

ORGANIZADORES

Tarciana Silva &
Clessius Silva

Estratégias e inovações metodológicas para o ensino de matemática

PROFMAT - UFRPE
2026

Vol 1



Organizadores:

Tarciana Maria Santos da Silva

Clessius Silva

Estratégias e inovações metodológicas para o Ensino de Matemática

Volume 1

1ª Edição

Recife

2026



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO - UFRPE



EDITORA UNIVERSITÁRIA DA UFRPE

Maria José de Sena

Reitora

Maria do Socorro de Lima Oliveira

Vice-reitora

Renata Valéria Regis de Sousa Gomes

Pró-Reitora de Extensão, Cultura e Cidadania

Rinaldo Aparecido Mota

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Danielli Matias de Macedo Dantas

Pró-Reitora de Ensino de Graduação

Rodrigo Gayger Amaro

Pró-Reitor de Planejamento e Administração

Tália de Azevedo Souto Santos

Pró-Reitora de Gestão Estudantil e Inclusão

Thieres George Freire da Silva

Pró-Reitor de Pesquisa

Renata Andrade de Lima e Souza

Pró-Reitora de Gestão de Pessoas

Elisabeth da Silva Araujo

Diretora do Sistema de Bibliotecas da UFRPE

Antão Marcelo Freitas Athayde Cavalcanti

Diretor da Editora da UFRPE

José Abmael de Araújo

Coordenador Administrativo

Josuel Pereira de Souza

Chefe de Produção

Marco Aurélio Cabral Pereira

Editoração Eletrônica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecária Suely Manzi – CRB/4 - 809

E82 Estratégias e inovações metodológicas para o ensino de Matemática / Tarciana Maria Santos da Silva, Clessius Silva, organizadores. – 1. ed. - Recife: EDUFRPE, 2026.
v. 1, 252 p. : il.

Obra publicada em ebook.
Inclui referências, anexos(s) e apêndice(s).

1. Educação básica 2. Recursos eletrônicos de informação
3. Matemática – Estudo e ensino 4. Professores de matemática
5. Matemática – Metodologia I. Silva, Tarciana Maria Santos da,
org. II. Silva, Clessius, org.

CDD 510.7

ISBN FÍSICO nº 978-65-86466-94-2
ISBN DIGITAL nº 978-85-7946-564-2

Apresentação

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) constitui um programa de pós-graduação *stricto sensu* de excelência que visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Nessa perspectiva, a Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), enquanto instituição associada, reafirma seu compromisso com o ensino público e com a formação continuada por meio desta obra, que surge como uma conexão necessária entre a produção acadêmica e a realidade da sala de aula.

A ideia deste material originou-se durante as discussões da disciplina de Tópicos de Matemática, consolidando-se e sendo executada ao longo da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O intuito central desta iniciativa é popularizar os produtos educacionais desenvolvidos pelos discentes, transformando-os em opções acessíveis e práticas para que docentes do ensino básico possam enriquecer suas metodologias e mediar o conhecimento de forma inovadora e eficiente.

Este volume é formado por uma coletânea de propostas didáticas que unem o rigor matemático a estratégias metodológicas viáveis, sendo um registro do impacto positivo do PROFMAT na transformação do ensino de Matemática na região e no país. Acreditamos que a democratização desses materiais, frutos diretos da jornada acadêmica na UFRPE, é um passo importante para o fortalecimento da educação pública brasileira.

Desejamos que estas propostas alcancem as salas de aula e inspirem novos caminhos para o ensino da Matemática no Brasil.

Tarciana Maria Santos da Silva
Clessius Silva
Organizadores

Sumário

1	Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta didática para o 8º ano	11
1.1	INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	12
1.2	A PROPOSTA DIDÁTICA	13
1.3	AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	17
1.4	ATIVIDADE I – DICOTOMIA DO CAMINHO	18
1.5	ATIVIDADE II – RODOVIAS QUE SE CRUZAM	21
1.6	ATIVIDADE III – “PONTO MÉDIO” DAS TRÊS IGREJAS	22
1.7	ATIVIDADE IV – DICOTOMIA DO ÂNGULO	25
1.8	ATIVIDADE V – VENDEDORES DE SORVETE	27
1.9	ATIVIDADE VI – CONSTRUINDO UM CHAFARIZ	29
	REFERÊNCIAS	31
2	Funções Exponenciais: Atividades Práticas e Ferramentas Tecnológicas	32
2.1	INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	32
2.2	A PROPOSTA DIDÁTICA	33
2.2.1	Informações Gerais	33
2.2.2	Conteúdos abordados	33
2.2.3	Tema	33
2.2.4	Justificativa	33
2.2.5	Competências	33
2.2.6	Habilidades	34
2.2.7	Objetivos	35
2.2.8	Público-alvo	36
2.2.9	Perfil das turmas	36
2.2.10	Recursos	36

2.2.11	Avaliação	36
2.3	ATIVIDADE I	36
2.3.1	Questões diagnósticas	37
2.3.2	Revisando potências e propriedades	38
2.3.3	Momento dos exercícios	44
2.3.4	Procedimentos avaliativos	46
2.4	ATIVIDADE II	46
2.4.1	Dobraduras e fractais	46
2.4.2	Generalização e formalização de conceitos	49
2.4.3	Analisando gráficos de funções no Geogebra	49
2.4.4	Procedimentos avaliativos	50
2.5	ATIVIDADE III	50
2.5.1	Crescimento exponencial	50
2.5.2	Resolvendo problemas com auxílio do Geogebra e planilhas	50
2.5.3	Momento de exercícios com auxílio de ferramentas	52
2.5.4	Procedimento avaliativo	53
2.6	ATIVIDADE IV	53
2.6.1	Resolvendo equações e inequações exponenciais	53
2.6.2	Momento de exercícios	53
2.6.3	Correções e procedimentos avaliativos	54
2.7	ATIVIDADE V	54
2.7.1	Atividade avaliativa	54
2.8	Considerações	55
	REFERÊNCIAS	56
3	Porcentagem: uma proposta didática para a resolução de problemas do SAEPE	57
3.1	INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	58
3.2	A PROPOSTA DIDÁTICA	58
3.2.1	INFORMAÇÕES GERAIS	58
3.2.2	CONTEÚDOS ABORDADOS	58
3.2.3	TEMA	59
3.2.4	JUSTIFICATIVA	59
3.2.5	COMPETÊNCIAS	59
3.2.6	HABILIDADES	59

3.2.7	OBJETIVOS	60
3.2.8	PÚBLICO-ALVO	61
3.2.9	PERFIL DAS TURMAS	61
3.2.10	RECURSOS	61
3.2.11	AVALIAÇÃO	61
3.3	ATIVIDADE I	62
3.3.1	APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA	62
3.3.2	EM BUSCA DE SOLUÇÕES	63
3.3.3	EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO	63
3.3.4	GENERALIZAÇÃO	63
3.3.5	MOMENTO DOS EXERCÍCIOS	63
3.3.6	PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS	64
3.4	ATIVIDADE II	64
3.4.1	APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA	64
3.4.2	EM BUSCA DE SOLUÇÕES	65
3.4.3	EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO	65
3.4.4	GENERALIZAÇÃO	65
3.4.5	MOMENTO DOS EXERCÍCIOS	65
3.4.6	PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS	66
3.5	ATIVIDADE III	66
3.5.1	APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-DIDÁTICA	67
3.5.2	EM BUSCA DE SOLUÇÕES	68
3.5.3	EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO	68
3.5.4	GENERALIZAÇÃO	70
3.5.5	MOMENTO DOS EXERCÍCIOS	70
3.5.6	PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS	70
3.6	ATIVIDADE IV	70
3.6.1	APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-DIDÁTICA	71
3.6.2	EM BUSCA DE SOLUÇÕES	72
3.6.3	EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO	72
3.6.4	PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS	73
3.7	ATIVIDADE V	73
3.7.1	PROPOSTA DE AVALIAÇÃO	74
3.8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	75

REFERÊNCIAS	76
4 Aritmética nas olimpíadas de matemática: uma proposta didática para o ensino médio	77
4.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	78
4.2 A PROPOSTA DIDÁTICA	78
4.3 ENCONTRO 01 – DIVISIBILIDADE	81
4.4 ENCONTRO 02 – SISTEMA DE NUMERAÇÃO	87
4.5 ENCONTRO 03 – MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM	90
4.6 ENCONTRO 04 – EQUAÇÕES DIOFANTINAS	94
4.7 ENCONTRO 05 – NÚMEROS PRIMOS	100
4.8 ENCONTRO 06 – CONGRUÊNCIAS	103
4.9 ENCONTRO 07 – TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS	107
4.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS	110
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE	112
Apêndice A – Divisibilidade	112
Apêndice B – Sistemas de Numeração	116
Apêndice C – Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum	124
Apêndice D – Equações Diofantinas	126
Apêndice E – Números Primos	130
Apêndice F – Congruência	132
Apêndice G – Teorema Chinês dos Restos	135
5 Problemas olímpicos e letramento matemático: contribuições da Teoria dos Grafos em uma sequência didática no 9º ano	137
5.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	139
5.2 A PROPOSTA DIDÁTICA	140
5.3 Módulo I- Primeiro contato	144
5.3.1 Contextualização e motivação	144
5.3.2 Produção inicial	145
5.3.3 Lista inicial de problemas	146
5.4 Módulo II - Oficina de resolução de problemas	149
5.4.1 Resolução conjunta da lista inicial	149
5.4.2 Introdução aos grafos	151
5.4.3 Coloração de grafos e questões de otimização	152

5.4.4	Atividade complementar em dupla (Lista intermediária)	154
5.5	Módulo III - Finalização	155
5.5.1	Retomada da discussão	155
5.5.2	Resolução individual da lista de final de atividades	156
5.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	160
	REFERÊNCIAS	162

6	Sequência Didática: Possibilidades Didáticas para o Trabalho com Representações de Números Racionais	171
6.1	INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	172
6.2	A PROPOSTA DIDÁTICA	172
6.3	ATIVIDADE 1	175
6.4	ATIVIDADE 2	177
6.5	ATIVIDADE 3	179
6.6	ATIVIDADE 4	181
6.7	ATIVIDADE 5	184
6.8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	186
	REFERÊNCIAS	187
	Apêndice	188
	Apêndice A – Ficha de Registro	188
	Apêndice B – Quiz Kahoot	189
	Apêndice C – Jogo Batalha das Frações	190
	Apêndice D – Jogo Memória Racional	192
	Apêndice E – Atividade Varal dos Racionais	194
	Apêndice F – Atividade Porcentagem em partes	195
	Apêndice G – Jogo Baralho das Representações	197

7	Uma proposta didática para uma abordagem mais intuitiva de problemas de contagem no ENEM.	201
7.1	A PROPOSTA DIDÁTICA	201
7.1.1	INFORMAÇÕES GERAIS	201
7.1.2	CONTEÚDOS ABORDADOS	202
7.1.3	TEMA	202
7.1.4	JUSTIFICATIVA	202
7.1.5	COMPETÊNCIAS	202

7.1.6	HABILIDADES	202
7.1.7	OBJETIVOS	203
7.1.8	PÚBLICO-ALVO	203
7.1.9	PERFIL DAS TURMAS	203
7.1.10	RECURSOS	203
7.1.11	AVALIAÇÃO	203
7.2	ATIVIDADE I	203
7.3	Atividade 2	204
7.4	Atividade 3	208
7.5	Atividade 4.	210
7.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	212
	REFERÊNCIAS	213
8	Teorema de Marden: uma proposta didática para o Ensino Médio	214
8.1	INFORMAÇÃO AO PROFESSOR	215
8.2	A PROPOSTA DIDÁTICA	216
8.3	ATIVIDADE I	220
8.4	ATIVIDADE II	223
8.5	ATIVIDADE III	228
8.6	ATIVIDADE AVALIATIVA	242
8.7	ATIVIDADE INTERATIVA DESENVOLVIDA NO GEOGEBRA	242
8.8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	243
	REFERÊNCIAS	244

Construção e investigação de mediatrizes e bissetrizes: uma proposta didática para o 8º ano

Alex Victor Bispo¹

Dr. Marcelo Pedro dos Santos²

Esta proposta didática é um produto educacional ligado a uma pesquisa de dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) ministrado na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e que tem o objetivo de apresentar paradoxos matemáticos que possam ser utilizados como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF). No caso específico desta proposta, que é formada por seis atividades principais, são utilizadas a versão clássica do Paradoxo da Dicotomia, atribuído a Zenão de Eleia (490 a.C. – 430 a.C) como um problema motivador e uma versão para o movimento de rotação, além de outras quatro situações-problema, de modo que as três primeiras atividades tratam sobre ponto médio, mediatrizes e circuncentro e as três últimas, sobre bissetrizes e incentro. As habilidades trabalhadas nesta proposta são a EF08MA15 e EF08MA17, sendo, então, o público-alvo os estudantes do 8º ano do EFAF.

