset$, logo x é ponto de acumulação de X . Observe que 0 e 4 também são pontos de acumulação, pois dado $\epsilon > 0, (0 - \epsilon, 0 + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(4 - \epsilon, 4 + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 2. O conjunto $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação, pois dado $0 < \epsilon < 1$ e $n \in \mathbb{N}, (n - \epsilon, n + \epsilon) \cap \mathbb{N} - \{n\} = \emptyset$.

Visto a definição de ponto de acumulação, agora iremos enunciar a definição da derivada.

Definição 2. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir, diz-se que f é derivável no ponto a . Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X e obtém-se uma nova função $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$, chamada a função derivada de f . Se f' é contínua, diz-se que f é de classe C^1 .

Observação 1. A necessidade de a ser um ponto de acumulação se deve ao fato de que queremos que a função $f(x)$ seja definida e tenha valores próximos a a em uma vizinhança de a (ou seja, em algum intervalo aberto em torno de a). Isso significa que a deve ser um ponto em que a função tem significado e está definida não apenas em a , mas em pontos próximos a a .

Exemplo 3. Uma função constante é derivável e sua derivada é identicamente nula. Usando a definição, para qualquer x real, sendo $f(a) = c$, temos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Exemplo 4. Calcule a derivada de f quando $f(x) = \sqrt{x}$. Note que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Percebemos que $f'(x)$ existe se $x > 0$.

Notação 1. Outras notações para a derivada de f no ponto a são:

$$Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

Definição 3. Quando $a \in X$ é um ponto de acumulação à direita, isto é, $a \in X \cap X'_+$, pode-se tomar o limite $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} q(x)$. Quando existe, este limite chama-se a derivada à direita de f no ponto a . Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, tem sentido considerar o limite à esquerda $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} q(x)$. Se existe, ele se chama a derivada à esquerda de f no ponto a .

Definição 4. Caso seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, isto é, caso $a \in X$ seja ponto de acumulação bilateral, a função f é derivável no ponto a se, e somente se, existem e são iguais as derivadas à direita e à esquerda, com $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Exemplo 5. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = cx + d$ então $f'(a) = c$, $\forall a \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{cx + d - (ca + d)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c(x - a)}{x - a} = c.$$

Logo $f'(a) = c$.

Exemplo 6. Para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^n$, tem derivada

$f'(y) = n \cdot y^{n-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(y+h)^n - y^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} y^{n-i} h^i - y^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} h^i}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} h^{i-1} = ny^{n-1}. \end{aligned}$$

Definição 5. DERIVADA LATERAL

Exemplo 7. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, não possui derivada em $x = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h) \cdot \sin\left(\frac{1}{0+h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

Como não existe $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$, segue-se que f não é derivável no ponto $x = 0$, em que nenhuma derivada lateral existe.

Exemplo 8. Por outro lado, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x \cdot f(x)$, isto é, $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$, é derivável no ponto $x = 0$ porque

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{0+h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0. \end{aligned}$$

Pois o seno é uma função limitada e h tende para zero. Logo $g'(0) = 0$.

Exemplo 9. A função $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $I(x) = n$ quando $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, é derivável, com $I'(x) = 0$, nos pontos $x \notin \mathbb{Z}$. Se n é inteiro, existe $I'_+(n) = 0$ mas não existe $I'_-(n)$. Com efeito, se $1 > h > 0$, tem-se $I(n+h) = I(n) = n$ mas para $-1 < h < 0$

vale $I(n+h) = n-1$, $I(n) = n$. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{I(n+h) - I(n)}{h} = 0$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{I(n+h) - I(n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{h}$$

não existe.

A seguir apresentamos alguns resultados decorrentes da definição de derivada.

Teorema 1. *A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X$ implica $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(a)$.*

Demonstração. Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Supondo que $f'(a)$ exista, definimos $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

logo $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. A condição é, portanto, necessária. Reciprocamente, se vale a condição, então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{ch}{h},$$

logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0,$$

portanto $f'(a)$ existe e é igual a c . □

Observação 2. *Para toda função f , definida nos pontos a e $a+h$, e todo número real c , pode-se sempre escrever a igualdade $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, a qual define meramente o número $r(h)$. O que o Teorema 1 afirma é que existe no máximo um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. Este número c , quando existe, é igual a $f'(a)$. O Teorema 1 diz também que, quando $f'(a)$ existe, o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ é a soma de uma “parte linear” $c \cdot h$, proporcional ao acréscimo h da variável independente, mais um “resto” $r(h)$, o qual é infinitamente pequeno em relação a h , no sentido de que o quociente $r(h)/h$ tende a zero com h .*

Corolário 1. *Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.*

Demonstração. Com efeito, se f é derivável no ponto a então $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + [r(h)/h]h$ com $\lim_{h \rightarrow 0} [r(h)/h] = 0$, logo $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, ou seja, f é contínua no ponto a . $\square$

Exemplo 10. A função modular, $f(x) = |x|$, é um exemplo clássico de uma função contínua em todos os pontos, mas não é diferenciável em $x = 0$. Isso ocorre porque a derivada à esquerda e à direita em $x = 0$ não coincidem. Precisamente, seja $\varphi(x) = x$ se $x > 0$ e $\varphi(x) = -x$ se $x < 0$. Logo $\varphi'(x) = 1$ para $x > 0$ e $\varphi'(x) = -1$ se $x < 0$. No ponto $x = 0$ não existe a derivada $\varphi'(0)$. De fato, existem $\varphi'_+(0) = 1$ e $\varphi'_-(0) = -1$.

Observação 3. *O Teorema 1 (com $\lim_{h \rightarrow 0^+} r(h)/h$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} r(h)/h$) vale para derivadas laterais. E seu corolário também. Por exemplo, se existe a derivada à direita $f'_+(a)$ então f é contínua à direita no ponto a , isto é, $f(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h)$. Em particular, se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e existem ambas as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ então f é contínua no ponto a . (Mesmo que essas derivadas laterais sejam diferentes.)*

1.2 Interpretação Geométrica

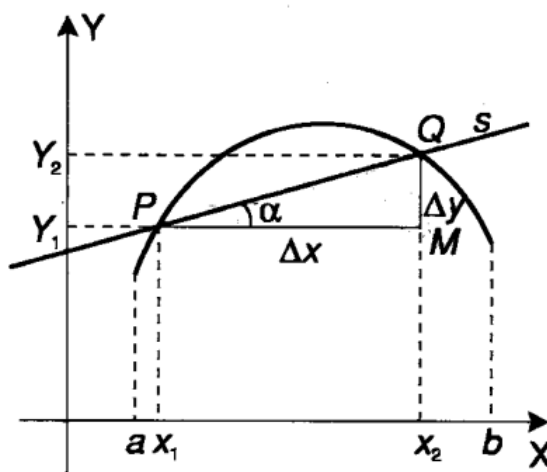
Para trazermos a ideia geométrica da derivada, vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado. As ideias que usaremos, foram introduzidas no século XVIII, por Newton e Leibniz.

Definição 6. Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b) , como na Figura 1.1. Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q . Considerando o triângulo retângulo PMQ , na Figura 1.1, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

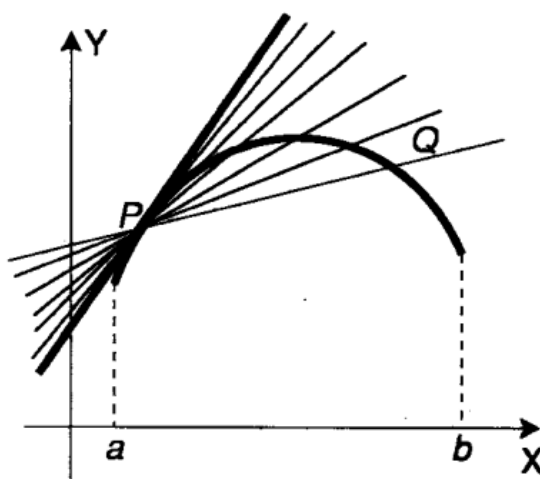
Figura 1.1: Interpretação geométrica da definição de derivada.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [4]

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P . Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P , a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura 1.2).

Figura 1.2: Inclinação da reta secante.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [4]

Definição 7. Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P , ou também inclinação da curva em P . Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um

ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1.1)$$

quando o limite existe.

Usando $x_2 = x_1 + h$ podemos reescrever o limite acima na forma

$$m(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(x_1)}{h}. \quad (1.2)$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P .

Assim como foi visto na Definição 2, este limite em (1.1) e (1.2) nos dá a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 , que representa a inclinação da curva neste ponto.

1.3 Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia estabelece que se f e g são funções diferenciáveis nos pontos correspondentes a e $b = f(a)$, então a composição $g \circ f$ também é diferenciável em a , com a derivada dada por $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. O corolário subsequente afirma que, se f é uma bijeção com derivada não nula em a , então sua inversa $g = f^{-1}$ é diferenciável em $f(a)$, com a derivada dada por $g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. Esses resultados são fundamentais, pois permitem derivar funções compostas e suas inversas de forma eficiente e precisa.

Teorema 2 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, com $x = a$ e $y = b$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, se $a + h \in X$ tem-se

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Usando, $k = f(a + h) - f(a)$, tem-se ainda

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot (f(a + h) - f(a)) + s(k), \text{ com } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{s(k)}{k} = 0.$$

A continuidade de f no ponto a assegura que $h \rightarrow 0$ implica $k \rightarrow 0$. (Note que k é função de h .) Assim,

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + \sigma,$$

onde $\sigma = g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k)$. Vemos que $\sigma = \sigma(h)$ é função de h . Pelo Teorema 1, concluiremos que $g \circ f$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, se mostrarmos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0$. Ora,

$$\frac{\sigma(h)}{h} = g'(f(a)) \cdot \frac{r(h)}{h} + \frac{s(k)}{h}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{s(k)}{h} &= \frac{s(k)}{k} \cdot \frac{k}{h} \\ \frac{k}{h} &= \frac{s(k)}{k} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(k)}{h} = 0$ e consequentemente, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0$. $\square$

Exemplo 11. Derivando a função, $q(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ utilizando a Regra da Cadeia, temos que $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x^2 + 1$. Assim, usando que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f'(x) = 2x$, segue que

$$g'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exemplo 12. Derivando a função, $h(x) = \sin(x^2)$ utilizando a regra da cadeia, temos que $g(x) = \sin(x)$ e $f(x) = x^2$. Assim, usando que $g'(x) = \cos(x)$ e $f'(x) = 2x$, segue que

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Exemplo 13. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, consideremos as funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = f(x^2)$ e $h(x) = f(x)^2$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$ e $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

Corolário 2. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(b) = 1/f'(a)$.

Demonstração. Com efeito, se $x_n \in X - \{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ então, como f é injetiva e contínua no ponto a , tem-se $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ e $\lim y_n = b$. Portanto, $b \in Y \cap Y'$. Se g for derivável no ponto b , a igualdade $g(f(x)) = x$, válida para todo $x \in X$, juntamente com a Regra da Cadeia, fornece $g'(b) \cdot f'(a) = 1$. Em particular, $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, se $f'(a) \neq 0$ então, para qualquer sequência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ com $\lim y_n = b$, a continuidade de g no ponto b nos dá $\lim x_n = a$, portanto $g'(b)$ é igual a

$$\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim \left[\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)} \right]^{-1} = \lim \left[\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Exemplo 14. A função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = x^3$, é um homeomorfismo. Além disso, $f'(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$ e $f'(a) \neq 0$ para todo $a \neq 0$. Sabemos também que

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 2,

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} \quad \forall a \neq 0.$$

Exemplo 15. Para $n \in \mathbb{N}$ fixo, a função $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $g(x) = \sqrt[n]{x}$, é derivável no intervalo $(0, +\infty)$ com $g'(x) = \frac{1}{(n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}})}$. Com efeito, g é a inversa da bijeção $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $f(x) = x^n$. Pelo Corolário 2, usando $y = x^n$, temos $g'(y) = 1/f'(x)$ se $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$, isto é, se $x \neq 0$. Assim, $g'(y) = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{y^{n-1}}}$ e, mudando de notação, $g'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$. No ponto $x = 0$, a função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ não é derivável (salvo quando $n = 1$).