Este produto educacional foi elaborado pelo mestrando Alex Victor Bispo da Silva para obtenção do grau de Mestre do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e seu principal objetivo é apresentar aos docentes leitores uma proposta de utilização do Paradoxo da Dicotomia como problema motivador para o ensino da construção e investigação das mediatrizes e bissetrizes, além do desenvolvimento das habilidades argumentativas e do raciocínio hipotético-dedutivo dos discentes.

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, alexvbispo@gmail.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco, marcelo.pedrosantos@ufrpe.br

CAPÍTULO 1

A obra é formada por uma avaliação diagnóstica sobre congruência de triângulos — alguns dos problemas dessa avaliação foram retirados ou adaptados de (Giovanni Júnior, 2022) — e seis atividades principais, sendo a versão clássica do Paradoxo da Dicotomia o problema motivador da Atividade I, iniciando o estudo da mediatriz, aplicando-a para localizar pontos médios. O Paradoxo da Dicotomia pode ser enunciado da seguinte forma.

Paradoxo da Dicotomia

Um corredor pretende percorrer certo trajeto finito em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve percorrer $\frac{1}{2}$ dele. Depois disso, ele deverá percorrer a metade do trecho restante, ou seja $\frac{1}{4}$ do trajeto total. Ainda, ele deverá percorrer a metade do quarto que falta, ou seja, $\frac{1}{8}$. Analogamente, ele percorrerá mais $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ e assim *ad infinitum* do trajeto, de sorte que o corredor precisará percorrer infinitos trechos antes de chegar no fim do trajeto. Logo, é impossível que o corredor alcance o final do trajeto.

Continuando o estudo da mediatriz, na Atividade II ela é reconhecida como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos distintos dados. Já na Atividade III esse conhecimento é aplicado para resolver o problema motivador do “ponto médio” das três igrejas, começando, assim, o estudo do circuncentro de um triângulo.

Na Atividade IV, que inicia o estudo sobre as bissetrizes e suas aplicações, utiliza-se como problema motivador uma versão para o movimento de rotação do Paradoxo da Dicotomia, cujo enunciado segue abaixo.

Paradoxo da Dicotomia de Rotação

Uma bailarina pretende fazer um movimento de giro de uma volta completa em relação ao seu próprio eixo. Entretanto, para completar uma volta, antes ela terá que completar meia volta. Porém, antes disso, ela terá que completar um quarto de volta. Mas, ainda, antes disso, ela terá que completar um oitavo de volta. Ora, semelhantemente, ela precisará completar 16 avos de volta, 32 avos de volta, 64 avos de volta e assim por diante, de sorte que ela precisará completar infinitas frações de volta até, finalmente, completar o movimento. Portanto, é impossível que a bailarina realize o movimento de giro completo.

Por fim, a partir da Atividade V, reconhece-se a bissetriz de um ângulo como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos seus lados, afigurando-se como duas retas perpendiculares, e aplica-se, na Atividade VI, esse conhecimento para localizar o centro de um chafariz inscrito numa praça com formato triangular, ou seja, localizar o incentro dessa praça.

1.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

No texto de apresentação da área de Matemática do Ensino Fundamental, a BNCC diz que, sobretudo ao final dessa etapa, pode-se estimular “a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas a partir de outras” (BRASIL, 2018). Como o professor notará, na maior parte das atividades motivadoras e dos exercícios de fixação, espera-se que os alunos percebam algumas propriedades

CAPÍTULO 1

das mediatrizes e bissetrizes a partir, no início, dos seus conhecimentos prévios sobre, principalmente, congruência de triângulos e das construções geométricas realizadas e, progressivamente, das outras propriedades já percebidas e demonstradas por eles próprios nas primeiras aulas desta proposta didática.

Assim, vale chamar a atenção do docente leitor novamente para o objetivo principal desta proposta, que não se restringe ao mero ensino dos conteúdos de construção e investigação das mediatrizes e bissetrizes, mas também busca o desenvolvimento das competências e habilidades de argumentar e raciocinar matematicamente dos discentes, sendo isto parte da definição do letramento matemático, que favorece “o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2018). Em outras palavras, o objetivo não é a transmissão de conteúdos matemáticos, mas a construção destes pelos alunos por meio da abordagem própria da Matemática, que é a demonstração matemática, esta, por sua vez, valendo-se da heurística das construções por régua e compasso. Portanto, as atividades propostas, nos primeiros itens, conduzem os alunos a conjecturar possíveis propriedades dos conceitos estudados e, depois, pedem que demonstrem matematicamente essas conjecturas.

1.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Ponto médio e construção de mediatriz
- Mediatriz como um lugar geométrico
- Circuncentro
- Construção de bissetrizes interna e externa
- Bissetriz como um lugar geométrico.
- Incentro

TEMA

Construção de mediatrizes e bissetrizes e aplicações.

JUSTIFICATIVA

A construção é, segundo a BNCC, uma das principais ideias matemáticas fundamentais associadas à Geometria. Ela desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes, pois permite que eles compreendam e explorem propriedades relacionadas à simetria, à congruência e aos lugares geométricos. A prática com régua e compasso, além de fortalecer a habilidade motora e o raciocínio espacial, contribui para a valorização da Matemática como ciência que nasce de problemas práticos e se organiza de forma lógica e

CAPÍTULO 1

rigorosa. Além disso, o ensino da construção de mediatrizes e bissetrizes e suas propriedades é uma oportunidade para que os alunos apliquem os seus conhecimentos sobre congruência de triângulos, inclusive para realizarem demonstrações simples, contribuindo para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo, como também preconiza a BNCC.

Nesta sequência didática, à luz das metodologias de Resolução de Problemas e História da Matemática, utiliza-se o Paradoxo da Dicotomia como problema motivador a fim de tornar as aulas mais interessantes e contextualizadas. Por causa de suas características contraintuitiva, desafiante, criativa e ousada, paradoxos têm o potencial em despertar a curiosidade do aluno e, assim, o seu interesse em compreender melhor os conceitos apresentados. Esse interesse é fundamental para que haja a efetiva aprendizagem dos conteúdos, entendendo-se que o aluno só aprende se tiver interesse em aprender.

COMPETÊNCIAS

- **Competência geral 2:** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- **Competência específica 1:** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- **Competência específica 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- **Competência específica 3:** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- **Competência específica 6:** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- **Competência específica 8:** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

CAPÍTULO 1

HABILIDADES DA BNCC

- **(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.
- **(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

- Construir mediatrizes e bissetrizes, reconhecendo as suas propriedades, e aplicá-las na resolução de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer o Paradoxo da Dicotomia, reconhecendo o seu contexto histórico e filosófico, inclusive compreendendo os seus argumentos e falácias e classificando-o como um paradoxo do tipo falsídico.
- Autoestimar-se quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimento de forma colaborativa.
- Perseverar na busca de soluções para problemas e também de um melhor entendimento de conceitos e procedimentos.
- Defender o seu ponto de vista por meio de argumentos e conceitos de forma clara, fundamentada, lógica, empática e respeitosa.
- Reconhecer que há problemas impossíveis fisicamente, mas possíveis matematicamente.
- Demonstrar, com o rigor matemático, propriedades geométricas.
- Aplicar os casos de congruência de triângulos para resolver problemas e compreender as propriedades de mediatrizes e bissetrizes.
- Dividir um segmento pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Construir a mediatriz de um segmento utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados.
- Reconhecer que as mediatrizes dos lados de um triângulo intersectam-se no seu circuncentro.
- Dividir um ângulo pela metade utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Reconhecer e demonstrar geometricamente que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que 360° como a mediatriz de qualquer segmento cujos extremos são os pontos de interseção de um arco centrado no vértice do ângulo.

CAPÍTULO 1

- Reconhecer a bissetriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo.
- Reconhecer que as bissetrizes internas de um triângulo intersectam-se no seu incentro.
- Construir as bissetrizes internas e externas de um ângulo utilizando somente régua não graduada e compasso.
- Medir ângulos com um transferidor.

PÚBLICO-ALVO

Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

PERFIL DAS TURMAS

Turma com 30 a 40 alunos. Como pré-requisito, a turma já deverá ter estudado sobre os casos de congruência de triângulos, inclusive ter realizado construções de triângulos congruentes com régua e compasso.

RECURSOS

Régua, compasso, transferidor, quadro branco, marcadores e apagador de quadro branco

AVALIAÇÃO

A avaliação ocorrerá de forma contínua, participativa e cumulativa, avaliando-se diagnosticamente os conhecimentos prévios dos alunos sobre os casos de congruência de triângulos e as suas habilidades para construir triângulos congruentes e formativamente a construção dos conhecimentos e o desenvolvimento das habilidades e atitudes seguintes:

- a compreensão dos paradoxos;
- a compreensão dos conceitos e propriedades apresentados;
- a capacidade argumentativa;
- a colaboração e participação nas discussões em grupo e no debate com toda a turma, fazendo isso de maneira respeitosa
- a aplicação, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e as propriedades aprendidas das mediatrizes e bissetrizes, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral para resolver os problemas propostos;
- a realização das construções geométricas necessárias e as suas aplicações para investigar as propriedades das mediatrizes e bissetrizes e resolver os problemas propostos;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e

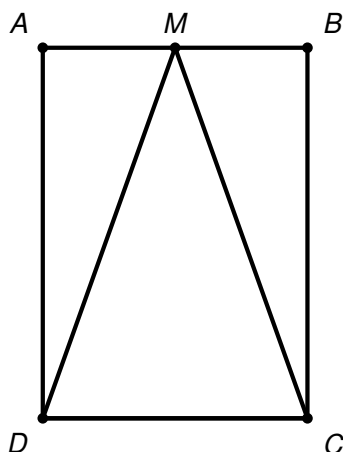
CAPÍTULO 1

- a resolução das atividades motivadoras e dos exercícios de fixação.