1.4 Derivada e Crescimento Local

Apresentaremos definições importantes relacionadas a derivadas e crescimento local de funções reais. Começamos com a introdução de propriedades decorrentes das de-

rivadas à direita e à esquerda, seguidas pelas definições de máximo local, máximo local estrito, mínimo local e mínimo local estrito em um ponto específico. Em seguida apresentamos exemplos ilustrativos para consolidar os conceitos discutidos.

Teorema 3. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.

Demonstração. Temos que $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) - f(a)] / (x - a) = f'_+(a) > 0$. Pela definição de limite à direita, tomando $\epsilon = f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in X, a < x < a + \delta &\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) + \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - f'_+(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 2f'_+(a) \\ &\Rightarrow 0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\Rightarrow 0 < f(x) - f(a) \\ &\Rightarrow f(a) < f(x). \end{aligned}$$

□

Exemplo 16. Considere $f(x) = x^2$ e $X = \mathbb{R}$. Verifiquemos se este exemplo satisfaz as condições do Teorema 3. A função $f(x) = x^2$ é derivável à direita em todos os pontos $a \in \mathbb{R}$. A derivada à direita de $f(x) = x^2$ em a é $f'_+(a) = 2a$. Se escolhermos $a = 1$, então $f'_+(1) = 2$, que é positivo. Agora, conforme o Teorema 3, dado $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$, $a < x < a + \delta$, temos $f(a) < f(x)$. Escolhendo $a = 1$. Agora, precisamos encontrar δ tal que $1 < x < 1 + \delta$ implica $f(1) < f(x)$. Vamos verificar isso:

$$f(1) = 1^2 = 1.$$

Agora, escolhendo $\delta = 0.5$, temos:

$$f(x) = x^2 \quad \text{para} \quad 1 < x < 1.5$$

e

$$f(1) = 1 < f(x) \quad \text{para} \quad 1 < x < 1.5.$$

Portanto, para $f(x) = x^2$ com $X = \mathbb{R}$ e $a = 1$, o teorema é satisfeito, pois encontramos um δ tal que $f(a) < f(x)$ para $a < x < a + \delta$.

Similarmente ao Teorema 3, iremos obter mais três novos teoremas onde iremos enunciar e demonstrar a seguir.

Teorema 4. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) > f(x)$.*

Demonstração. Temos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) < 0.$$

Pela definição de limite à direita, tomando $\epsilon = -f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in X, a < x < a + \delta &\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) + \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - (-f'_+(a)) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) - f'_+(a) \\ &\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \\ &\Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \\ &\Rightarrow f(a) > f(x). \end{aligned}$$

□

Exemplo 17. Considere $f(x) = -x^2$ e $X = \mathbb{R}$. Verifiquemos se este exemplo satisfaz as condições do Teorema 4. A função $f(x) = -x^2$ é derivável à direita em todos os pontos $a \in \mathbb{R}$. A derivada à direita de $f(x) = -x^2$ em a é $f'_+(a) = -2a$. Se escolhermos $a = 1$, então $f'_+(1) = -2$, que é negativo. Agora, segundo o Teorema 4, dado $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$, $a < x < a + \delta$, temos $f(a) > f(x)$. Escolhendo $a = 1$. Agora, precisamos encontrar δ tal que $1 < x < 1 + \delta$ implica $f(1) > f(x)$. Vamos verificar isso:

$$f(1) = -1^2 = -1.$$

Agora, escolhendo $\delta = 0.5$, temos:

$$f(x) = -x^2 \quad \text{para} \quad 1 < x < 1.5$$

e

$$f(1) = -1 > f(x) \quad \text{para} \quad 1 < x < 1.5.$$

Portanto, para $f(x) = -x^2$ com $X = \mathbb{R}$ e $a = 1$, o teorema é satisfeito, pois encontramos um δ tal que $f(a) > f(x)$ para $a < x < a + \delta$.

Teorema 5. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$, com $f'_-(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a - \delta < x < a$ implicam $f(x) < f(a)$.*

Demonstração. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0.$$

Pela definição de limite à esquerda, tomando $\epsilon = f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in X, \quad a - \delta < x < a &\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) + \epsilon \\ &\Rightarrow f'_+(a) - f'_+(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 2f'_+(a) \\ &\Rightarrow 0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\Rightarrow 0 < -(f(x) - f(a)) \\ &\Rightarrow f(x) < f(a). \end{aligned}$$

□

Teorema 6. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$, com $f'_-(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a - \delta < x < a$ implicam $f(x) < f(a)$.*

Demonstração. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) < 0.$$

Pela definição de limite à direita, tomando $\epsilon = -f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 x \in X, \ a - \delta < x < a &\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < \epsilon \\
 &\Rightarrow f'_+(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) + \epsilon \\
 &\Rightarrow f'_+(a) - (-f'_+(a)) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'_+(a) - f'_+(a) \\
 &\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \\
 &\Rightarrow -(f(x) - f(a)) < 0 \\
 &\Rightarrow f(x) > f(a).
 \end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente então suas derivadas laterais, onde existem, são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração. Com efeito, se alguma derivada lateral, digamos $f'_+(a)$, fosse negativa então o (análogo do) Teorema 3 nos daria $x \in X$ com $a < x$ e $f(x) < f(a)$, que é uma contradição. □

Corolário 4. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Exemplo 18. Escolhendo $a = 0$ como um ponto de acumulação bilateral para X , e considerando a função $f(x) = e^x$, temos, dado $a \in X$ como um ponto de acumulação bilateral (no caso, $a = 0$), e se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a com $f'(a) > 0$ (o que é verdade para $f(x) = e^x$ com $f'(a) = e^0 = 1$), então o Corolário 4 afirma que existe um $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in X$ com $a - \delta < x < a < y < a + \delta$, temos que $f(x) < f(a) < f(y)$. Portanto, para $X = \mathbb{R}$ e $a = 0$, implica que existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in \mathbb{R}$ com $-\delta < x < 0 < y < \delta$, temos $e^x < e^0 < e^y$. Isso confirma que a função $f(x) = e^x$ é localmente crescente em torno do ponto $a = 0$.

Definição 8. Dizemos que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$, diz-se que f tem um máximo local estrito no ponto a .

Definição 9. Dizemos que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo local no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta$ implicam $f(a) \leq f(x)$. Quando $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(a) < f(x)$, diz-se que f tem um mínimo local estrito no ponto a .

Exemplo 19. A função $f(x) = \cos(x)$ assume seu valor máximo (local e global) de 1 infinitas vezes, uma vez que $\cos(2n\pi) = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ para todo x . Do mesmo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer inteiro.

Definição 10. Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de mínimo absoluto para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de máximo absoluto.

Corolário 5. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.

Demonstração. Com efeito, se fosse $f'_+(a) > 0$ então, pelo Teorema 3 teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a , logo f não teria máximo local no ponto a . $\square$

Naturalmente, surgem novos corolários análogos ao Corolário 5.

Corolário 6. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um mínimo local então $f'_+(a) \geq 0$.

Corolário 7. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$ e tem aí um máximo local então $f'_-(a) \leq 0$.

Corolário 8. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto $a \in X \cap X'_-$ e tem aí um mínimo local então $f'_-(a) \geq 0$.

Corolário 9. Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui um máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.

Demonstração. Com efeito, pelo Corolário 5 temos $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue-se que $f'(a) = 0$. $\square$

Observação 4. Do Teorema 3 e seu Corolário 4 não se pode concluir que uma função com derivada positiva num ponto a seja crescente numa vizinhança de a (a menos que f' seja contínua no ponto a). Tudo o que se pode garantir é que $f(x) < f(a)$ para $x < a$, x próximo de a , e que $f(x) > f(a)$ se x está próximo de a , com $x > a$.

Exemplo 20. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \sin(1/x) + x/2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função f é derivável, onde $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ e $g(x) = x/2$. Como visto no Exemplo 8, $h'(0) = 0$

$$f'(0) = h'(0) + g'(0) = 0 + 1/2 = 1/2.$$

E novamente pelo Exemplo 8, para $h'(x)$, temos

$$f'(x) = h'(x) + g'(x) = 2x \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x^2} x^2 + 1/2 = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) + 1/2,$$

para $x \neq 0$. Se tomarmos $x \neq 0$ muito pequeno com $\sin(1/x) \cong 0$ e $\cos(1/x) \cong 1$ teremos $f'(x) < 0$. Se escolhermos $x \neq 0$ pequeno com $\sin(1/x) \cong 1$ e $\cos(1/x) \cong 0$, teremos $f'(x) > 0$. Logo existem pontos x arbitrariamente próximos de 0 com $f'(x) < 0$ e com $f'(x) > 0$. Segue-se do Corolário 3 que f não é monótona em vizinhança alguma de 0.

Exemplo 21. No Corolário 3, mesmo que f seja monótona crescente e derivável, não se pode garantir que sua derivada seja positiva em todos os pontos. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, é crescente mas sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula para $x = 0$.

Exemplo 22. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem, digamos, um mínimo local no ponto $a \in X$, não se pode concluir daí que seja $f'(a) = 0$. Em primeiro lugar, $f'(a)$ pode não existir. Este é o caso de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, que possui um mínimo local no ponto $x = 0$, onde se tem $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, em conformidade com o Corolário 3. Em segundo lugar, mesmo que f seja derivável no ponto a , este pode não ser um ponto de acumulação bilateral e aí pode ocorrer $f'(a) \neq 0$. É o caso da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Temos $f'(0) = f'(1) = 1$ embora f tenha um mínimo no ponto $x = 0$ e um máximo no ponto $x = 1$.

1.5 Pontos Críticos

Definimos ponto crítico de uma função derivável como aquele em que a sua derivada é igual a zero. Apresentamos um exemplo para melhor compreensão. Além disso, afirmamos que se um ponto c é crítico, então é ponto de mínimo ou máximo local, mas a recíproca não é verdadeira, como demonstrado pelo exemplo de uma função que possui um ponto crítico, mas não tem máximo ou mínimo local.

Definição 11. Um ponto $c \in X$ chama-se ponto crítico da função derivável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando $f'(c) = 0$.

Exemplo 23. Determinemos os pontos críticos da função

$$f(x) = x(x-1)^3.$$

Inicialmente, calculemos a derivada de f .

$$f'(x) = 3x(x-1)^2 + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x+x-1) = (x-1)^2(4x-1).$$

Assim, os pontos críticos de f são obtidos resolvendo-se a equação $(x-1)^2(4x-1) = 0$ cujas soluções são $x = 1$ e $x = 1/4$.

Teorema 7 (Teorema de Fermat). *Se $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ é um ponto de mínimo ou de máximo local, então c é crítico.*

Demonstração. Seja

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, & \text{se } x \neq c \\ f'(c), & \text{se } x = c. \end{cases}$$

A função Q é contínua em c , pois

$$\lim_{x \rightarrow c} Q(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = Q(c).$$

Queremos provar que $Q(c) = 0$. Para isso mostraremos que as suposições $Q(c) > 0$ e $Q(c) < 0$ implicam uma contradição. Se $Q(c) > 0$, pelo princípio de conservação do sinal, existe uma vizinhança de c na qual $Q(x) > 0$. Nesta vizinhança o numerador da razão $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ deve ter o mesmo sinal que o denominador, ou seja, $f(x) > f(c)$ se $x > c$ e $f(x) < f(c)$ se $x < c$. Estas desigualdades contradizem a hipótese de que c é um mínimo local ou máximo local, portanto a hipótese $Q(c) > 0$ deve ser falsa. Se $Q(c) < 0$, pelo mesmo raciocínio temos que $f(x) < f(c)$ se $x > c$ e $f(x) > f(c)$ se $x < c$, também violando a hipótese de que c é um extremo de f . Logo a suposição $Q(c) < 0$ também deve ser falsa, restando apenas a possibilidade $Q(c) = 0$. $\square$

A recíproca do Teorema 7 é falsa, basta analisar a bijeção crescente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, não pode ter máximo nem mínimo local, mas admite o ponto crítico

$x = 0$.

1.6 Teste da Primeira Derivada

Apresentamos o Teorema de Rolle, que estabelece condições para a existência de pontos críticos em funções deriváveis com valores iguais nos extremos de um intervalo. O Teorema do Valor Médio é introduzido como uma ferramenta para relacionar valores médios de funções e suas derivadas. Por fim, apresentamos o Teste da Primeira Derivada como uma técnica para identificar máximos e mínimos locais em intervalos fechados. Iremos exemplificar ao longo do texto para facilitar a compreensão dos conceitos teóricos discutidos.

Teorema 8 (Weierstrass). *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no compacto K de $\mathbb{R}^n$. Então, f assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em K .*

Teorema 9 (Rolle). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c , estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. $\square$

Apresentaremos o Teorema do Valor Médio a seguir para utilizá-lo no Teorema 11.

Teorema 10 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$,

onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, para mostrar isso, temos que

$$\begin{aligned}
 g(a) &= f(a) - d \cdot a \\
 &= f(a) - a \cdot \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a} \\
 &= f(a) + (-a + b - b) \cdot \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a} \\
 &= f(a) + (-a + b) \cdot \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a} - b \cdot \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a} \\
 &= f(a) + [f(b) - f(a)] - b \cdot d \\
 &= f(b) - d \cdot b \\
 &= g(b).
 \end{aligned}$$

Ou seja, $d = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Pelo Teorema 9, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$g'(x) = f'(x) - d$$

como,

$$0 = g'(c) = f'(c) - d.$$

Assim,

$$f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Teorema 11. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b) .*

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) . Pelo Teorema do Valor Médio, segue que

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.3)$$

Em (a). Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade em (1.3), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é crescente em $[a, b]$.

Em (b). Neste caso, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade em (1.3), concluimos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e dessa forma $f(x_2) < f(x_1)$. Logo, f é decrescente em $[a, b]$. $\square$

Exemplo 24. Seja a função $f(x) = x^3 + 1$ queremos determinar os intervalos no qual é crescente ou decrescente. Derivando a função e analisando quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$. Temos, $f'(x) = 3x^2$. Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluimos que a função é sempre crescente.

Exemplo 25. Seja a função $f(x) = x^2 + x$ queremos determinar os intervalos no qual f é crescente ou decrescente. Temos $f'(x) = 2x - 1$. Note que para $x > 1/2$, $f'(x) > 0$ e para $x < 1/2$, $f'(x) < 0$. Logo f é crescente para $x > 1/2$ e decrescente para $x < 1/2$.

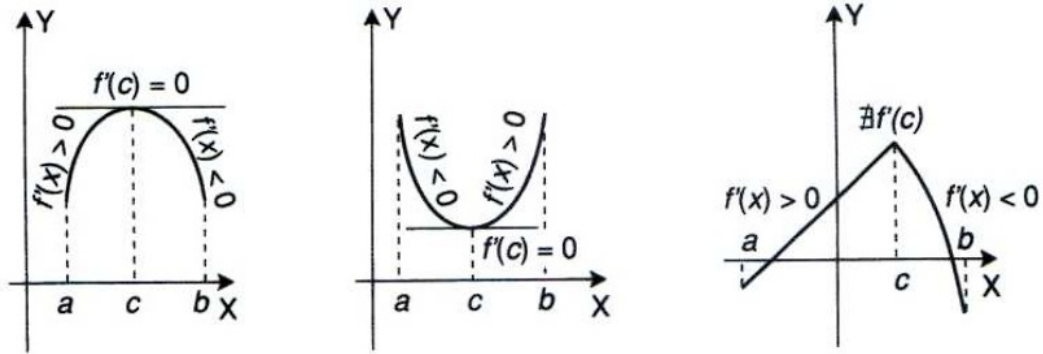
Teorema 12 (Teste da Primeira Derivada). *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b) , exceto possivelmente num ponto c .*

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo local em c .*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo local em c .*

Demonstração. Usando o Teorema 11, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo local em c . E pelo Teorema 11, concluimos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) . Portanto, f tem um mínimo local em c . $\square$

Figura 1.3: Ilustração das diversas possibilidades do Teorema 12.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [4]

Exemplo 26. Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos locais da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$. Temos $f'(x) = 3x^2 - 7$, para todo x . Fazendo $f'(x) = 0$, vem $3x^2 - 7 = 0$, assim, $x = \pm\sqrt{7/3}$. Portanto, os pontos críticos da função f são $+\sqrt{7/3}$ e $-\sqrt{7/3}$. Para $x < -\sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva. Aplicando o Teorema 11, concluímos que f é crescente em $(-\infty, -\sqrt{7/3})$. Para $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $[\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}]$.

Para $x > \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva e então, f é crescente em $[\sqrt{7/3}, +\infty)$. Pelo teste da derivada primeira concluímos que f tem um máximo local em $-\sqrt{7/3}$ e f tem um mínimo local em $+\sqrt{7/3}$.

Capítulo 2

Derivadas em $\mathbb{R}^n$

O segundo capítulo deste trabalho explora as derivadas em $\mathbb{R}^n$, onde n representa o número de variáveis da função. Começamos com o conceito de derivadas parciais, que são medidas da taxa de variação de uma função em relação a cada uma de suas variáveis independentes, mantendo as outras constantes. Isso permite entender como a função varia em diferentes direções no espaço multidimensional. A classe de funções C^1 , que consiste em funções cujas derivadas parciais são contínuas, é introduzida como fundamental para garantir a suavidade e a continuidade das funções em $\mathbb{R}^n$. Essa propriedade é essencial para muitas aplicações em análise matemática e física. O estudo de máximos e mínimos de funções de várias variáveis se concentra em identificar pontos críticos, onde as derivadas parciais são nulas. A análise dos pontos críticos é complementada pelo teste da segunda derivada, que envolve a matriz Hessiana da função. Esse teste ajuda a determinar a natureza desses pontos como máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela, contribuindo para compreender o comportamento da função em diferentes regiões de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Derivadas Parciais

Definimos as derivadas parciais de uma função em um ponto, indicando as taxas de variação locais da função em relação a cada uma de suas variáveis independentes. Também destacamos exemplos que ilustram a importância das derivadas parciais na compreensão do comportamento das funções, especialmente em relação à continuidade e ao crescimento em diferentes direções do espaço.

Definição 12. Seja E um espaço vetorial. Dados $a, b \in E$, o segmento de reta de extremos

a e b é o conjunto $[a, b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$. Quando E é um espaço vetorial normado, a aplicação $f : [0, 1] \rightarrow E$, definida por $f(t) = (1-t)a + tb$, é contínua e se chama o caminho retilíneo de extremos a e b .

Definição 13. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, a i -ésima derivada parcial de f no ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ é o número

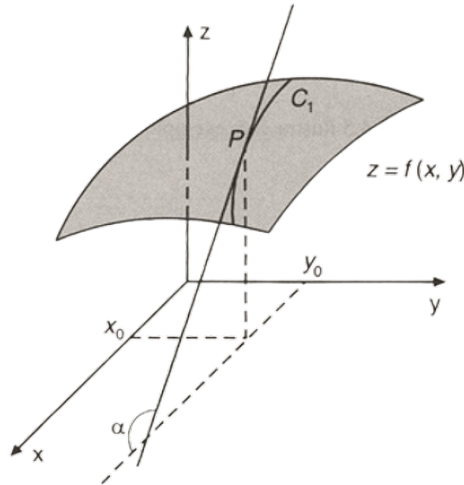
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)}{t},$$

caso este limite exista. Como U é aberto, podemos achar $\delta > 0$ tal que $a + te_i \in U$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Então está bem definido o caminho retilíneo $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$, $\lambda(t) = a + te_i$.

A definição acima diz que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$, ou seja, é a derivada, no ponto $t = 0$, da função real $f \circ \lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos observar que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ significa a derivada de f em relação a sua i -ésima variável, seja qual for o nome que se atribua a ela. Assim podemos denotar

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i}, \text{ etc.}$$

Figura 2.1: Interpretação geométrica das derivadas parciais.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [9]

Observação 5. Uma notação alternativa, que evitaria mal-entendidos, seria $\partial_i f$. Preferimos a notação tradicional $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ porque ela é conveniente quando se usa a regra da cadeia.

Observação 6. Quando $n = 2$ ou $n = 3$, escrevemos (x, y) em vez de (x_1, x_2) e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2, x_3) . Respectivamente, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a derivada parcial de f em relação à primeira variável, $\frac{\partial f}{\partial z}$ é a derivada parcial de f em relação à terceira variável.

Exemplo 27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. Como $f(0, y) = 0$ para todo y e $f(x, 0) = 0$ para todo x , segue-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Entretanto a função f é descontínua na origem $(0, 0)$. Se chamarmos de θ o ângulo que o vetor não-nulo $v = (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ forma com o eixo das abcissas, veremos que

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \cdot \sin \theta.$$

Logo, atribuindo diferentes valores a θ , podemos fazer com que $f(x, y)$ tenha limites diferentes quando (x, y) tende para $(0, 0)$ ao longo do segmento $x = t \cdot \cos \theta, y = t \cdot \sin \theta$, ou seja, quando $t \rightarrow 0$.

Observação 7. O exemplo 27 mostra que a existência das n derivadas parciais no ponto a não assegura a continuidade da função f nesse ponto. Para cada $i = 1, \dots, n$, a função $\lambda(t) = f(a + te_i)$ é essencialmente a restrição de f ao segmento $(a - \delta e_i, a + \delta e_i)$ da reta que passa pelo ponto a e é paralela ao i -ésimo eixo coordenado de $\mathbb{R}^n$. A derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ dá informação apenas sobre o comportamento de f ao longo desse intervalo. Em particular, a existência das n derivadas parciais de f no ponto a implica que a restrição de f aos n intervalos paralelos aos eixos, que se cortam no ponto a , é contínua, embora não garanta a continuidade de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ em a .

Definição 14. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe e é positiva em todos os pontos do segmento de reta $[a - \delta e_i, a + \delta e_i]$, paralelo ao i -ésimo eixo coordenado, então f é crescente ao longo desse segmento: $s < t \Rightarrow f(a + se_i) < f(a + te_i)$, desde que $|s - a| \leq \delta$ e $|t - a| \leq \delta$. Isto resulta imediatamente do resultado análogo para funções de uma variável.

A noção de derivada parcial também faz sentido para aplicações $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $a \in U$, põe-se, para cada $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$. Se $f = (f_1, \dots, f_n)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right).$$

Daremos prioridade às funções com valores numéricos. Para elas tem sentido o vetor gradiente, conceito de forte apelo intuitivo, que contribui para entendermos como cresce (ou decresce) a função.