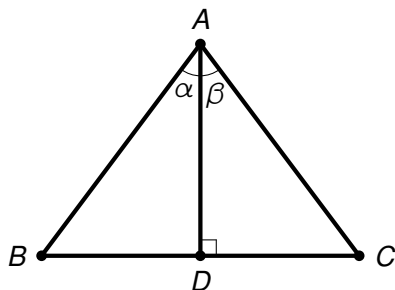
Ainda, para a avaliação somativa, poderá ser utilizado os exercícios de fixação propostos ou outros instrumentos avaliativos a critério do professor.

1.3 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1. Desenhe em seu caderno um segmento horizontal AB qualquer.
 - (a) Construa um triângulo isósceles qualquer cuja base é o segmento AB .
 - (b) É possível construir um triângulo congruente e distinto ao do item (a) com base também em AB ? Se sim, construa-o.
2. A figura mostra um retângulo, no qual M é o ponto médio do lado AB . Prove que o triângulo DMC é isósceles.



3. No triângulo ABC , $\overline{BD} = \overline{CD}$.

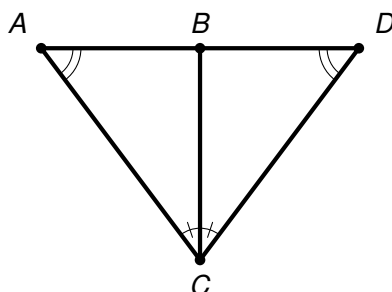


Nessas condições, mostre que

- (a) $\overline{AB} = \overline{AC}$
- (b) $\alpha = \beta$
- (c) $\hat{B} = \hat{C}$

CAPÍTULO 1

4. Os triângulos ABC e DBC da figura apresentam os ângulos congruentes assinalados com marcas iguais.



Nessas condições, mostre que os triângulos ABC e DBC são congruentes. Justifique por escrito cada etapa da resolução.

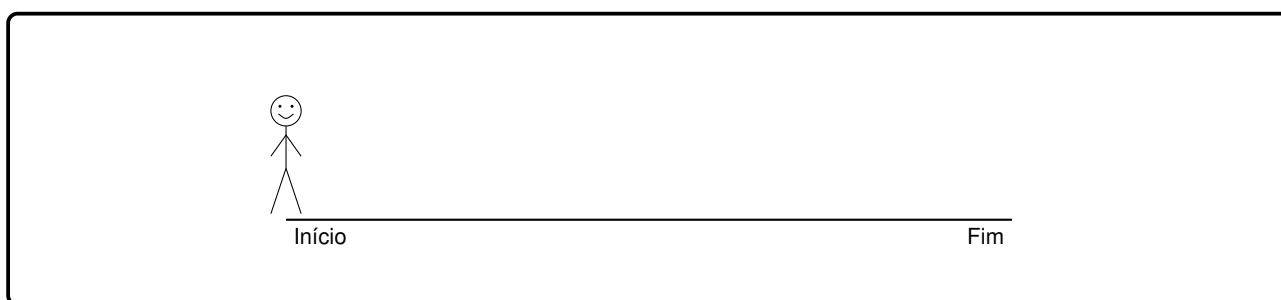
1.4 ATIVIDADE I – DICOTOMIA DO CAMINHO

- **Conteúdo abordado:** ponto médio e construção mediatriz.
- **Quantidade de aula/tempo:** 4 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Considere a ilustração abaixo de um caminho em linha reta a ser percorrido por um corredor.

Figura 1.1: Dicotomia do caminho



Fonte: o autor

- Apenas com o auxílio de um compasso e uma régua, porém não fazendo nenhum tipo de medição com ela, divida esse caminho em duas partes iguais localizando o seu ponto médio.
- Na mesma ilustração, divida a segunda metade do caminho na metade.
- Divida o último segmento resultante do item anterior também na metade. Realize esse mesmo processo mais cinco vezes.
- O que você percebe sobre o comportamento dos sucessivos pontos médios localizados?
- Converse com um colega e discutam se seria possível fazer mais cinquenta divisões similares às dos itens anteriores.

CAPÍTULO 1

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são somente a régua e o compasso, e deve o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.

Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

APRESENTAÇÃO DO PARADOXO E DISCUSSÃO

Este momento será iniciado com a apresentação do Paradoxo da Dicotomia, usando a terminologia de pontos médios, contextualizando histórico e filosoficamente tanto o paradoxo como o seu criador. Aqui, dever-se-á perguntar aos alunos sobre o que eles entendem por paradoxo e explicar o significado de dicotomia. Ainda, incitar-se-á a turma à discussão e à análise dos argumentos e da conclusão absurda, questionando os alunos sobre a divisibilidade do espaço e tempo — se é infinita ou finita, se tem comprimento mínimo ou não —, sobre a soma dos infinitos deslocamentos ou dos infinitos intervalos de tempo para concluir cada trecho — se seria infinita ou finita, e o porquê — e sobre a possibilidade de realizar infinitas tarefas em um intervalo de tempo finito. Continuando a discussão, o professor pedirá para que cada dupla ou trio compartilhe com toda a turma as suas respostas aos itens (d) e (e), justificando-as.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Depois da discussão, o professor mostrará para e com toda a turma — seguindo o mesmo espírito dialógico e colaborativo — como dividir um segmento apenas com régua e compasso, explicando que a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos arcos de mesmo raio e centrados, cada um, numa das extremidades do segmento divide-o na metade e é perpendicular a ele, demonstrando isso de forma matematicamente rigorosa e por meio dos casos de congruência de triângulos, e denotando-a por mediatriz.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

1. Trace segmentos com as seguintes medidas e divida-os em partes como indicado em cada item.
 - (a) 8 cm e em 4 partes.
 - (b) 10 cm e em 8 partes.
 - (c) 12 cm e em 16 partes.
2. É possível, com o auxílio apenas de mediatrizes, dividir um segmento em seis partes congruentes? Justifique.
3. Considerando o Paradoxo da Dicotomia, trace um segmento de 12 cm em cada item abaixo representando o trajeto a ser percorrido e localize nele o ponto até onde o corredor chegou sabendo que ele percorreu

CAPÍTULO 1

- (a) $\frac{3}{4}$ do caminho.
 - (b) $\frac{3}{8}$ do caminho.
 - (c) $\frac{5}{8}$ do caminho.
 - (d) $\frac{7}{16}$ do caminho.
 - (e) $\frac{11}{16}$ do caminho.
 - (f) $\frac{9}{32}$ do caminho.
 - (g) $\frac{21}{48}$ do caminho.
 - (h) $\frac{125}{400}$ do caminho.
4. Certo corredor já completou $\frac{3}{7}$ de um caminho que ele quer percorrer. É possível representar isso num segmento apenas com o auxílio de mediatrizes? Justifique.
5. As obras de Zenão se perderam com o tempo e não chegaram a esta era, de sorte que o que se sabe dele são citações, em maior parte indiretas, de outros filósofos e comentadores, como Platão, Aristóteles, Proclo e Simplicio. Segundo Proclo, Zenão enunciou pelo menos quarenta paradoxos em seus livros, porém somente alguns poucos deles sobreviveram e são conhecidos hoje pela humanidade. Pesquise outros paradoxos de Zenão e analise-os respondendo as seguintes perguntas.
- (a) Eles são todos falsídicos?
 - (b) Quais são os argumentos e, se houver, as falácias por trás deles?
 - (c) O que Zenão queria provar ao enunciar cada um deles?
 - (d) Você consegue ver semelhanças desses paradoxos com o Paradoxo da Dicotomia? Se sim, quais?

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo, inclusive seus argumentos, falácias e classificação, por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para a localização do ponto médio de um segmento e para a construção e compreensão das propriedades da mediatriz;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação, além da realização da pesquisa solicitada.

CAPÍTULO 1

1.5 ATIVIDADE II – RODOVIAS QUE SE CRUZAM

- **Conteúdo abordado:** mediatriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 3 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Paulo está dirigindo por uma extensa avenida que corta, na metade e perpendicularmente, uma estrada que conecta os municípios de Ararinha e Boitató. Ambas as rodovias seguem em linha reta, não possuindo nenhum tipo de curva.

- Prove que a distância de Paulo a Ararinha é igual à distância dele a Boitató. Despreze a largura da avenida.
- Prove que qualquer pessoa que esteja equidistante a ambas as cidades está na avenida (ou no seu prolongamento).
- Existe uma outra estrada perpendicular a avenida. Desprezando as larguras de cada rodovia, é possível que esta estrada cruze com a estrada de Ararinha e Boitató? Justifique a sua resposta.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Espera-se aqui que os alunos logo reconheçam que a avenida é a mediatriz da estrada e utilizem esse conhecimento, junto com a aplicação da congruência de triângulos, para resolver os itens (a) e (b) da atividade.

Para o item (c), os alunos precisarão reconhecer que duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta são paralelas, aplicando o conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é sempre 180° .

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, formalizando o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades do segmento, explicando que isso prova que a mediatriz de um segmento sempre é a mesma independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

GENERALIZAÇÃO

No item (c), o docente generaliza o problema a demonstrar que se duas retas distintas são perpendiculares a uma mesma reta, então elas são paralelas. Ele pode fazer isso por meio do *reductio ad absurdum*, supondo que as duas retas não são paralelas, ou seja, supondo que elas se cruzam, e aplicando o fato de que a soma interna dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° .

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 1

1. Sejam r uma reta e P um ponto no plano. Construa uma reta perpendicular a r e que passe por P considerando que

(a) $p \in r$

(b) $p \notin r$

2. Considerando o exercício anterior, prove que só existe uma reta perpendicular.

Dica: em ambos os casos, suponha que existam duas e considere os ângulos formados por elas.

3. Sejam r uma reta e P ponto fora de r . Construa, com régua e compasso, a reta paralela a r e que passa pelo ponto P .

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e soma dos ângulos internos de um triângulo, além de outros conceitos da Geometria e da Matemática em geral, para resolver a atividade e os exercícios, além de compreender as propriedades da mediatriz;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

1.6 ATIVIDADE III – “PONTO MÉDIO” DAS TRÊS IGREJAS

- **Conteúdo abordado:** circuncentro.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 2 aulas de 50 minutos cada.

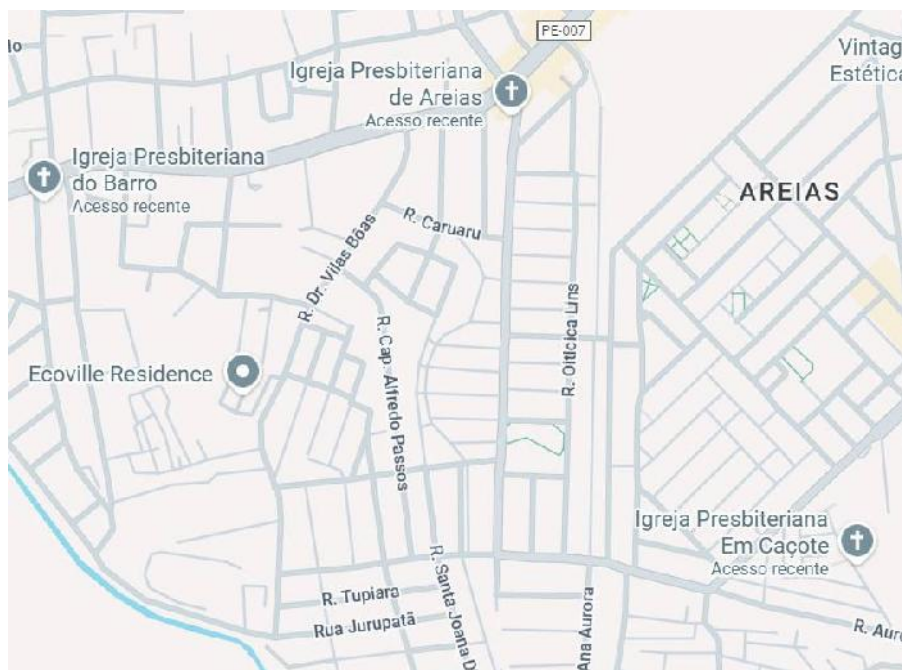
APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

A Igreja Presbiteriana do Brasil é uma federação de Igrejas locais organizadas em concílios que guardam gradação entre si. Um desses concílios é o Presbitério que exerce jurisdição sobre Igrejas locais de uma certa região. Na cidade do Recife, as Igrejas Presbiterianas de Areias, Barro e Caçote pertencem a um mesmo presbitério e pretendem fazer um trabalho social que atenda aos três bairros. Juntas decidiram começar esse trabalho num ponto que esteja igualmente distante de cada uma das sedes.

- Localize no mapa acima o ponto em que as igrejas devem começar o trabalho.
- Existe algum outro ponto em que elas poderiam começar o trabalho? Justifique.
- Explique porque não seria possível localizar um ponto equidistante das três igrejas caso elas fossem colineares. Existe algum outro caso em que também seria impossível localizar tal ponto?

CAPÍTULO 1

Figura 1.2: Mapa das três igrejas no Google Maps



Fonte: Google Maps, 2025

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

O objetivo dessa atividade é que os alunos consigam interpretar esse problema real para um problema geométrico, tomando cada Igreja local como um ponto no plano e localizar o ponto que esteja equidistante aos outros três.

Caso os alunos não entendam isso de forma independente, pode o professor guiá-los a essa descoberta e questioná-los sobre como eles poderiam aplicar os conceitos geométricos estudados na aula anterior para encontrar esse ponto.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto.

GENERALIZAÇÃO

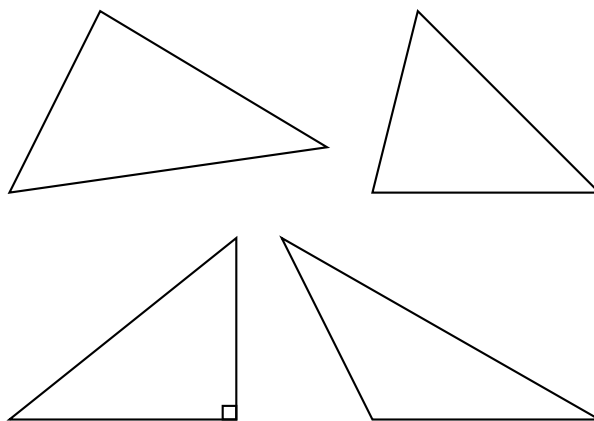
Depois de resolver a atividade com a turma, o professor observará que o ponto encontrado é o centro da circunferência que passa pelas três igrejas, generalizando isso para quaisquer três pontos no plano. Explicará também que essa circunferência **circunscreve** o triângulo definido pelos três pontos — isto é, passa pelos seus três vértices e a sua região delimitada contém o triângulo — e, sendo assim, o seu centro é chamado de **circuncentro**. Ou seja, as mediatrizes de um triângulo intersectam-se todas no circuncentro desse triângulo.

CAPÍTULO 1

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Construa, com régua e compasso, os seguintes lugares geométricos.

- (a) As mediatrizes dos lados dos triângulos abaixo.



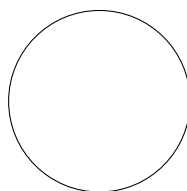
- (b) A circunferência que passa pelos três pontos abaixo.



- (c) A circunferência que passa pelos dois pontos abaixo e cujo centro está na reta r .



- (d) O centro da circunferência abaixo.



PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, o conceito de mediatriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos dados para resolver problemas;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

CAPÍTULO 1

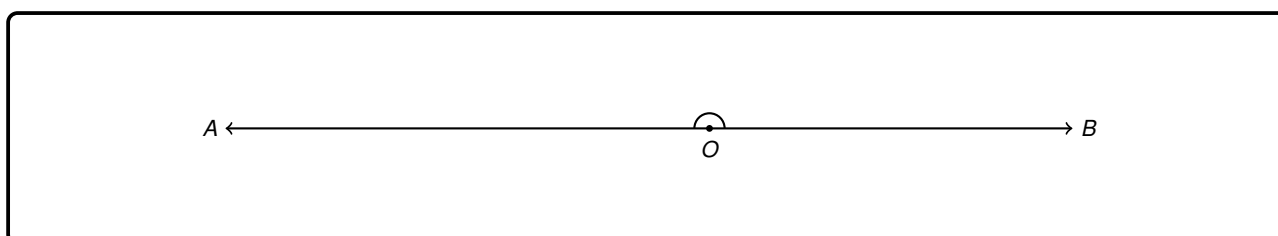
1.7 ATIVIDADE IV – DICOTOMIA DO ÂNGULO

- **Conteúdo abordado:** construção de bissetrizes interna e externa
- **Quantidade de aulas/tempo:** 3 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Considere o ângulo raso abaixo com vértice em O . Com o auxílio apenas de régua e compasso, faça e responda o que se pede abaixo. Utilize o transferidor apenas para verificar se a sua construção está correta.

Figura 1.3: Dicotomia do ângulo



Fonte: o autor

- Divida o ângulo \widehat{AOB} na metade traçando uma semirreta com origem em O .
- Analogamente ao item anterior, divida um dos ângulos resultantes do item anterior na metade.
- Divida na metade o ângulo resultante do item anterior no qual um dos lados é a semirreta \overrightarrow{OA} ou \overrightarrow{OB} e repita esse processo sucessivo de dicotomias mais duas vezes.
- Note que cada vez mais a medida dos ângulos resultantes diminui. Em algum momento, depois de um número extremamente grande de dicotomias sucessivas, é possível que a medida dos ângulos resultantes seja igual a 0° ? Justifique.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Neste momento, as ferramentas de desenho necessárias são a régua, o compasso e o transferidor, sendo este apenas utilizado para verificação das construções, devendo o professor ressaltar aos alunos para não medirem os segmentos com a régua. O professor pode organizar os alunos em duplas ou trios para resolver a atividade, embora, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a habilidade EF08MA15, entregará uma ficha da atividade para todos e pedirá que cada um resolva e faça as construções geométricas em sua própria ficha.

Aqui o professor será apenas um mediador, agindo apenas quando necessário para orientar os alunos sobre o uso correto das ferramentas de desenho, tirar dúvidas, levar os alunos a lembrar dos casos de congruência de triângulos e a pensar em como poderiam aplicá-los para a resolução da atividade.

CAPÍTULO 1

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO (PARTE 1)

Neste momento, o professor explicará que a semirreta ou a reta que divide um ângulo na metade é chamada de **bissetriz interna** — ou apenas de bissetriz — desse ângulo.

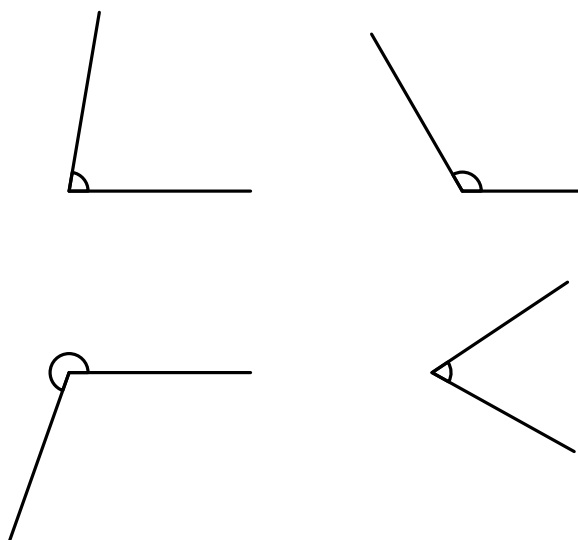
A partir da aplicação dos casos de congruência de triângulo, mostrará, junto com a turma e por meio do rigor matemático, que a bissetriz de um ângulo não nulo e menor que uma volta completa é a mediatriz dos segmentos cujos extremos equidistam do vértice desse ângulo.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS (PARTE 1)

1. Trace as bissetrizes internas dos seguintes ângulos.

- (a) 60° (b) 30° (c) 100° (d) 120° (e) 270° (f) 320°

2. Divida os seguintes ângulos em quatro partes.



EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO (PARTE 2)

Aqui o professor dá uma breve pausa na exercitação para apresentar a bissetriz externa de um ângulo menor que 180° como a bissetriz interna do ângulo externo a esse ângulo. Logo, a bissetriz externa de um ângulo divide o seu ângulo externo na metade.

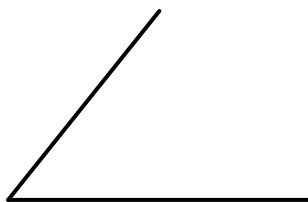
MOMENTO DOS EXERCÍCIOS (PARTE 2)

1. Trace a bissetriz externa de cada um dos seguintes ângulos abaixo e depois verifique com um transferidor se você as traçou corretamente

- (a) 30° (c) 60° (e) 100° (g) 135°
(b) 45° (d) 90° (f) 120° (h) 150°

2. Considere o ângulo abaixo.

CAPÍTULO 1



- Trace as duas bissetrizes, a interna e a externa, desse ângulo.
- Qual é a medida do ângulo entre as duas bissetrizes? Verifique a sua resposta medindo o ângulo com um transferidor.
- Converse com um colega e descubram se a medida do ângulo entre as bissetrizes internas e externas é sempre a mesma independentemente da medida desse ângulo. Justifiquem as suas respostas com argumentos geométricos gerais.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a compreensão do paradoxo por meio da colaboração e participação na discussão e na análise coletiva;
- a capacidade argumentativa do aluno, considerando a construção, a organização e a aplicação dos conceitos e procedimentos lógicos, matemáticos e de outras áreas do conhecimento para fundamentar a sua tese, fazendo isso de maneira ética, respeitando o direito de fala e de opinião dos colegas;
- a capacidade em aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e o conceito de mediatrizes para dividir um ângulo pela metade e para a construção e compreensão das propriedades das bissetrizes interna e externa de um ângulo;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a resolução da atividade motivadora e dos exercícios de fixação.

1.8 ATIVIDADE V – VENDEDORES DE SORVETE

- **Conteúdo abordado:** bissetriz como um lugar geométrico.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 1 aula de 50 minutos.