2.2 Funções de Classe C^1

Apresentaremos conceitos fundamentais de cálculo diferencial para funções de várias variáveis. Começamos definindo funções de classe C^1 , que são aquelas com todas as suas derivadas parciais contínuas. Em seguida, introduzimos o conceito de diferenciabilidade em um ponto e estender essa definição para toda a função. A partir dessas definições, enunciaremos teoremas importantes, como o Teorema que afirma que toda função de classe C^1 é diferenciável. Além disso, apresentamos as propriedades do gradiente, que é um vetor que aponta na direção de maior crescimento de uma função e é ortogonal às curvas de nível da função. Abordamos também o Teorema do Valor Médio e o Teorema do Valor Intermediário, que são ferramentas importantes no estudo das funções diferenciáveis. Por fim, são apresentados exemplos que ilustram as propriedades discutidas anteriormente.

Definição 15. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui as n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Ficam então definidas n -funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Se estas funções forem contínuas em U , diremos que f é uma função de classe C^1 e escreveremos $f \in C^1$.

Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se de classe C^1 quando cada uma de suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 .

Muitas propriedades importantes das funções de classe C^1 resultam de serem elas diferenciáveis no sentido seguinte.

Definição 16. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando cumpre as seguintes condições:

- a) Existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.
- b) Para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$, se tem

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + r(v), \text{ onde } \lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Observação 8. No item a) acima, e sempre que fizermos considerações em torno de um ponto específico a , escreveremos, por simplicidade, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ em vez de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. No item b), a essência da definição da diferenciabilidade está na condição $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, pois a igualdade que define o “resto” $r(v)$ pode ser escrita para qualquer função que possua as n derivadas parciais.

De $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ resulta que $\lim_{v \rightarrow 0} r(v) = 0$, pois $r(v) = \left(\frac{r(v)}{|v|} \right) \cdot |v|$. Segue-se que $\lim_{v \rightarrow 0} [f(a + v) - f(a)] = 0$. Portanto, toda função diferenciável no ponto a é contínua nesse ponto.

Definição 17. Diremos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável quando f for diferenciável em todos os pontos de U .

Observação 9. O Teorema 1 estabelece que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto a se e somente se ela pode ser aproximada por uma função linear nesse ponto, com um coeficiente específico c que corresponde à derivada da função em a . Essa condição é equivalente a dizer que a função tem uma reta tangente bem definida em a . Por outro lado, a definição de uma função ser diferenciável em todo um conjunto implica que a função tem derivadas definidas em todos os pontos desse conjunto. Em resumo, enquanto o teorema fornece uma condição precisa para a diferenciabilidade em um ponto específico, a definição amplia esse conceito ao considerar todos os pontos de um conjunto, indicando que a função é diferenciável em todo esse conjunto se cada ponto individual satisfaz a condição do Teorema. Na Definição 16, vemos que $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i$ é linear. Assim, percebemos que em $\mathbb{R}^n$ uma função é diferenciável quando pode ser aproximada por uma função linear. Logo, a Definição 16 é uma generalização da definição de diferenciabilidade na reta.

Teorema 13. *Toda função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração. Por simplicidade, suporemos $U \subset \mathbb{R}^2$. O caso geral se trata analogamente, apenas com uma notação mais elaborada. Fixemos $c = (a, b) \in U$ e tomemos $v = (h, k)$ tal que $c + v \in U$. Seja

$$r(v) = r(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k,$$

onde as derivadas são calculadas no ponto $c = (a, b)$. Podemos escrever

$$r(v) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k.$$

Pelo Teorema 12 (Teorema do Valor Médio) para funções de uma variável real, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que

$$r(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 k) \cdot k - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k,$$

logo,

$$\frac{r(v)}{|v|} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Quando $v \rightarrow 0$ os termos dentro dos colchetes acima tendem a zero, pela continuidade das derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Além disso, os termos fora dos colchetes têm valor absoluto < 1 . Portanto $\lim_{v \rightarrow 0} r(v)/|v| = 0$ e, então, f é diferenciável. $\square$

Corolário 10. *Toda função de classe C^1 é contínua.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Podemos escrever, conforme a expressão fornecida:

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha + \rho|v|$$

onde α é um vetor arbitrário e $\rho = \rho(v) = \frac{r(v)}{|v|}$ é tal que $\lim_{v \rightarrow 0} \rho = 0$. Queremos mostrar que f é contínua, ou seja, que $\lim_{v \rightarrow 0} [f(a + v) - f(a)] = 0$.

Podemos escrever:

$$|f(a+v) - f(a)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha + \rho |v| \right|.$$

Usando a desigualdade triangular, temos:

$$|f(a+v) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha \right| + |\rho| \cdot |v|$$

Como $|\rho| \cdot |v|$ tende a zero quando v tende a zero (porque $\lim_{v \rightarrow 0} \rho = 0$), podemos fazer com que essa parte da expressão seja arbitrariamente pequena.

Além disso, como f é de classe C^1 , então as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas. Isso implica que $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha \right|$ pode ser tornada arbitrariamente pequena escolhendo α pequeno o suficiente e, portanto, podemos fazer com que a parte $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha \right|$ seja também arbitrariamente pequena.

Assim, temos mostrado que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|v| < \delta$, então $|f(a+v) - f(a)| < \epsilon$, o que é a definição de continuidade.

Portanto, f é contínua em a , e como a foi escolhido arbitrariamente, f é contínua em todo o seu domínio.

□

Definição 18. O gradiente de uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in U$ é o vetor

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Se v é qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, a derivada direcional de f no ponto a , na direção de v é, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x_v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Estas definições permitem enunciar alguns corolários da Regra da Cadeia. O primeiro deles mostra que, quando f é diferenciável no ponto a , a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe em relação a qualquer vetor v , dá uma expressão para essa derivada em termos das derivadas parciais de f e das coordenadas de v e, finalmente, mostra que, na definição de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, em vez do caminho retilíneo $t \rightarrow a + tv$, pode-se usar qualquer caminho $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ desde que se tenha $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$.

Corolário 11. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$. Dado o vetor

$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ é qualquer caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$, temos

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i.$$

Basta aplicar diretamente a fórmula

$$(f \circ \lambda)' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{dt},$$

observando que, para $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, tem-se $\alpha_i = \frac{d\lambda_i}{dt}(0)$. Notar ainda que $\frac{df}{dv}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ com $\lambda(t) = a + tv$, pois $\lambda'(0) = v$.

Corolário 12 (Teorema do Valor Intermediário). Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, se o segmento de reta $[a, a + v]$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(a + v) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \text{grad } f(a + \theta v) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i, \text{ onde } v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Demonstração. Considerando o caminho retilíneo $\lambda : [0, 1] \rightarrow U$, dado por $\lambda(t) = a + tv$, vemos que $f(a + v) - f(a) = (f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0)$. Pelo Teorema 12 (Teorema do Valor Médio) para funções de uma variável real, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0) = (f \circ \lambda)'(\theta)$. Pelo Teorema 2 (Regra da Cadeia),

$$(f \circ \lambda)'(\theta) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \text{grad } f(a + \theta v), v \rangle.$$

□

Teorema 14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\langle u, v \rangle \leq |u||v|, \text{ quaisquer que sejam } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, consideremos os vetores u e v em $\mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que:

$$\langle u, v \rangle \leq |u||v|$$

onde $\langle u, v \rangle$ denota o produto interno entre u e v , e $|u|$ e $|v|$ denotam as normas de u e v , respectivamente. Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^n$. O produto interno de u e v é:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

As normas de u e v são:

$$|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Para qualquer escalar real λ , o vetor $u - \lambda v$ pertence a $\mathbb{R}^n$. A norma ao quadrado desse vetor é sempre não-negativa:

$$|u - \lambda v|^2 \geq 0.$$

Expandindo essa expressão, temos:

$$|u - \lambda v|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle.$$

Usando a linearidade do produto interno, obtemos:

$$|u - \lambda v|^2 = \langle u, u \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Substituindo as normas dos vetores u e v , obtemos:

$$|u - \lambda v|^2 = |u|^2 - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 |v|^2.$$

A expressão $|u - \lambda v|^2 \geq 0$ deve ser verdadeira para qualquer valor de λ . Portanto, a função quadrática:

$$f(\lambda) = |u|^2 - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 |v|^2,$$

é não-negativa para qualquer λ .

Para que $f(\lambda) \geq 0$ para qualquer λ , o discriminante da função quadrática deve ser menor ou igual a zero. A função quadrática $a\lambda^2 + b\lambda + c$ tem discriminante dado por $b^2 - 4ac$.

Aqui, $a = |v|^2$, $b = -2\langle u, v \rangle$ e $c = |u|^2$. O discriminante é:

$$(-2\langle u, v \rangle)^2 - 4|v|^2|u|^2 \leq 0.$$

Simplificando, obtemos:

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4|v|^2|u|^2 \leq 0.$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2|v|^2.$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|.$$

Como $\langle u, v \rangle$ é um número real não negativo, podemos omitir o valor absoluto no produto interno:

$$\langle u, v \rangle \leq |u||v|.$$

Portanto, demonstramos diretamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Corolário 13. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se o segmento de reta $[a, a + v]$ estiver contido em U e existir $M > 0$ tal que $|\text{grad } f(a + tv)| \leq M$ para todo $t \in [0, 1]$ então $|f(a + v) - f(a)| \leq M \cdot |v|$.*

Demonstração. Com efeito, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|f(a + v) - f(a)| = |\text{grad } f(a + \theta v), v| \leq |\text{grad } f(a + \theta v)| |v| \leq M \cdot |v|.$$

$\square$

Observação 10. *Em particular, se U é convexo, f é diferenciável e $|\text{grad } f(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ então $|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$ quaisquer que sejam $x, y \in U$.*

Definição 19. Uma cisão do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$ onde $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A . Um exemplo é a cisão trivial $X = X \cap \emptyset$. Já $\mathbb{R} \setminus 0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão não-trivial.

Definição 20. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando só admite a cisão trivial. Caso contrário, diz-se que X é desconexo.

Corolário 14. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se U é conexo e $\text{grad } f(x) = 0$ para todo $x \in U$ então f é constante.*

Demonstração. Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio (Corolário 12), f é constante ao longo de todo segmento de reta contido em U . Como o aberto U é conexo, dois quaisquer de seus pontos podem ser ligados por um caminho poligonal (justaposição de segmentos de reta) contido em U . $\square$

Definição 21. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , o conjunto $f^{-1}(c) = \{x \in U; f(x) = c\}$ é, para todo $c \in \mathbb{R}$, chamado o conjunto de nível c da função f . Quando $U \subset \mathbb{R}^n$ e $n = 2$ esse conjunto é geralmente chamado a curva ou linha de nível c de f , a qual é definida pela equação $f(x, y) = c$. Analogamente, quando $n = 3$, o conjunto $f^{-1}(c)$, definido pela equação $f(x, y, z) = c$ costuma ser chamado a superfície de nível c da função f . Deve-se observar, porém, que para certas funções especialmente escolhidas, tais conjuntos podem ser bem diferentes daquilo que se imagina como uma curva ou uma superfície.

Iremos mencionaremos a seguir algumas propriedades do gradiente. Elas justificam a importância desse vetor, o qual dá interessantes informações sobre o comportamento da função.