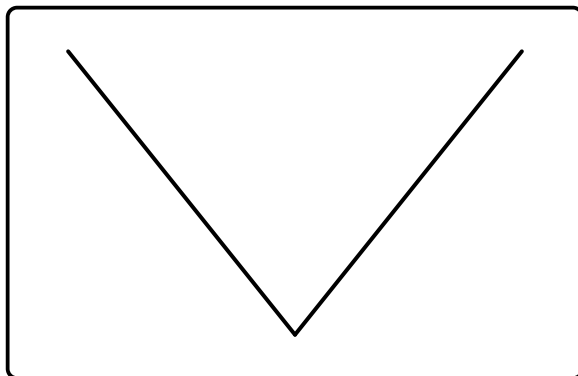
APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Numa praia peninsular triangular, as pessoas costumam ficar sentadas em tendas fixas distribuídas por toda a praia enquanto os vendedores vão oferecendo os seus produtos de tenda em tenda. André e Bruno são vendedores ambulantes de sorvete nessa praia e sempre entram em conflito por causa da disputa pela clientela. Um dia, para acabar com os conflitos, decidiram dividir a península em dois territórios

CAPÍTULO 1

e cada um teria a exclusividade de venda sobre um dos territórios. Eles dividiram assim: a tenda que estivesse mais próxima da margem leste seria atendida por André e as tendas mais próximas da margem oeste, por Bruno. Para que eles pudessem identificar com facilidade se certa tenda estava dentro de seu território ou não e para que nenhum cliente ficasse exatamente a mesma distância de ambas as margens, eles decidiram também marcar na areia para delimitar os territórios. Qual é o lugar geométrico que faz essa delimitação? Justifique geometricamente a sua resposta.

Figura 1.4: Praia com formato acutangular



Fonte: o autor

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Tendo em vista que nas aulas anteriores já foi-se investigado o conceito de mediatriz como lugar geométrico, espera-se que os alunos consigam resolver esta atividade de maneira análoga.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o docente resolve coletivamente a atividade, demonstrando que, se um ponto interno de um ângulo está na bissetriz interna desse ângulo, então ele equidista dos lados deste, explicando que isso prova que a bissetriz interna de um ângulo é única independentemente do comprimento do raio dos arcos necessários para construí-la.

GENERALIZAÇÃO

O professor apresenta uma definição mais ampla de bissetriz, a de lugar geométrico de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo, considerando aqui, também, o prolongamento desses lados. Assim, a bissetriz de um ângulo qualquer, não somente de um ângulo convexo, são duas retas perpendiculares, sendo que uma delas divide o ângulo na metade.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes para resolver o problema motivador; e
- a utilização adequada das ferramentas de desenho.

CAPÍTULO 1

1.9 ATIVIDADE VI – CONSTRUINDO UM CHAFARIZ

- **Conteúdo abordado:** incentro.
- **Quantidade de aulas/tempo:** 2 aulas de 50 minutos cada.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Quer-se construir um novo chafariz circular na Praça Parque Amorim, no bairro da Boa Vista, Recife. O atual chafariz está localizado dentro da área de um gramado com formato triangular e pretende-se construir um novo de modo que ele toque os três lados do gramado em um único ponto cada um. Para isso, os responsáveis pela obra decidiram encontrar primeiro o centro do chafariz para, a partir dele, demarcar os seus limites para a sua construção.

Figura 1.5: Mapa da Praça Parque Amorim



Fonte: Google Maps, 2025

- Mostre que o centro do chafariz, se realmente existir, dista igualmente dos três lados do gramado.
- Construa o chafariz, utilizando apenas régua e compasso.
- Mostre que sempre é possível encontrar o centro do chafariz independentemente do formato do gramado triangular e, ainda, que ele é único, explicando como encontrá-lo somente com régua e compasso.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Espera-se que os alunos sigam de maneira análoga ao que foi feito na Atividade 3 para aplicar as bissetrizes para localizar o centro do chafariz.

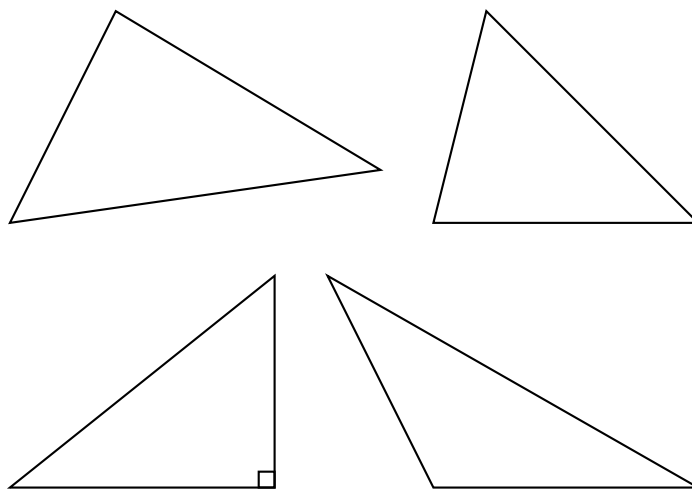
CAPÍTULO 1

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste momento, o professor demonstra com os alunos que as bissetrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectam num mesmo ponto, chamado de incentro, e mostra como construir a circunferência inscrita no triângulo.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Construa, com régua e compasso a circunferência inscrita em cada um dos triângulos abaixo.



PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Avaliar-se-á:

- a capacidade argumentativa e de aplicar, com o devido rigor matemático, a congruência de triângulos e os conceitos já aprendidos sobre bissetrizes resolver o problema motivador e os exercícios de fixação;
- a utilização adequada das ferramentas de desenho; e
- a capacidade em interpretar a situação da atividade em um problema geométrico.

CAPÍTULO 1

1.9 REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. [S. l.: s. n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 5 de dez. de 2025.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista matemática: 8º ano, Ensino Fundamental – Anos Finais**. 1ª. São Paulo: FTD, 2022.

Funções Exponenciais: Atividades Práticas e Ferramentas Tecnológicas

ALINE JULIANE BARBOSA E SILVA¹
JORGE ANTÔNIO HINOJOSA VERA²

A presente proposta didática está baseada em atividades práticas, como a construção de fractais, e no uso de tecnologias acessíveis, como o Geogebra e o Excel, para o ensino das Funções Exponenciais. A sequência foi desenvolvida durante a elaboração da dissertação de mestrado, onde pôde ser aplicada e avaliada. As atividades foram desenvolvidas com o uso de diferentes estratégias didáticas, sempre com foco na aprendizagem significativa, priorizando o planejamento, a diversidade de propostas e a contextualização. Partindo de momentos de diagnose e revisão, o estudo da função exponencial é introduzido por atividades práticas, que exploram a atratividade dos fractais, e recursos como o Excel e o Geogebra. Em seguida, as aplicações da função em diferentes contextos são desenvolvidas por meio da resolução de problemas em equipes. Posteriormente, são trabalhadas as práticas de resolução de equações e inequações exponenciais, de forma expositiva e participativa, com o uso de ferramentas tecnológicas. Por fim, a sequência propõe um momento avaliativo, utilizado como ferramenta para a análise dos resultados.

2.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

A sequência didática foi desenvolvida para ser aplicada em turmas do segundo ano do Ensino Médio, atualmente com carga horária de quatro aulas semanais, para o componente curricular em questão. Portanto, a sequência pretende ser concisa e assertiva. Dispondo de tempo didático extra classe, com o uso de atividades desenvolvidas pelos estudantes em casa ou em horários disponíveis nos Estudos Orientados.

¹EREM Antônio Inácio, alinejulianebs@gmail.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco, jorge.vera@ufrpe.br

CAPÍTULO 2

O conteúdo inclui conceitos fundamentais, como potenciação, propriedades das potências e resolução de equações exponenciais, que são introduzidos por meio de atividades práticas e do uso de tecnologias como o GeoGebra e planilhas eletrônicas.

A presente proposta para o ensino de funções exponenciais tem o objetivo de explorar as propriedades e aplicações da função exponencial de maneira prática e contextualizada.

2.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

2.2.1 Informações Gerais

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

2.2.2 Conteúdos abordados

- Potenciação e propriedades.
- Equação e inequação exponencial.
- Função exponencial e aplicações.

2.2.3 Tema

Desenvolvendo uma sequência didática para o ensino das Funções Exponenciais, com base em tecnologias e atividades práticas.

2.2.4 Justificativa

As funções exponenciais podem ser utilizadas como modelo matemático em inúmeras situações. Variando de fenômenos biológicos, físicos, químicos ou até mesmo sociais, à aplicações financeiras e econômicas, além dos usos nas engenharias.

Por ser um conteúdo importante em diversas áreas do conhecimento, o estudo das funções exponenciais deve ser consistente e desde sua primeira abordagem já direcionado às diversas aplicabilidades. Nesse contexto, a presente sequência pretende explorar, ferramentas tecnológicas e atividades práticas que auxiliem o professor no ensino dos conteúdos em questão, gerando interação com os estudantes e com isso uma aprendizagem efetiva. Sem, no entanto, abrir mão da contextualização e formalização necessárias para posteriores aplicações, nas diversas áreas de trabalho e pesquisa.

2.2.5 Competências

Da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), seguem as competências específicas a serem desenvolvidas, com a aplicação da proposta didática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das

CAPÍTULO 2

questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

2.2.6 Habilidades

Matriz de Referência do SAEPE (Sistema Avaliativo Educacional de Pernambuco) do Ensino Médio

Uma demanda atual das escolas da Rede Estadual de Ensino de Pernambuco, é a construção de habilidades que podem ser mensuradas por indicadores de desempenho, são os chamados descritores do SAEPE e do SAEBE (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Apesar de ser uma avaliação externa, o sistema SAEPE, fornece informações quanto ao desempenho dos estudantes nos referidos indicadores, de modo que podemos ter acesso aos dados específicos destes indicadores, para estudos posteriores. Aqui destacamos os descritores do SAEPE (CAEd, 2023) que serão contemplados no desenvolvimento da proposta didática:

- (D20) Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- (D26) Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- (D28) Resolver problema que envolva função exponencial.
- (D34) Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

BNCC e Currículo de Pernambuco

O Organizador Curricular de Pernambuco (Pernambuco, 2021) é formado por habilidades que estão diretamente ligadas às habilidades da BNCC (Brasil, 2018), de modo que no próprio organizador, estas habilidades estão relacionadas.

CAPÍTULO 2

Na BNCC as habilidades são apresentadas por um código alfanumérico formado por: um par de letras que representam a etapa de ensino; um par de números que indicam as séries de desenvolvimento da habilidade; uma sequência com três ou duas letras que representam a área ou componente curricular; três números, cujo primeiro indica a competência e os dois últimos a numeração no conjunto de habilidades. Como exemplo, o código EM13MAT508 refere-se à oitava habilidade proposta na área de Matemática, relacionada à competência específica 5, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio. No currículo de Pernambuco, o código das habilidades apresentam quatro dígitos a mais, sendo o código do exemplo anterior associado à habilidade cujo código é EM13MAT508PE48. A seguir serão descritas as habilidades desenvolvidas na presente sequência didática:

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508PE47) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT304PE20) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções exponenciais, interpretando a variação das grandezas envolvidas em diversos contextos como, por exemplo, no estudo da Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.
- (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
- (EM13MAT303PE19) Interpretar e comparar situações problemas que envolvam os tipos de juros (simples e composto), utilizando como ferramentas de análise, planilhas e gráficos, enfatizando o comportamento linear e exponencial dos mesmos em cada caso, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.
- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2.2.7 Objetivos

A presente proposta tem como objetivo geral proporcionar aos alunos a compreensão das funções exponenciais, capacitando-os a aplicar esse conhecimento na resolução de problemas e na modelagem de fenômenos em diversas áreas. Para alcançar este propósito, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

CAPÍTULO 2

- Revisar potências e suas propriedades operacionais.
- Relacionar grandezas por meio de funções exponenciais.
- Identificar uma função exponencial, e suas características.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial, esboçando-o previamente na malha quadriculada, bem como, utilizando o Geogebra.
- Resolver problemas envolvendo funções exponenciais.
- Perceber que a função exponencial modela problemas em diversos contextos, e como a análise do seu crescimento ou decréscimo é importante.
- Resolver equações e inequações exponenciais.