Propriedades 1. *Fixamos $a \in U$ e supomos que $\text{grad } f(a) \neq 0$. Então:*

1. *O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função é crescente;*
2. *Dentre todas as direções ao longo das quais a função cresce, a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido;*
3. *O gradiente de f no ponto a é ortogonal ao conjunto de nível de f que passa por a*

Demonstração. Note que usando $w = \text{grad } f(a)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial w}(a) = \langle \text{grad } f(a), w \rangle = |\text{grad } f(a)|^2 > 0.$$

Isto quer dizer que se $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ é tal que $\lambda \in C^1$, $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = \text{grad } f(a)$ então a função $t \mapsto f(\lambda(t))$ tem derivada positiva no ponto $t = 0$. Logo, diminuindo ϵ se necessário, $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ será uma função crescente. É este o significado de “ f cresce na direção do gradiente”.

Como $\partial f / \partial v = \langle \text{grad } f, v \rangle$, os vetores v que apontam para as direções ao longo das quais f cresce são aqueles para os quais se tem $\langle \text{grad } f, v \rangle > 0$, isto é, aqueles que formam um ângulo agudo com $\text{grad } f(a)$. Dizer que o crescimento de f é mais rápido na direção do gradiente significa o seguinte: se $v \in \mathbb{R}^n$ é tal que $|v| = |\text{grad } f(a)|$ então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial (\text{grad } f(a))}(a).$$

Com efeito, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \langle \text{grad } f(a), v \rangle \leq |\text{grad } f(a)| \cdot |v| \\ &= |\text{grad } f(a)|^2 = \frac{\partial f}{\partial (\text{grad } f(a))}(a). \end{aligned}$$

Esclareçamos agora a terceira das afirmações acima. Dizer que $w \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao conjunto de nível $f^{-1}(c)$ significa que, dado qualquer caminho $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow f^{-1}(c)$, diferenciável no ponto $t = 0$, com $\lambda(0) = a$, tem-se $\langle w, \lambda'(0) \rangle = 0$. Ora, $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$ significa que $f(\lambda(t)) = c$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, portanto $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é constante, igual a c , logo $(f \circ \lambda)'(0) = 0$, ou seja $\langle \text{grad } f(a), \lambda'(0) \rangle = 0$. Assim, $\text{grad } f(a)$ é ortogonal ao vetor velocidade no ponto $a = \lambda(0)$ de qualquer caminho diferenciável λ contido no conjunto de nível $f^{-1}(c)$. $\square$

Exemplo 28. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = ax + by$ (com $a^2 + b^2 \neq 0$), $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(x, y) = x^2 - y^2$. A linha de nível c de f é a reta definida pela equação $ax + by = c$. O vetor $\text{grad } f(x, y)$ é constante: $\text{grad } f = (a, b)$ em qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim as linhas de nível de f são retas paralelas umas às outras, todas perpendiculares ao vetor $v = (a, b)$. O conjunto de nível c da função $g(x, y) = x^2 + y^2$ é vazio se $c < 0$ e reduz-se ao ponto $(0, 0)$ quando $c = 0$. Para $c > 0$, a linha de nível c é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = c$, cujo centro é a origem e cujo raio é $\sqrt{c}$. O gradiente de g é o vetor $\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y)$, um vetor colinear com o raio, o que era de esperar pois a tangente da circunferência é perpendicular ao raio no ponto de contacto. A linha de nível 0 da função $h(x, y) = x^2 - y^2$ é o par de retas perpendiculares definidas pela equação $x^2 - y^2 = 0$, que equivale a “ $x + y = 0$ ou $x - y = 0$ ”. Se $c > 0$, $x^2 - y^2 = c$ define uma hipérbole cujo eixo é o eixo das abcissas; se $c < 0$ a hipérbole $x^2 - y^2 = c$ tem como eixo o eixo das ordenadas. O gradiente de h é o vetor $\text{grad } h(x, y) = (2x, -2y)$. Atribuindo valores particulares a x e y , vemos que este vetor é perpendicular à curva de

nível que passa em (x, y) e aponta na direção de crescimento de h .

Exemplo 29. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = ax + by$, com $a^2 + b^2 \neq 0$. A linha de nível c de f é a reta definida por $ax + by = c$. O vetor $\text{grad } f(x, y)$ é constante: $\text{grad } f = (a, b)$ em qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, as linhas de nível de f são retas paralelas umas às outras, todas perpendiculares ao vetor $v = (a, b)$.

Exemplo 30. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$. O conjunto de nível c da função $g(x, y)$ é vazio se $c < 0$ e reduz-se ao ponto $(0, 0)$ quando $c = 0$. Para $c > 0$, a linha de nível c é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = c$, cujo centro é a origem e cujo raio é $\sqrt{c}$. O gradiente de g é $\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y)$, um vetor colinear com o raio, como esperado, já que a tangente da circunferência é perpendicular ao raio no ponto de contato.

Exemplo 31. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^2 - y^2$. A linha de nível 0 da função $h(x, y)$ é o par de retas perpendiculares definidas pela equação $x^2 - y^2 = 0$, que equivale a $x + y = 0$ ou $x - y = 0$. Se $c > 0$, $x^2 - y^2 = c$ define uma hipérbole cujo eixo é o eixo das abscissas; se $c < 0$, a hipérbole $x^2 - y^2 = c$ tem como eixo o eixo das ordenadas. O gradiente de h é o vetor $\text{grad } h(x, y) = (2x, -2y)$. Atribuindo valores particulares a x e y , vemos que este vetor é perpendicular à curva de nível que passa em (x, y) e aponta na direção de crescimento de h .

2.3 Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis

Inicialmente, definimos pontos de máximo e mínimo absolutos (ou globais) de uma função como aqueles nos quais a função assume seus valores mais altos ou mais baixos em todo o seu domínio, respectivamente. Em seguida, ilustramos esses conceitos com exemplos simples, como a função quadrática em duas variáveis. Posteriormente, introduzimos os pontos de máximo e mínimo relativos (ou locais), que são os pontos onde a função assume valores mais altos ou mais baixos em uma vizinhança restrita. Estes são ilustrados com definições formais e exemplos.

Definição 22. Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de várias variáveis. Dizemos que $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in D_f$ é ponto de máximo absoluto ou global de f se, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}).$$

Dizemos que $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ é o valor máximo de f .

Exemplo 32. A função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ tem o ponto $(0, 0)$ um ponto de máximo absoluto ou global de f , pois para todo $(x, y) \in D_f$,

$$4 - x^2 - y^2 \leq f(0, 0) \text{ ou } 4 - x^2 - y^2 \leq 4 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

O valor máximo de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ é $f(0, 0) = 4$.

Definição 23. Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de várias variáveis. Dizemos que $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in D_f$ é ponto de mínimo absoluto ou global de f se, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}).$$

Dizemos que $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ é o valor mínimo de f .

Exemplo 33. $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $f(0, 0) = 0$ é o valor mínimo de f , pois, $f(x, y) \geq f(0, 0)$, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$.

Definição 24. Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de várias variáveis. Dizemos que:

- a) $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in D_f$ é ponto de máximo relativo ou local de f se existir uma bola aberta $B((x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}); r)$ tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \cap D_f$.
- b) $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in D_f$ é ponto de mínimo relativo ou local de f se existir uma bola aberta $B((x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}); r)$ tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \cap D_f$.

2.4 Pontos Críticos de uma Função de Várias Variáveis

Começamos com a definição de ponto crítico, que é um ponto onde o gradiente da função é zero. Observamos que funções podem ou não possuir pontos críticos, enquanto outras, como as do mesmo exemplo, possuem a origem como ponto crítico. Definimos pontos críticos em termos de derivadas parciais iguais a zero ou da falta de diferenciabilidade da função em um ponto. Geometricamente, esses pontos representam locais onde

o gráfico da função não possui um plano tangente ou o plano tangente é horizontal. Exploramos a relação entre pontos críticos e extremantes, observando que nem todo ponto crítico é um extremante e que um ponto crítico que não é um extremante é chamado de ponto de sela. Finalmente, ilustramos esses conceitos com exemplos simples, como a função quadrática em duas variáveis e a função polinomial $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$, identificando seus pontos críticos e destacando sua importância na análise de funções de várias variáveis.

Definição 25. Chama-se ponto crítico de uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um ponto $a \in U$ tal que $\text{grad } f(a) = 0$.

Observação 11. A função f do Exemplo 28 não possui ponto crítico. As funções g e h têm a origem como ponto crítico. Nota-se em ambos os casos uma quebra de regularidade na disposição das curvas de nível quando se atinge um nível em que há ponto crítico.

Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in U$ é um ponto crítico de f se as derivadas parciais $f_x(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ e $f_y(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ são iguais a zero ou se f não é diferenciável em $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in U$.

Geometricamente, podemos pensar nos pontos críticos de uma função $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como pontos em que o seu gráfico não tem plano tangente ou o plano tangente é horizontal.

Veremos que os pontos extremantes de $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ estão entre os seus pontos críticos. No entanto, um ponto crítico nem sempre é um ponto extremante.

Um ponto crítico que não é um ponto extremante é chamado de ponto de sela.

Exemplo 34. Verifique que o ponto $(0, 0)$ é ponto crítico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$. De fato, o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico pois,

$$f_x(0, 0) = 0 \text{ e } f_y(0, 0) = 0.$$

Proposição 1. Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in U$ é um ponto extremante local (ponto de máximo ou de mínimo local), então

$$f_x(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) = 0 \text{ e } f_y(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) = 0,$$

isto é, $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ é um ponto crítico de f

Demonstração. Vamos supor que $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}) \in U$ é um ponto de máximo local de f . Existe, então, uma bola aberta $B = B((x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}); r)$, tal que, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}).$$

Consideremos a função de uma variável, definida por

$$\begin{aligned} h &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) &= f(x, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \end{aligned}$$

onde I é um intervalo aberto que contém x_0 tal que, para todo $x \in I$, temos que $(x, y_0) \in B$. Temos que:

1. $h(x)$ é derivável em x_0 , e $h'(x_0) = f_x(x, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$.
2. x_0 é ponto interior de I e é um ponto de máximo local de $h(x)$. Então, $h'(x_0) = 0$ ou $f_x(x, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) = 0$.

De modo análogo, mostramos que $f_y(x_0, y_0) = 0$. □

Exemplo 35. Determine os pontos críticos de $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$. Como é uma função do tipo polinomial e daí suas derivadas parciais existem para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

para identificar os pontos críticos. Temos

$$f_x = 3y^2 + 3x^2 - 3 \text{ e } f_y = 6xy.$$

Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases}$$

Da equação $6xy = 0$ concluímos que $x = 0$ e $y = 0$. Fazendo $x = 0$, em $3y^2 + 3x^2 - 3 = 0$, temos

$$3y^2 - 3 = 0 \text{ ou } y = \pm 1.$$

Portanto, temos os pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Fazendo $y = 0$, também em $3y^2 + 3x^2 - 3 = 0$, temos

$$3x^2 - 3 = 0 \text{ ou } x = \pm 1.$$

Obtemos então os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Concluimos que a função dada tem quatro pontos críticos

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

Capítulo 3

O Teste da Segunda Derivada em dimensão $1 \leq n \leq 3$

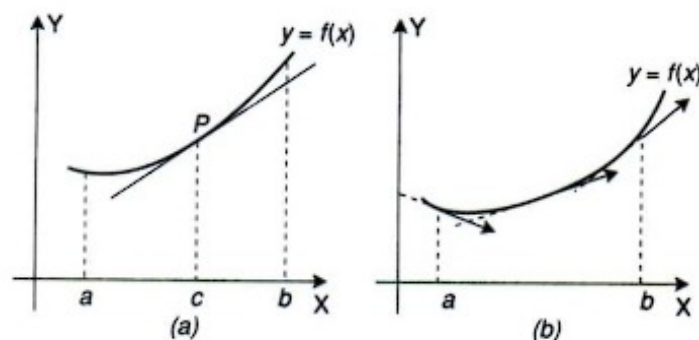
Neste capítulo, abordaremos sobre o Teste da Segunda Derivada em dimensão $1 \leq n \leq 3$, inicialmente aprofundamos na análise da concavidade das funções e na determinação dos pontos de inflexão através das derivadas segunda e primeira. Estabelemos que uma função é côncava para cima em um intervalo se sua segunda derivada for positiva, enquanto é côncava para baixo se a segunda derivada for negativa nesse intervalo. O Teste da Segunda Derivada determina a natureza dos pontos críticos de funções de uma variável, onde $f''(c) < 0$ indica um máximo local e $f''(c) > 0$ indica um mínimo local. Destacamos que, ao contrário do que acontece com funções de uma única variável, não existe um teste da primeira derivada para determinar a natureza dos pontos críticos em funções de várias variáveis o Teste da Segunda Derivada é estendido para funções de várias variáveis, onde se utiliza o determinante $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ para estabelecer se um ponto crítico é um mínimo local, máximo local ou ponto de sela.

3.1 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}$

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva. Vamos introduzi-lo, analisando geometricamente a Figura 3.1.

Na Figura 3.1(a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b , em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto $P(c, f(c))$. Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b) .

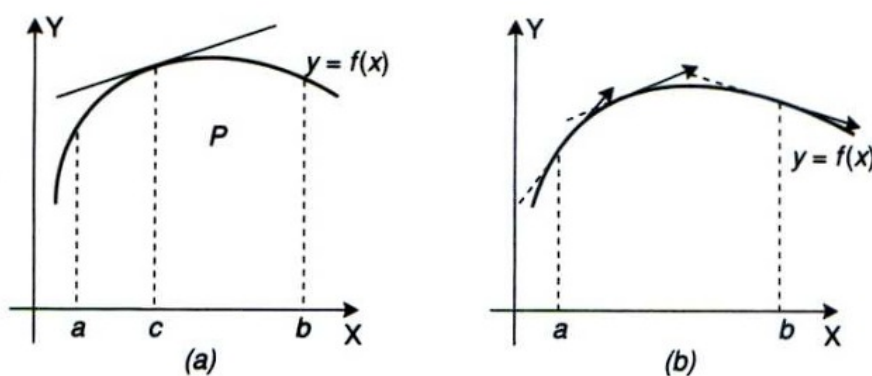
Figura 3.1: Conceito geométrico de concavidade voltada para cima.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [9]

Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva, observa-se na Figura 3.1(b), que podemos descrever esta mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada $f'(x)$ é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita. Analogamente, a Figura 3.2 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b) .

Figura 3.2: Conceito geométrico de concavidade voltada para baixo.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. [9]

Na Figura 3.2 b) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b) . Temos as seguintes definições:

Definição 26. Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b) , se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

Definição 27. Uma função é côncava para baixo no intervalo (a, b) , se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Proposição 2. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b) :

a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b) .

b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b) .

Demonstração. No item (a), como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, pelo Teorema 11, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b) . Logo, f é côncava para cima em (a, b) . Analogamente, se prova o item (b), como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, pelo Teorema 11, $f'(x)$ é decrescente no intervalo (a, b) . Logo, f é côncava para baixo em (a, b) . $\square$

Podem existir pontos no gráfico de uma função nos quais a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados pontos de inflexão.

Definição 28. Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P .

Exemplo 36. Determine os pontos de inflexão e reconheça os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo para $f(x) = x^4 - x^2$. Temos,

$$f'(x) = 4x^3 - 2x \text{ e } f''(x) = 12x^2 - 2.$$

Fazendo $f''(x) > 0$, então

$$\begin{aligned} 12x^2 - 2 &> 0 \\ x^2 &> 1/6. \end{aligned}$$

Então, $x > \frac{\sqrt{6}}{6}$ ou $x < -\frac{\sqrt{6}}{6}$. Portanto, f tem concavidade para cima nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{6}/6), (\sqrt{6}/6, +\infty)$.

No intervalo $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo. Nos pontos $c_1 = -\sqrt{6}/6$, e $c_2 = +\sqrt{6}/6$, a concavidade muda de sentido. Logo, nestes pontos o gráfico de f tem pontos de inflexão

Teorema 15 (Teste da Segunda Derivada). *Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$*

- a) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local em $x = c$.*
- b) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local em $x = c$.*
- c) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste é inconclusivo. A função pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.*

Demonstração. Para a). Se $f''(c) < 0$, então $f''(x) < 0$ em algum intervalo aberto I que contenha o ponto c , uma vez que f'' é contínua. Portanto, pelo Teorema 11, f' é decrescente em I . Como $f'(c) = 0$ o sinal de f' muda de positivo para negativo em c , de modo que f apresenta um máximo local em c , conforme o teste da primeira derivada.

Para b). Se $f''(c) > 0$ então $f''(x) > 0$ em algum intervalo aberto I que continha o ponto c , uma vez que f'' é contínua. Portanto, f' é crescente em I . Como $f'(c) = 0$ o sinal de f' muda de negativo para positivo em c , de modo que f apresenta um mínimo local em c , conforme o teste da primeira derivada.

Para c), daremos um contra-exemplo, para isto, considere as três funções $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$. Para cada função, a primeira e a segunda derivadas são nulas em $x = 0$. Apesar disso, nesse ponto, a função $y = x^4$ apresenta um mínimo local, $y = -x^4$ apresenta um máximo local e $y = x^3$ é crescente em qualquer intervalo aberto que contenha $x = 0$ (não apresentando nem um máximo, nem um mínimo nesse ponto). Em outras palavras, o teste falha. $\square$

Exemplo 37. A função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ tem pontos críticos. Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2. \end{aligned}$$

A segunda derivada de f é

$$f''(x) = 12x - 18.$$

Logo, como $f''(x_1) = f''(1) = -6 < 0$, temos que $x_1 = 1$ é ponto de máximo local de f .

E, como $f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$, temos que $x_2 = 2$ é ponto de mínimo local de f .

3.2 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^2$

O Teste da Segunda Derivada para funções de várias variáveis, é uma ferramenta importante na análise de pontos críticos. No entanto, vale destacar que, ao contrário do que acontece com funções de uma única variável, não existe um teste da primeira derivada para determinar a natureza dos pontos críticos em funções de várias variáveis. Enquanto para funções de uma única variável o teste da primeira derivada nos diz se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local, para funções de várias variáveis esse teste não é suficiente. Em vez disso, recorreremos ao teste da segunda derivada, que envolve o cálculo do discriminante D e a análise do sinal deste para determinar se um ponto crítico é um máximo local, mínimo local ou ponto de sela. Para funções de três variáveis, analisamos a natureza de um ponto crítico (x_0, y_0, z_0) de uma função $f(x, y, z)$ de classe C^2 . Este teste utiliza a matriz Hessiana H e uma submatriz H_1 para determinar se o ponto crítico é um máximo local, mínimo local ou nem um, nem outro.

Teorema 16 (Teorema da Conservação do Sinal). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\bar{x} \in D_f$ e tal que $f(\bar{x}) > 0$ ($f(\bar{x}) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.*

Demonstração. Faremos primeiro o caso $f(\bar{x}) > 0$. Da continuidade de f em $\bar{x}$, especificando $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ encontramos $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Provando o segundo caso $f(\bar{x}) < 0$. Da continuidade de f em $\bar{x}$, especificando $\epsilon = f(\bar{x}) < 0$ encontramos $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado. □

Teorema 17. *Seja $f(x, y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A . Nestas condições,*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2} [f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, para funções de uma variável, temos:

$$g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + \frac{g''(\bar{t})}{2}(1 - 0)^2 \quad (3.1)$$

para algum $\bar{t}$ em $(0, 1)$. Calculemos, agora, $g'(t)$ e $g''(t)$:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt},$$

ou seja,

$$g'(t) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k,$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$. Daí

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}[f_x(x, y)]h + \frac{d}{dt}[f_y(x, y)]k \\ &= [f_{xx}(x, y)h + f_{yx}(x, y)k]h + [f_{xy}(x, y)h + f_{yy}(x, y)k]k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$g''(t) = f_{xx}(x, y)h^2 + 2f_{xy}(x, y)hk + f_{yy}(x, y)k^2,$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$. Temos, então:

$$\begin{cases} g(1) &= f(x_0 + h, y_0 + k), g(0) = f(x_0, y_0), \\ g'(0) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k, \\ g''(t) &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2, \\ &\text{onde } \bar{x} = x_0 + h\bar{t} \text{ e } \bar{y} = y_0 + k\bar{t}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Observe que $\bar{x}$ é um ponto interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$, pois $\bar{t} \in (0, 1)$. Substituindo (3.2) em (3.1) resulta:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + E(h, k),$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2} [f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$. Assim, fica demonstrado o teorema. □

Teorema 18 (Teste da Segunda Derivada). *Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b) , e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f . Seja*

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.
- b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.
- c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Demonstração. Da hipótese e da continuidade das funções

$$f_{xx}(x, y) \text{ e } D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2,$$

segue, pelo Teorema 16, que existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) podemos supor $B \subset D_f$ pois (x_0, y_0) é ponto interior de D_f tal que, para todo (x, y) em B ,

$$f_{xx}(x, y) > 0 \text{ e } D(x, y) > 0.$$

Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange (Teorema 17), para todo (h, k) , com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$, existe $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} [f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2]$$

Podemos reescrever $f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})hk + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})k^2$ igual a

$$\begin{aligned}
 &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left[h^2 + \frac{2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}hk + \frac{f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k^2 \right] \\
 &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left[h^2 + \frac{2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}hk + \frac{f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}^2(\bar{x}, \bar{y})}k^2 - \frac{f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}^2(\bar{x}, \bar{y})}k^2 + \frac{f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k^2 \right] \\
 &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left(h + \frac{f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k \right)^2 + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left(-\frac{f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}^2(\bar{x}, \bar{y})}k^2 + \frac{f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k^2 \right) \\
 &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left(h + \frac{f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})} (f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) - f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y})).
 \end{aligned}$$

(lembre-se de que $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$, pois (x_0, y_0) é ponto crítico de f). Note que $f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) - f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y}) = D(x, y)$, temos que

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} = f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) - f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y}).$$

Como $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$,

$$f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \quad \text{e} \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} > 0,$$

tendo em vista para todo $(h, k) \neq (0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0,$$

ou seja,

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

para todo (x, y) em B , com $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Portanto (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f , isto satisfaz o item (a).

Para o item (b), se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local. De fato, considerando

$$f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \left(h + \frac{f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})}k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})} (f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) - f_{xy}^2(\bar{x}, \bar{y})).$$

Como $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$,

$$f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) < 0 \text{ e } D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} > 0,$$

tendo em vista para todo $(h, k) \neq (0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0,$$

ou seja,

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

para todo (x, y) em B , com $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Portanto (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f , isto satisfaz o item (b).

Para o item (c), se $D < 0$ então $f(a, b)$, não é mínimo nem máximo local. De fato, seja

$$H = f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2.$$

Analisando o caso de $D < 0$ e $f_{xx} = 0$

$$H = 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2.$$

Usando $u_1 = (h, 1)$ e $u_2 = (h, -1)$, temos

$$H_{u_1} = 2af_{xy} + f_{yy} \text{ e } H_{u_2} = -2af_{xy} + f_{yy}.$$

Para h suficientemente grande a derivada na direção u_1 e na direção u_2 têm sinais distintos.