2.2.8 Público-alvo

Estudantes do Ensino Médio da Rede Estadual de Pernambuco, na faixa etária de 14 a 16 anos.

2.2.9 Perfil das turmas

Turmas compostas de 35 a 40 alunos, em sua maioria, egressos do Ensino Fundamental da Rede Pública.

2.2.10 Recursos

Quadro-branco, marcadores para quadro-branco, computador, calculadora, projetores digitais, livro didático, fichas de exercícios impressas, malhas quadriculadas, papel seda, papel guache ou colorset, papel quarenta, tesouras, régua ou fitas métricas, fitas adesivas, barbantes, giz branco, cartazes impressos, e smartphones dos estudantes.

2.2.11 Avaliação

A avaliação e o seu acompanhamento serão executados durante o desdobramento das atividades propostas considerando dos estudantes: os conhecimentos prévios, o desenvolvimento nas atividades, o empenho, o desempenho e a evolução, além de garantir uma análise contínua e final do progresso dos alunos.

2.3 ATIVIDADE I

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Potências e Propriedades.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

CAPÍTULO 2

2.3.1 Questões diagnósticas

Para a atividade diagnóstica será proposta a formação de duplas. Deverá ser entregue a cada aluno da turma uma lista com os exercícios (ATIVIDADE DIAGNÓSTICA: POTÊNCIAS E PROPRIEDADES). Os alunos serão convidados a responderem a lista e, no quadro, os seguintes problemas:

1. A metade de 4^{10} é:

a) 2^{19}

d) 4^5

b) 2^{10}

e) 4^8

c) 2^5

2. Sabendo que o valor de 5^7 é 78125, qual o valor de 5^8 ?

3. Em um sítio há 12 árvores. Cada árvore possui 12 galhos e em cada galho tem 12 maçãs. Quantas maçãs existem no sítio?

Nesse primeiro momento espera-se a interação entre os alunos e suas respostas aos problemas propostos no quadro. Estima-se um tempo de 30 min para a resolução dos problemas e dos exercícios.

Com a resolução dos problemas adicionais no quadro, tentamos identificar na turma os alunos que compreendem o conceito de potência e suas propriedades, os mesmos poderão ajudar os que apresentarem dificuldades, na realização das demais atividades da proposta. Neste momento faz-se necessário a atenção do professor para identificar possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos.

A opção pela atividade diagnóstica busca promover uma aprendizagem significativa, pois será ponto de partida para a relação entre conhecimentos prévios e novos, conforme Moreira:

”a essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante.”(Moreira, 1999, p. 141)

CAPÍTULO 2

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA: POTÊNCIAS E PROPRIEDADES

1. Calcule o valor das expressões:

(a) 3^5

(d) $2^3 + 3^3$

(b) $2^2 + 3^2$

(c) 5^4

(e) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^4 \cdot 3$

2. Calcule o valor das expressões:

(a) $(0,01)^3$

(d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$

(b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$

(c) $80 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$

(e) $200 \cdot (0,040)^4$

3. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

(a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$

(d) $(a^n)^m = a^{nm}$

(b) $a^{-n} = -a^n$

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a - b)^n$

(e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$

2.3.2 Revisando potências e propriedades

Segue-se explicação oral do conceito de potência e suas propriedades. A revisão será direcionada por apresentação de slides com a exemplificação desenvolvida no quadro branco.

O estudo das funções exponenciais e a resolução de equações, sistemas e inequações exponenciais, dependem muito destes conteúdos revisados. Para suprir possíveis dificuldades, serão fixados na sala de aula cartazes com resumo das definições e propriedades revistas. A sequência da explanação seguirá os itens listados abaixo, e no quadro branco deverá ser exposto a justificativa das definições e para cada item os exemplos relacionados:

- Potência de expoente natural;
- Propriedades;
- Potência de expoente inteiro negativo;
- Raízes;
- Potência de expoente racional;
- Potência de expoente irracional.

REVISÃO: Potências e propriedades

Potências de expoente natural

Seja a um número real e n um número natural. A potência de base a e expoente n é o número a^n , tal que: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); e $a^n = a^{n-1} \cdot a$, para todo $n \geq 1$.

Note que, para $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Propriedades

Seendo a e b números reais e m e n naturais, valem as seguintes propriedades:

- (A1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- (A2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m \geq n$.
- (A3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- (A4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.
- (A5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração

Vamos usar a propriedade $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}}$.

$$(A1) \ a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m \text{ fatores}} = a^{n+m}.$$

$$(A2) \ \frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ fatores}} = a^{m-n}.$$

$$(A3) \ (a \cdot b)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fatores}} = a^n \cdot b^n, \text{ onde na segunda igualdade usamos a comutatividade dos números reais.}$$

$$(A4) \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fatores}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(A5) \ (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} = a^{m \cdot n}.$$

REVISÃO: Potências e propriedades

Potências de expoente inteiro negativo

Para $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Propriedades

Se a e b números reais não nulos, e m e n inteiros, valem as propriedades:

$$(B1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$(B2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$(B3) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(B4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(B5) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Demonstração

Para n e m naturais as propriedades foram demonstradas na seção anterior. Vejamos os casos onde n e m são negativos.

(B1) Caso os dois expoentes sejam negativos, ou seja, $-m > 0$ e $-n > 0$. Utilizando a propriedade (A1) e a definição, temos

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} \stackrel{(A1)}{=} \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Caso um dos expoentes é negativo. Suponha $m > 0$ e $-n > 0$, neste caso teremos as seguintes possibilidades:

(i) Se $m \geq -n$, teremos pela definição e a propriedade (A2),

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} \stackrel{(A2)}{=} a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

(ii) Se $m < -n$, novamente pela definição e a propriedade (A2)

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{a^m}} \stackrel{(A2)}{=} \frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

As provas das outras propriedades podem ser consultadas em (Silva, 2025).

REVISÃO: Potências e propriedades

Raiz n-ésima

Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural $n \in \mathbb{N}^*$, existe sempre um número real positivo b , tal que $b^n = a$. O número b será chamado raiz n-ésima de a e será representado por $\sqrt[n]{a}$.

Propriedade das raízes

A raiz de um número tem as seguintes propriedades: Para a , b e c reais positivos e n , m , p naturais positivos:

$$(R1) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

$$(R2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

$$(R3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(R4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

$$(R5) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{mp}}.$$

A demonstração das propriedades pode ser encontrada em (Silva, 2025).

Potências de expoente racional

Dados $a \in \mathbb{R}^+$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, a potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ é definida por:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Para $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotaremos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Propriedades

Para a e b reais positivos e r e s racionais, valem:

$$(C1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

$$(C2) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, a \neq 0, m \geq n.$$

$$(C3) (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r.$$

$$(C4) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, b \neq 0.$$

$$(C5) (a^r)^s = a^{r \cdot s}.$$

Em (Silva, 2025), as propriedades foram demonstradas.

REVISÃO: Potências e propriedades

Os lemas que seguem são demonstrados em (Silva, 2025).

Lema 1

Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de \mathbb{R}^+ existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Lema 2

A função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(q) = a^q$ é crescente quando $a > 1$, decrescente para $0 < a < 1$ e constante igual a 1 quando $a = 1$.

Potências de expoente irracional

A potência a^x , com x irracional é definida como segue:

- Caso $a > 1$, a^x é definido pela seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

- No caso $0 < a < 1$, a^x é definido pela propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^s < a^x < a^r.$$

- Quando $a = 1$, visto lema 2, a definição natural é $1^x = 1$.

Unicidade de a^x no caso $a > 1$:

Não podem existir dois números reais distintos, digamos $A < B$, para assumir o valor a^x , com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s,$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o lema 1. (O caso $0 < a < 1$ é análogo)

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por faltas são as potências a^r , com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s , com s racional maior do que x .

Exemplo

A potência $2^{\sqrt{3}}$ é um número real, e a definição de potência está relacionada às potências com expoentes racionais próximos, verificamos que:

$$2^{1,732050807} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732050808}.$$

CAPÍTULO 2

REVISÃO: Potências e propriedades

Potência de expoente real

Tendo sido definidas anteriormente, as potências de expoente racional e irracional, está definida a potência a^x com $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

Propriedades

Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$, as propriedades seguintes são válidas:

$$(P1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

$$(P2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

$$(P3) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$$

$$(P4) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

$$(P5) (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

As propriedades foram demonstradas em (Silva, 2025)

Figura 2.1: Exemplo na planilha do Excel

	A	B	C	D	E	F	G
	α	n	p	$r \cong \sqrt[n]{p}$	a^r	$s \cong \sqrt[n]{p}$	a^s
1				aproximação por falta	aproximação por falta	aproximação por excesso	aproximação por excesso
2	2	2	3	1,7	3,2	1,8	3,5
3				1,73	3,32	1,74	3,34
4				1,732	3,322	1,733	3,324
5				1,7320	3,3219	1,7321	3,3221
6				1,73205	3,32200	1,73206	3,32207
7				1,732050	3,321995	1,732051	3,321998
8				1,7320508	3,3219971	1,7320509	3,3219973
9				1,73205080	3,32199707	1,73205081	3,32199709
10				1,732050807	3,321997087	1,732050808	3,321997086
11				1,7320508075	3,3219970853	1,7320508076	3,3219970856
12							
13							
14							
15							

$x = \sqrt[n]{p} \in \mathbb{I}$
 $\sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$
 $r < x < s$
 $a^r < a^x < a^s$

EXEMPLO: $a^r < 2^{\sqrt{3}} < a^s$

Fonte: Autor

Em alguns momentos da aula, faremos uso de calculadoras e planilhas eletrônicas. Os valores de exemplos propostos poderão ser testados na calculadora do computador, que deverá ser acompanhado pelos alunos por meio da projeção de tela. Com essa dinâmica mostramos o uso de funções/teclas das calculadoras, que os alunos devem aprender.

A planilha eletrônica será utilizada na determinação de valores aproximados para potências com expoentes irracionais do tipo $\sqrt[n]{x}$, funções básicas do Excel serão mostradas, como por exemplo:

- Escrever = $x^{(1/n)}$, para o cálculo de $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

CAPÍTULO 2

- Adicionar ou remover casas decimais.
- Usar a função "arredondar para baixo".
- Deixar a fórmula para o cálculo nas células.

No exemplo da Figura 2.1, apresentaremos os passos de escrever:

- =C2^(1/B2) na célula D2, para calcular a aproximação do irracional.
- =A2^D2 na célula E2, para determinar a aproximação da potência por falta.
- =D2+0,1 na F2, para determinar a aproximação do irracional por excesso.
- =A2^F2 na G2, para determinar a aproximação da potência por excesso.

Procuramos conduzir a aprendizagem por meio de ferramentas tecnológicas, para estimular os estudantes à sua adequada utilização. Além de facilitar processos de cálculo, esses momentos apresentam aos discentes novas experiências, e diversifica seus conhecimentos, quanto à tecnologia. Concluiremos esta etapa com a correção dos exercícios diagnósticos.

2.3.3 Momento dos exercícios

Terminada a exposição das definições e propriedades, sugere-se a realização de exercícios relacionados ao conteúdo exposto. Tal exercício deve ser realizado individualmente, porém as conversas, dúvidas e sugestões entre alunos serão, não somente permitidas, mas também estimuladas pelo professor.

Os exercícios propostos foram adaptados de uma ficha disponível no Portal da Matemática/OBMEP, disponível em (Assis; Miranda, 2025). Deverão ser iniciados na sala e concluídos em casa ou nos momentos de estudo orientado. Pretende-se com estes exercícios fixar os conteúdos revisados e acompanhar a aprendizagem dos alunos. O exercício deverá ser entregue na aula seguinte e posteriormente corrigido e comentado. Segue a apresentação da lista de exercícios:

EXERCÍCIOS: Potências e propriedades

1. Calcule as potências abaixo:

(a) 11^2

(b) 2^8

(c) 17^0

(d) $(-4)^4$

(e) -4^4

(f) $(\frac{2}{3})^4$

(g) $2,7^2$

(h) $(\frac{4}{5})^{-3}$

(i) $(-5)^{-4}$

2. Utilize uma única potência para representar as expressões abaixo:

CAPÍTULO 2

(a) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$

(c) $\frac{4 \cdot 8^2 \cdot 2^3}{16 \cdot 2^{-1}}$

(b) $\frac{3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7}{27}$

(d) $\frac{a^2 \cdot a^4}{a^3}$

3. Escreva os radicais abaixo na forma de potência, simplificando quando possível.

(a) $\sqrt[3]{6^9}$

(c) $\sqrt[3]{(\sqrt{9})^4}$

(b) $\sqrt[5]{(-8)^2}$

(d) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{10}$

4. Determine o valor numérico da expressão:

$$(\sqrt[6]{4})^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

5. O valor da expressão $\sqrt[3]{5^{-2}} \cdot 5^{1,333\dots}$ é:

(a) um número primo.

(d) um número irracional.

(b) um decimal exato.

(c) uma dízima periódica.

(e) um número não real.

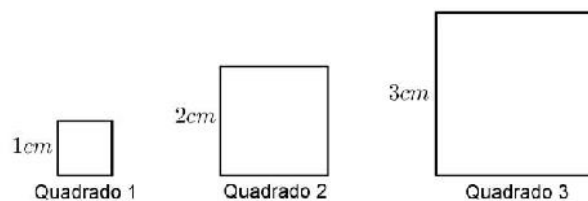
6. Escreva em uma única potência:

(a) a metade de 2^{50} .

(c) o quadrado do quádruplo de 25^{12} .

(b) o triplo de 3^{15} .

7. Observe a figura.



Determine:

(a) a medida do lado do quadrado 5.

(c) qual quadrado terá área 81 cm^2 .

(b) a área do quadrado n .

8. Luiz ingeriu 500 mg de amoxicilina às 8 h. Suponha que a meia-vida dessa substância é de aproximadamente 1h.

(a) Determine a massa dessa substância no organismo de Luiz às 9h, 10h, 11h.

(b) Qual é a massa restante no organismo de Luiz após t horas da ingestão do remédio?

CAPÍTULO 2

9. Jonas precisa fazer um empréstimo em um banco, que cobra uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Ele tomou emprestado R\$ 2.400,00.
- (a) Se Jonas pagar sua dívida depois de 3 meses, qual será o valor total pago?
- (b) Escreva uma função f que expresse a quantia paga em função do tempo t , dado em meses.
- (c) Ao final de m meses, ele pagou ao banco R\$ 3.513,84. Qual o valor de m ?
10. Se $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$, determine a^b .

2.3.4 Procedimentos avaliativos

No primeiro momento, serão avaliados os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao tema, por meio da atividade diagnóstica e da resolução dos problemas propostos no quadro. Buscando acompanhar o processo de aprendizagem, surgere-se que o professor esteja atento as respostas, dúvidas e questionamento dos estudantes em cada etapa da atividade.

Durante a revisão, por meio da exposição oral, o professor poderá direcionar as perguntas que servirão de base para as definições e exemplificação das propriedades. Assim, teremos a avaliação não apenas pelos materiais escritos, na atividade diagnóstica e no exercício que encerra a atividade, mas também uma percepção sobre os conhecimentos dos alunos, já na primeira atividade. O procedimento de fazer perguntas durante a exposição do conteúdo, além de estimular o raciocínio dos alunos, fornece um retorno imediato sobre potencialidades e dificuldades a serem trabalhadas.

Ainda como procedimento avaliativo, mencionamos o exercício proposto no final da aula, contendo 10 (dez) questões sobre o assunto revisado. O acompanhamento deste exercício, que deverá ser entregue na aula seguinte, fará parte do processo avaliativo na unidade curricular trabalhada.

2.4 ATIVIDADE II

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Função Exponencial
- **Quantidade de aula/tempo:** 3 (três) aulas/2h30min.

2.4.1 Dobraduras e fractais

Nesta etapa propomos a formação de grupos de 4 à 5 alunos. Com o objetivo de introduzir o conteúdo de funções exponenciais por meio de funções de domínios discretos, iremos propor três atividades práticas, em cada uma delas, os estudantes devem associar grandezas e construir o gráfico. Passemos para a descrição das atividades:

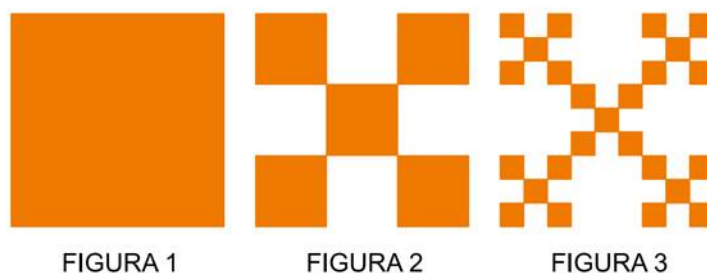
- 1ª) Cada grupo deverá receber uma folha de papel seda colorido, e seguindo as orientações do professor dobrá-la ao meio sucessivas vezes. A cada nova dobra, os membros da equipe deverão anotar o número de retângulos formados na folha pelos vincos das dobras. Na ficha de atividades, estará disponível uma tabela (a ser preenchida pela equipe) e uma malha quadriculada para a construção do gráfico (é importante que eles percebam que alguns pontos não poderão ser anotados no

CAPÍTULO 2

papel). As grandezas observadas nessa etapa serão: o número de dobras e a quantidade de retângulos formados (contabilizando apenas, os menores retângulos formados). A função que deve ser identificada é $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 2^n$.

2ª) Cada equipe receberá uma folha contendo a sequência de figuras:

Figura 2.2: Sequência de figuras



Fonte: Autor

Será apresentado a turma, oralmente, as iterações (modificações) realizadas em cada figura para a obtenção da figura posterior, com esta apresentação, os fractais serão introduzidos por meio de suas características.

Na atividade, é proposta a construção da a figura 4. Para auxiliar a construção da figura será disponibilizada uma malha 9 x 9.

Os alunos devem responder na folha de atividades a pergunta sobre quantos quadrados têm as próximas figuras da sequência (figuras 4 e 5) que geram o fractal. Também nessa atividade, será pedido a construção do gráfico e a tabela que associe as grandezas: número da figura (ou posição da figura na sequência) e número de quadrados coloridos em cada figura. Neste caso, será ainda mais difícil anotar os pontos no plano cartesiano uma vez que a figura 4 possui 125 quadrados coloridos e a figura 5 possui 625. Aqui, será solicitado aos alunos, escreverem a lei de formação de uma função que relacione as grandezas em questão. É importante a percepção do crescimento exponencial, ou seja, como os valores aumentam rapidamente.

As figuras obtidas devem ser expostas aos demais e, comparadas as respostas, identificados os possíveis erros, também as funções escritas devem ser avaliadas pelo professor.

Pretende-se obter a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 5^{(n-1)}$ e a figura:

3ª) Nesta atividade será proposta a construção do triângulo de Sierpinski. Assim como na atividade anterior, deve-se associar a posição da figura na sequência ao número de triângulos coloridos. Os triângulos serão construídos no papel guache e pintados com giz branco. Será orientada a construção do triângulo equilátero por meio de marcações com lápis presos com barbante, fita e régua.

Apresentada aos alunos a sequência da Figura 2.4, estes devem ser estimulados por meio de perguntas a identificar o processo de geração das figuras na sequência, e perceber o padrão de semelhança.

Figura 2.3: Figura esperada

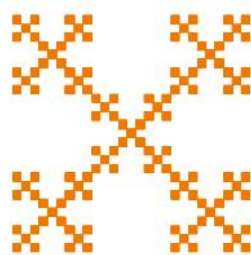


FIGURA 4

Fonte: Autor

Figura 2.4: Triângulo de Sierpinski



Figura 1

Figura 2

Figura 3

Fonte: Autor

Uma sugestão é apresentar à turma algum vídeo, por exemplo <http://www.youtube.com/watch?v=d-1cM6J2-Jc> (**artemática:sierpinski2018**), com a geração do fractal, para de forma dinâmica mostrar as características de autossimilaridade, e geração por processo iterativo/recursivo.

Como no item anterior, será solicitado a tabela que relaciona as grandezas e a função correspondente. Mas uma vez o estudante encontrará dificuldades de anotar os pontos no plano cartesiano a partir da quarta figura, espera-se, no entanto, que ele perceba que o crescimento na atividade dos quadrados se deu “mais rapidamente”. A função que deve ser identificada é $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 3^n$.

- 4ª) A última atividade será proposta para ser realizada em casa ou no momento dos estudos orientados. Será a construção de um Tapete de Sierpinski no papel quarenta (papel offset) ou cartolina, este deverá ser marcado e pintado seguindo as indicações da sequência. Por ser uma atividade demorada, deverá ser entregue pelas equipes na semana seguinte.

A construção do Tapete de Sierpinski, deve ser demonstrada por meio de seu processo gerador, de forma que os estudantes consigam reproduzir o fractal no papel (apesar de poucas iterações).

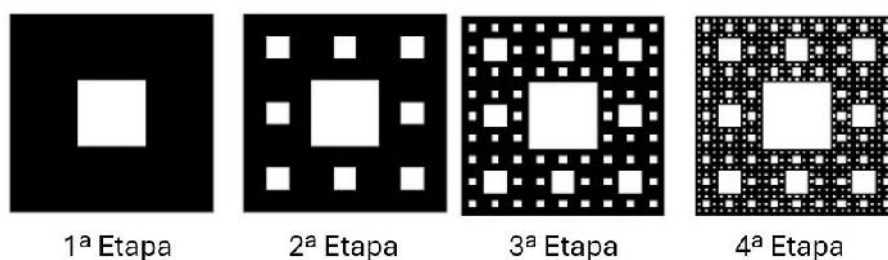
Assim como nas etapas anteriores será solicitado a tabela e a função correspondente, aqui as grandezas envolvidas serão: as etapas de pintura e o número de quadrados pintados por etapa. As equipes serão orientadas a fazer apenas três etapas de pintura. Espera-se obter a função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 8^{(n-1)}$.