Se $D < 0$ e $f_{xx} \neq 0$, com $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = \left(\frac{f_{xy}}{f_{xx}}, -1\right)$

$$H = f_{xx} \left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx}f_{xy} - f_{xy}^2).$$

Aplicando u_1 e u_2 , temos

$$H_{u_1} = f_{xx} \text{ e } H_{u_2} = \frac{1}{f_{xx}} \underbrace{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}_D.$$

Como $D < 0$, se $f_{xx} > 0$, então $H_{u_1} > 0$ e $H_{u_2} < 0$. Se $f_{xx} < 0$, então $H_{u_1} < 0$ e $H_{u_2} > 0$. $\square$

No caso (c) o ponto (a, b) é chamado ponto de sela de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b) .

Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b) , ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f .

Exemplo 38. Seja $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos $D(0, 0) = 0$; logo, o Teorema 18 não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Trabalhando diretamente com a função verifica-se sem dificuldade que $(0, 0)$ é ponto de mínimo global, visto que para todo $x, y \in D(f)$ implica que $3x^4 + 2y^4 \geq f(0, 0)$. Logo, o valor mínimo de $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$ é $f(0, 0) = 0$.

Exemplo 39. Seja $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos $D(0, 0) = 0$; logo, o Teorema 18 não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Trabalhando diretamente com a função verifica-se sem dificuldade que $(0, 0)$ é ponto de máximo global, visto que para todo $x, y \in D(f)$ implica que $2 - x^2 - y^2 < f(0, 0)$. Logo, o valor máximo de $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ é $f(0, 0) = 2$.

Exemplo 40. Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Primeiro localizamos os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \text{ e } f_y = 4y^3 - 4x.$$

Igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações

$$x^3 - y = 0 \text{ e } y^3 - x = 0.$$

Para resolvê-las, substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda. Isso dá

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

e existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 12y^2.$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, segue do caso (c) do Teste da Segunda Derivada que a origem é um ponto de sela; ou seja, f não tem nem máximo local, nem mínimo local em $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, vemos do caso (a) do teste que $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local. Da mesma forma, temos $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, portanto $f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

3.3 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^3$

O Teste da Segunda Derivada classifica a natureza de um ponto crítico (x_0, y_0, z_0) de uma função $f(x, y, z)$ de classe C^2 usando a matriz Hessiana H e uma submatriz H_1 verificando se é um ponto de máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois.

Teorema 19. *Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e sejam $(x_0, y_0, z_0) \in A$ e $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0, z_0) e $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ esteja contido em A . Nessas condições, temos:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)h + f_y(x_0, y_0, z_0)k + f_z(x_0, y_0, z_0)l + E(h, k, l),$$

onde

$$Q(h, k, l) = \frac{1}{2}[f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hk + 2f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hl + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})k^2 + 2f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})kl + f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})l^2],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0, z_0) e $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$.

Teorema 20 (Teste da Segunda Derivada). *Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f . Sejam $H(x, y, z)$ e $H_1(x, y, z)$ dadas por*

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} \text{ e } H_1 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

- a) Se $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) > 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de mínimo local.
- b) Se $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) < 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de máximo local.
- c) Se $H_1(x_0, y_0, z_0) < 0$ e $f_{xx} > 0$, então existe (x_0, y_0, z_0) que não é ponto de máximo local e nem de mínimo local.

Demonstração. Inicialmente iremos mostrar o item (a). Como f é de classe C^2 segue que pelo Teorema 16 que existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0, z_0) tal que, para todo (x, y, z) em B ,

$$f_{xx}(x, y, z) > 0, H(x, y, z) > 0 \text{ e } H_1(x, y, z) > 0,$$

em que

$$f_{xx}(x, y, z), \quad H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} \text{ e } H_1 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Pela Fórmula de Taylor, com resto de Lagrange para $\mathbb{R}^3$ (Teorema 19), para todo $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) \in B$, existe $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0, z_0) e $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)h + f_y(x_0, y_0, z_0)k + f_z(x_0, y_0, z_0)l + E(h, k, l),$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) &= f_x(x_0, y_0, z_0)h + f_y(x_0, y_0, z_0)k + f_z(x_0, y_0, z_0)l \\ &\quad + \frac{1}{2}[f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hk + 2f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hl \\ &\quad + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})k^2 + 2f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})kl + f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})l^2]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tomando $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi$ como

$$\begin{aligned} \alpha &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), & \beta &= f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), & \gamma &= f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \\ \delta &= f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), & \epsilon &= f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), & \varphi &= f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

podemos reescrever

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})h^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hk + 2f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})hl \\ &\quad + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})k^2 + 2f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})kl + f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})l^2 \\ &= \alpha h^2 + \beta k^2 + \gamma l^2 + 2\delta hk + 2\epsilon hl + 2\varphi kl. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como (x_0, y_0, z_0) é ponto crítico, temos que $f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$. Portanto, segue de (3.3) que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}Q(h, k, l).$$

Logo, para determinar a natureza do ponto crítico, precisamos analisar a positividade ou negatividade da forma quadrática $Q(h, k, l)$. Reescrevendo novamente como:

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= \alpha \left[h^2 + \frac{\beta}{\alpha}k^2 + \frac{\gamma}{\alpha}l^2 + \frac{2\delta}{\alpha}hk + \frac{2\epsilon}{\alpha}hl + \frac{2\varphi}{\alpha}kl \right] \\ &= \alpha \left[h^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}k^2 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}l^2 + \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2}kl - \frac{\delta^2}{\alpha^2}k^2 - \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}l^2 - \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2}kl \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{\alpha}k^2 + \frac{\gamma}{\alpha}l^2 + \frac{2\delta}{\alpha}hk + \frac{2\epsilon}{\alpha}hl + \frac{2\varphi}{\alpha}kl \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= \alpha \left[\left(h + \frac{\delta}{\alpha}k + \frac{\epsilon}{\alpha}l \right)^2 + \frac{\alpha\beta - \delta^2}{\alpha k^2}k^2 + \frac{\alpha\gamma - \epsilon^2}{\alpha^2}l^2 + \frac{2(\alpha\varphi - \epsilon\delta)}{\alpha^2}kl \right] \\ &= \alpha \left(h + \frac{\delta}{\alpha}k + \frac{\epsilon}{\alpha}l \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}k^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha}l^2 + \frac{2\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\alpha}kl. \end{aligned}$$

Denote $\bar{Q}(k, l) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}k^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha}l^2 + \frac{2\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\alpha}kl$. Note que como $H_1 > 0$ e $f_{xx} > 0$

temos $\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}(k, l) &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[k^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l^2 + \frac{2 \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} kl \right] \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[k^2 + \frac{2 \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} kl + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}^2} l^2 - \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}^2} l^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l^2 \right] \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[\left(k + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}^2} l^2 \right].
 \end{aligned}$$

Note ainda que

$$\alpha \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} = \alpha^2 \beta \gamma + \alpha \delta \varphi \epsilon + \alpha \delta \varphi \epsilon - \alpha \gamma \delta^2 - \alpha^2 \varphi^2 - \alpha \beta \epsilon^2.$$

Somando e subtraindo $\epsilon^2 \delta^2$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\alpha^2 \beta \gamma + \alpha \delta \varphi \epsilon + \alpha \delta \varphi \epsilon - \alpha \gamma \delta^2 - \epsilon^2 \delta^2 + \epsilon^2 \delta^2 - \alpha^2 \varphi^2 - \alpha \beta \epsilon^2 \\
 &= (\alpha^2 \beta - \delta^2)(\alpha \gamma - \epsilon^2) - (\alpha \gamma - \epsilon \delta)^2 \\
 &= \begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$Q(h, k, l) = \alpha \left(h + \frac{\delta}{\alpha}k + \frac{\epsilon}{\alpha}l \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left(k + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l^2. \quad (3.6)$$

Por (3.4) temos que

$$Q(h, k, l) = f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \left(h + \frac{\delta}{\alpha}k + \frac{\epsilon}{\alpha}l \right)^2 + \frac{H_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(k + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l \right)^2 + \frac{H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{H_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} l^2.$$

Como $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in B$, temos

$$1. \ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0,$$

$$2. \ H(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} > 0,$$

$$3. \ H_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} > 0.$$

Portanto, tendo em vista para todo $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) \in B$, segue que $Q(h, k, l) > 0$, consequentemente,

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) > 0,$$

ou seja,

$$f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0),$$

para todo (x, y, z) em B , com $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$. Portanto (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo local de f . Isto conclui a demonstração do item (a).

Para o item (b), de maneira inteiramente análoga, concluímos que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}Q(h, k, l),$$

em que

$$Q(h, k, l) = f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \left(h + \frac{\delta}{\alpha}k + \frac{\epsilon}{\alpha}l \right)^2 + \frac{H_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \left(k + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} l \right)^2 + \frac{H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{H_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} l^2.$$

Com uma bola aberta B_2 de centro (x_0, y_0, z_0) tal que, para todo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ em B_2 ,

$$1. f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) < 0,$$

$$2. H(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{xz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{zz}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} < 0,$$

$$3. H_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} > 0.$$

Portanto, tendo em vista para todo $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) \in B_2$, segue que $Q(h, k, l) < 0$, conseqüentemente,

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) < 0,$$

ou seja,

$$f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0),$$

para todo (x, y, z) em B , com $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$. Portanto (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local de f . Isto conclui a demonstração do item (b).

Para o item (c), considerando Q dado em (3.6) e sabendo que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}Q(h, k, l).$$

Considere os vetores $(1, 0, 0)$ e $\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right)$, assim temos

$$Q(1, 0, 0) = \alpha \text{ e}$$

$$Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right) = \alpha \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 + \beta(-1)^2 + \gamma(0)^2 + 2\delta\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(-1) + 2\epsilon\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(0) + 2\varphi(-1)(0).$$

Simplificando, obtemos

$$Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right) = \frac{\delta^2}{\alpha} + \beta - 2\frac{\delta^2}{\alpha} = \beta - \frac{\delta^2}{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}.$$

Desta forma, pelas condições do item (c), temos que

$$Q(1, 0, 0) = f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0 \text{ e } Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right) = \frac{H_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{f_{xx}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} < 0,$$

em que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ estão em uma vizinhança de (x_0, y_0, z_0) .

Logo, $Q(h, k, l)$ assume valores de sinais opostos para os pontos $(1, 0, 0)$ e $\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right)$, conforme desejado. Portanto,

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(x_0, y_0, z_0) > 0$$

$$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - f(x_0, y_0, z_0) < 0,$$

consequentemente,

$$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) < f(x_0, y_0, z_0) < f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

assim sendo, (x_0, y_0, z_0) não é ponto de máximo local e nem mínimo local. □

Exemplo 41. Verifique a relação de máximos e mínimos locais da função

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2.$$

Seja $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$ e $f_z = 3z^2 - 3$. Igualando as derivadas encontradas a zero, obtemos as equações

$$3(x^2 - 1) = 0, 3(y^2 - 1) = 0 \text{ e } 3(z^2 - 1) = 0.$$

Temos um total de 8 pontos críticos que são: $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$.

Como as derivadas parciais em uma variável são funções independentes das demais variáveis, as derivadas mistas f_{xy} , f_{xz} e f_{yz} são nulas. Onde

$$H = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{vmatrix}, \quad H_1 = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}.$$

O ponto $(1, 1, 1)$, com $f_{xx} > 0$, $H_1 > 0$ e $H > 0$, é ponto de mínimo local. O ponto $(-1, -1, -1)$, com $f_{xx} < 0$, $H_1 > 0$ e $H > 0$, é de máximo local. Os pontos $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ são de sela.

3.4 Teste da Segunda Derivada em $\mathbb{R}^n$

Abordaremos inicialmente sobre conjunto compacto, onde um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se for limitado e fechado, como esferas e bolas fechadas, enquanto $\mathbb{R}^n$ inteiro não é compacto. Uma forma quadrática H em $\mathbb{R}^n$ é dada por $H(v) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\alpha_i\alpha_j$, com matriz simétrica $[h_{ij}]$. H pode ser não-negativa, positiva, indefinida, negativa ou não-positiva. A forma hessiana $H(x)$ de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $x \in U$ é determinada pelas segundas derivadas parciais de f e ajuda a identificar máximos, mínimos ou pontos de sela. O Teste da Segunda Derivada usa a forma hessiana para avaliar a natureza dos pontos críticos de f .

Definição 29. Diremos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.

Assim, por exemplo, são compactas todas as esferas e bolas fechadas do espaço euclidiano, mas o espaço $\mathbb{R}^n$ inteiro não é compacto (salvo se $n = 1$). Uma forma quadrática $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cujo valor no vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é $\sum_{i,j=1}^n h_{ij}\alpha_i\alpha_j$, onde $[h_{ij}]$ é uma matriz simétrica $n \times n$. O valor da forma quadrática H no vetor v será indicado com a notação $H \cdot v^2$. Portanto

$$H \cdot v^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\alpha_i\alpha_j, \quad \text{quando } v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Se $t \in \mathbb{R}$ então $H \cdot (tv)^2 = t^2 \cdot H \cdot v^2$.

A forma quadrática H chama-se não-negativa quando $H \cdot v^2 \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, positiva quando $H \cdot v^2 > 0$ para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$ e indefinida quando existem $v, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $H \cdot v^2 > 0$ e $H \cdot w^2 < 0$. De modo análogo se definem forma quadrática negativa e não-positiva. Quando H é positiva ou negativa, diz-se que ela é definida.

Exemplo 42. A forma quadrática $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $H \cdot v^2 = \langle v, v \rangle$, é positiva. Como $\langle v, v \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$, a matriz de H é a identidade. Para todo $k \in [1, n]$, $H \cdot v^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2$ é uma forma quadrática não negativa em $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se pusermos $H \cdot v^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 - \alpha_{k+1}^2 - \dots - \alpha_n^2$ com $0 < k < n$, teremos uma forma quadrática indefinida. Evidentemente, se H é positiva (respectivamente não-negativa) então $-H$ é negativa (respectivamente não positiva).

Seja $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática cuja matriz é $[h_{ij}]$. Se chamarmos de $H_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica de $\mathbb{R}^n$ é também $[h_{ij}]$, vemos imediatamente que $H \cdot v^2 = \langle H_0 \cdot v, v \rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Como a matriz $[h_{ij}]$ do operador H_0 na base canônica é simétrica, H_0 é auto-adjunto. Reciprocamente, para qualquer operador auto-adjunto $H_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a função $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $H \cdot v^2 = \langle H_0 \cdot v, v \rangle$, é uma forma quadrática. Quando H é definida, o operador H_0 é invertível pois $\langle H_0 \cdot v, v \rangle \neq 0$ para todo $v \neq 0 \Rightarrow H_0 \cdot v \neq 0$ para todo $v \neq 0$.

Definição 30. Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, a forma quadrática hessiana $H(x)$ de f no ponto $x \in U$ é aquela cuja matriz é $[h_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]$. Assim, para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$H(v) \cdot v^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \alpha_i \alpha_j.$$

A forma hessiana é usada para determinar a natureza dos pontos críticos da função f .

Definição 31. Diz-se que $a \in U$ é um ponto de máximo local da função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ quando existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in U \cap B(a; \delta)$. Analogamente se define um ponto de mínimo local. Um ponto a , de máximo (ou de mínimo) local de uma função diferenciável f , é um ponto crítico de f . Com efeito, para todo $i = 1, \dots, n$, se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno então a função $\phi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi(t) =$

$f(a + te_i)$, está bem definida e possui um máximo (ou mínimo) local no ponto $t = 0$. Logo $0 = \phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 43. A origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é ponto crítico das três funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$ e $h(x, y) = x^2 - y^2$. Para f , a origem é um ponto de máximo, para g de mínimo e para h não é máximo nem mínimo pois em qualquer disco de centro 0 a função h assume valores maiores e menores do que $0 = h(0, 0)$.

A fórmula de Taylor para uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é a seguinte:

$$f(a + v) = f(a) + df(a) \cdot v + \frac{1}{2}d^2f(a) \cdot v^2 + \dots + \frac{1}{p!}d^pf(a) \cdot v^p + r_p(v).$$

Conforme as hipóteses feitas e os objetivos desejados, temos, como no caso de funções de uma só variável, três situações principais, a fórmula de Taylor Infinitesimal, Resto de Lagrange e Resto Integral. Aqui apresentaremos apenas a fórmula de Taylor Infinitesimal, pois utilizaremos na demonstração do Teorema 21.

- Fórmula de Taylor Infinitesimal. Se f é p vezes diferenciável no ponto a , então $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{|v|^p} = 0$.

Teorema 21 (Teste da Segunda Derivada). *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , $a \in U$ um ponto crítico de f e H a forma quadrática Hessiana de f no ponto a . Então:*

- 1) *Se H é positiva, a é um ponto de mínimo local não-degenerado;*
- 2) *Se H é negativa, a é um ponto máximo local não-degenerado;*
- 3) *Se H é indefinida, a não é ponto de mínimo local nem de máximo local para f .*

Demonstração. Para provar o item 1. Seja $B(a; \delta) \subset U$. Para todo v , com $0 < |v| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} f(a + v) &= f(a) + \frac{1}{2}H \cdot v^2 + r(v) \\ &= f(a) + \left[\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 + \frac{r(v)}{|v|^2} \right] \cdot |v|^2. \end{aligned}$$

A função contínua $\frac{1}{2}H$ sendo positiva em todos os pontos da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, a qual é um conjunto compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\frac{1}{2}H \cdot u^2 \geq \epsilon$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ de norma 1. Então

$$\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 \geq \epsilon$$

para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Ora, pela Fórmula de Taylor infinitesimal, podemos tomar $\delta > 0$ tão pequeno que

$$0 < |v| < \delta \Rightarrow \frac{|r(v)|}{|v|^2} < \epsilon.$$

Isto significa que, para todo $v \neq 0$ com norma inferior a δ , a expressão

$$\left[\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 + \frac{r(v)}{|v|^2} \right]$$

é positiva. Portanto $0 < |v| < \delta \Rightarrow f(a+v) > f(a)$, e a é um ponto de mínimo local para f .

Para provar o item 2. Seja $B(a; \delta) \subset U$. Para todo v , com $0 < |v| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} f(a+v) &= f(a) + \frac{1}{2}H \cdot v^2 + r(v) \\ &= f(a) + \left[\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 + \frac{r(v)}{|v|^2} \right] \cdot |v|^2. \end{aligned}$$

A função contínua $\frac{1}{2}H$ sendo negativa em todos os pontos da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, a qual é um conjunto compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\frac{1}{2}H \cdot u^2 \leq -\epsilon$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ de norma 1. Então

$$\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 \leq -\epsilon$$

para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Ora, pela Fórmula de Taylor infinitesimal, podemos tomar $\delta > 0$ tão pequeno que

$$0 < |v| < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(v)}{|v|^2} \right| < \epsilon.$$

Isto significa que, para todo $v \neq 0$ com norma inferior a δ , a expressão

$$\left[\frac{1}{2}H \cdot \left(\frac{v}{|v|} \right)^2 + \frac{r(v)}{|v|^2} \right]$$

é negativa. Portanto,

$$0 < |v| < \delta \Rightarrow f(a + v) < f(a),$$

e a é um ponto de máximo local para f .

Quanto à terceira afirmação do teorema, se H é indefinida, existem vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $H \cdot v^2 > 0$ e $H \cdot w^2 < 0$. Então, para todo $t \neq 0$ real, temos $H \cdot (tv)^2 = t^2 \cdot H \cdot v^2 > 0$ e $H \cdot (tw)^2 < 0$. A igualdade $f(a + v) = f(a) + \frac{1}{2}H \cdot v^2 + r(v)$ acima implica então que $f(a + tv) > f(a)$ e $f(a + tw) < f(a)$ para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno, logo a não é ponto de mínimo local nem de máximo local para f . $\square$

Corolário 15. *Se a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , possui um mínimo (respectivamente máximo) local no ponto $a \in U$ então a forma quadrática hessiana de f é não negativa (respectivamente não-positiva) nesse ponto.*

Demonstração. Com efeito, se fosse $H \cdot v_0^2 < 0$ para algum $v_0 \in \mathbb{R}^n$, teríamos $f(a + tv_0) < f(a)$ para todo t suficientemente pequeno, e então a não seria um ponto de mínimo local. De maneira análoga temos o mesmo argumento para o caso do máximo local. $\square$

Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos em profundidade os fundamentos e aplicações das derivadas, tanto em $\mathbb{R}$ quanto em $\mathbb{R}^n$. No primeiro capítulo, abordamos a derivada em $\mathbb{R}$, destacando sua interpretação geométrica e sua importância para compreender a taxa de variação instantânea de uma função. A introdução da regra da cadeia mostrou como é possível lidar com derivadas de funções mais complexas por meio de suas componentes mais simples. A análise de pontos críticos e o teste da primeira derivada proporcionaram uma compreensão detalhada do comportamento local das funções, oferecendo ferramentas essenciais para a classificação de máximos e mínimos.

Avançando para o segundo capítulo, estendemos a análise para funções em múltiplas variáveis em $\mathbb{R}^n$. As derivadas parciais revelaram-se fundamentais para entender a variação de funções em espaços multidimensionais. A importância das funções C^1 foi destacada pela sua suavidade e continuidade, essenciais para muitas aplicações práticas.

No terceiro capítulo, aprofundamos o uso do Teste da Segunda Derivada para funções de várias variáveis, enfatizando sua importância na análise de pontos críticos em espaços de dimensões superiores. A matriz Hessiana é a ferramenta chave para determinar a natureza desses pontos, seja como máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela. Este capítulo destacou a complexidade adicional presente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, demonstrando a necessidade de métodos mais sofisticados para a análise de funções em múltiplas variáveis.

A capacidade de identificar e interpretar pontos de máximo e mínimo tem implicações práticas significativas em várias áreas do conhecimento, como economia, engenharia e ciências naturais. A otimização de recursos e processos, que depende dessa análise, é um tópico central na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sublinhando a importância deste conhecimento para o desenvolvimento do pensamento matemático aplicado.

Em suma, este trabalho fornece uma base sólida para a compreensão das derivadas em diferentes contextos, oferecendo tanto uma fundamentação teórica quanto ferramentas

práticas para a análise de funções. As técnicas discutidas são fundamentais para uma ampla gama de aplicações, desde a resolução de problemas acadêmicos até a otimização de processos em diversas áreas profissionais.

Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 1.** 10 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.
- [2] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 2.** Rio de Janeiro, IMPA, 2006.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- [4] FLEMMING, Diva Marília; Gonçalves, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração.** 6^o Edição. Prentice Hall Brasil. 2006.
- [5] STEWART, James. **Cálculo, volume 1.** 6^o Edição. Cengage. 2010.
- [6] STEWART, James. **Cálculo, volume 2.** 6^o Edição. Cengage. 2013.
- [7] Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo Volume 1.** 5^o Edição. Editora LTC. 2001.
- [8] Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo Volume 2.** 5^o Edição. Editora LTC. 2007.
- [9] FLEMMING, Diva Marília; Gonçalves, Mirian Buss. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas.** 6^o Edição. Prentice Hall Brasil. 2007.
- [10] OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. **O hessiano em duas e várias variáveis.** 2019.