Para a construção do tapete segue a figura:

Ao finalizar as atividades práticas, os gráficos que não puderem ser construídos no papel serão demonstrados no Geogebra. Por se tratar de um programa intuitivo e de fácil manipulação, espera-se que os alunos

CAPÍTULO 2

Figura 2.5: Tapete de Sierpinski



Fonte: Autor

consigam utilizá-lo, para isso, utilizarão os notebooks do laboratório móvel. Apesar de ser pedido uma atividade simples, este momento é importante para o desenvolvimento das demais, aqui serão superadas possíveis dificuldades de utilização do programa. Por meio da projeção de tela, o professor fará as orientações de uso.

Inicialmente, os pontos anotados nas tabelas das atividades serão representados no programa, depois será escrita a função correspondente. Faremos uso da função "zoom" para identificar os pontos sobre o gráfico da função correspondente, dessa forma, validando se a função está correta.

Ao anotar os pontos, os alunos representarão a função de domínio \mathbb{N} , ao escrever a equação, estarão representando a função em \mathbb{R} . Dessa forma, estaremos ampliando (graficamente) o domínio das funções para os números reais.

Também é possível analisar o primeiro gráfico, como os pontos de uma P.G., estabelecendo dessa forma, uma relação entre as progressões geométricas e as funções exponenciais.

2.4.2 Generalização e formalização de conceitos

No quadro, será definida a função exponencial, exemplos e características gerais. Também será feita a construção dos gráficos das funções reais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x$. Os exemplos serão utilizados para analisar os casos de crescimento e decrescimento da função exponencial.

Ao mostrar a definição e os exemplos, sugere-se mencionar as funções obtidas a partir das atividades práticas. Pode-se fazer alguns questionamentos como: "Seria possível a construção de uma função exponencial decrescente com o Triângulo de Sierpinski? Existe alguma grandeza que no caso em questão diminui exponencialmente?"

Apresentar, como exemplo, a função área restante $A(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, de um triângulo de área inicial 1. Pretende-se, com isso, estabelecer a relação entre os conceitos e as atividades concretas.

2.4.3 Analisando gráficos de funções no Geogebra

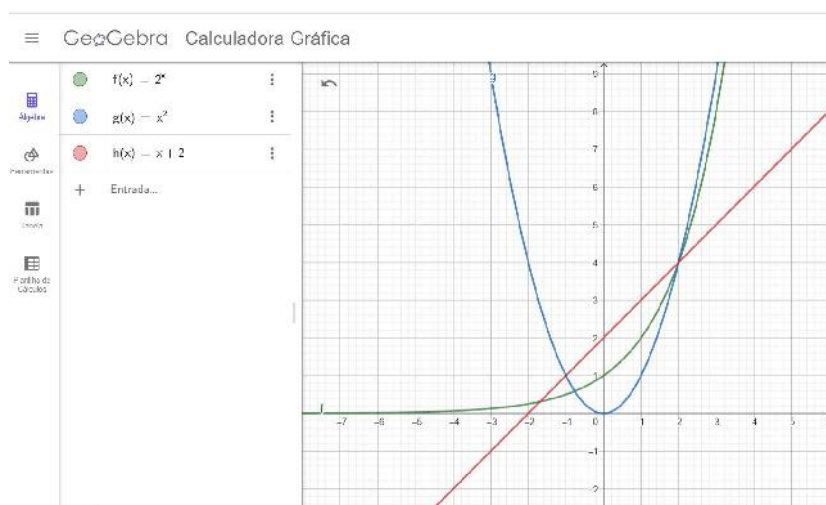
Usando o Geogebra vamos analisar os gráficos das funções reais $f(x) = 2^x$; $g(x) = x^2$; e $h(x) = x + 2$. Primeiramente, os estudantes serão questionados sobre modelos das funções apresentadas. Logo em seguida, será analisado os crescimentos das funções.

Como atividade, solicitar dos alunos que obtenham no app Geogebra, de forma individual ou em duplas, os gráficos das seguintes funções de domínio real:

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad h(x) = 3^x + 4, \quad i(x) = 3^x - 2, \quad j(x) = 2 \cdot 3^x, \quad l(x) = \frac{1}{2} \cdot (3^x).$$

CAPÍTULO 2

Figura 2.6: Gráficos no Geogebra



Fonte: Autor

2.4.4 Procedimentos avaliativos

A participação dos estudantes nas atividades propostas será a forma de avaliar nesta atividade. Também serão considerados as respostas orais durante as etapas de explanação e questionamentos. Serão recolhidas as fichas de atividade, para análise posterior.

2.5 ATIVIDADE III

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Aplicações da Função Exponencial.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40min.

2.5.1 Crescimento exponencial

Espera-se que os alunos já tenham percebido como a função exponencial tem a característica de “rápido” crescimento ou decrescimento. De forma lúdica, o tema é tratado no vídeo sobre uma lenda da criação do jogo de xadrez e sobre a bomba nuclear. O vídeo “A bomba atômica do trigo”, do canal “Isto é Matemática”, será apresentado aos estudantes no laboratório de informática, onde as demais atividades serão desenvolvidas. O vídeo está disponível em <https://youtu.be/GThyTefiVlY?si=uPwXk5INHEGKuXsg>.

2.5.2 Resolvendo problemas com auxílio do Geogebra e planilhas

Inicialmente serão apresentados três problemas envolvendo a função exponencial, estes serão resolvidos utilizando o quadro, o excel e o Geogebra. A exposição inicial será conduzida pelo professor, e os problemas tratarão da questão dos juros compostos.

Buscando a interação dos estudantes por meio de perguntas, serão resolvidos os seguintes problemas propostos por Barrozo (Barrozo; Costa; Capelato, 2017) na sua proposta de sequência didática para o ensino da Função Exponencial:

CAPÍTULO 2

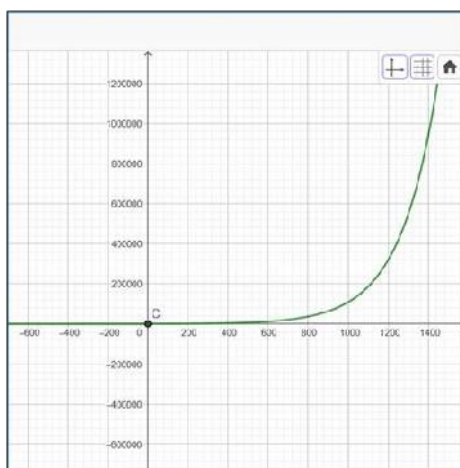
Figura 2.7: Vídeo: “A bomba atômica do trigo”



Isto é Matemática - T08E13 - "A Bomba Atômica do Trigo"

Fonte: Canal Isto é Matemática, (Matemática, 2016)

Figura 2.8: Gráfico no Geogebra



Fonte: Autor

- 1º) Suponha que ao entrar na universidade você tenha ganho uma quantia de Q_0 reais de presente e resolveu guardá-la em uma aplicação cuja taxa de juros mensais é de $j\%$. Supondo que os juros sejam compostos continuamente, deduza a função matemática que calcula o valor acumulado deste dinheiro após t meses. Utilizando esta função e supondo $Q_0 = R\$ 500,00$ e $j = 0,53\%$, descubra quanto você terá ao finalizar seu curso, considerando que se formará em 4 anos.
- 2º) Agora suponha que você decida continuar guardando este dinheiro (após formado) para sua aposentadoria. Assim, você mudará seu investimento para uma aplicação mais rentável, depositará k reais todo mês (k fixo) e não fará saques. Deduza a função matemática que calcula o valor acumulado após t meses, no caso geral. Utilizando esta função e considerando $j = 0,7\%$ e $k = R\$ 150,00$, descubra quanto você terá quando fizer 65 anos de idade.
- 3º) Suponha ainda que ao fazer 65 anos você pare de fazer depósitos e comece a retirar um valor mensal (finalmente a aposentadoria chegou!!!). Supondo que seu saldo seja igual a Q , que você retirará w

CAPÍTULO 2

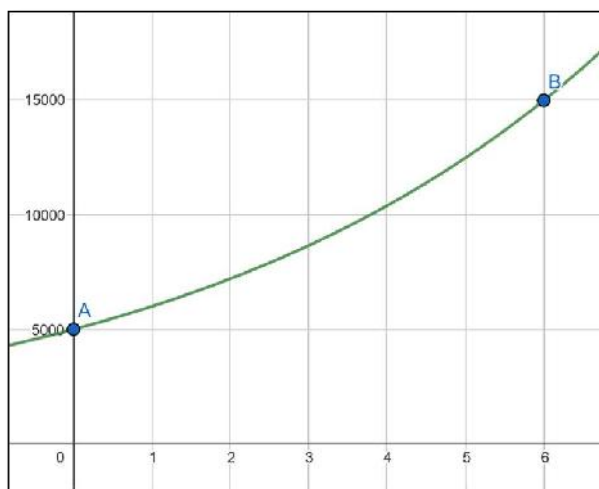
reais todo mês e que a taxa de juros seja $i\%$ ao mês, encontre a função que representa seu saldo em um tempo t qualquer, após iniciar a retirada do dinheiro. Utilizando o valor de Q calculado no problema anterior, $i = 0,7\%$ ao mês e $w = R\$ 6.000,00$, calcule seu saldo ao fazer 90 anos de idade.

2.5.3 Momento de exercícios com auxílio de ferramentas

Serão formados grupos de três a quatro alunos para a resolução de uma lista com cinco problemas. Cada grupo deverá escolher um problema para ter a resolução apresentada aos demais, de modo que todos os problemas sejam apresentados. Cada equipe pode escolher a forma de apresentar o problema, se utilizarão apenas o quadro, o Geogebra, o Excel, ou outra ferramenta. A lista respondida deve ser entregue ao professor e apenas um problema apresentado por grupo. Os problemas foram escolhidos de forma a mostrar a diversidade de aplicações das funções exponenciais. Segue a lista de problemas propostos:

EXERCÍCIOS: Aplicações da função exponencial

1º Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.



- Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa?
 - Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias?
 - Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(x) = ka^x$, determine os valores de a e de k .
 - Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?
 - Qual é o número de bactérias após 3 meses?
- 2º Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C.(1 + i)^t$, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é o tempo. Com um capital de $R\$ 20.000,00$, a uma taxa anual de ($i = 0,12$), qual será o montante após 3 anos?

CAPÍTULO 2

3º Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que $e = 2,7$ e t é o tempo decorrido, em hora.

- Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno?
- Qual a temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno?

4º Estima-se que certa população aumente de acordo com a lei $P(t) = 15000(1,035)^t$, sendo t o tempo em anos e $P(t)$ o número de indivíduos após t anos. Adotando $(1,035)^{10} = \sqrt{2}$, determine o número de indivíduos daqui a 80 anos.

5º A taxa de inflação anual de certo país é 15%, isto é, a cada ano os produtos comercializados nesse país têm seus preços multiplicados por 1,15 e, em n anos, por $1,15n$.

- Quantos anos são necessários para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço?
- Qual será o preço daqui a 7 anos de um produto que hoje custa R\$ 8,00 nesse país?

2.5.4 Procedimento avaliativo

Os estudantes serão avaliados pelo processo de realização e apresentação dos problemas. Será verificado se seguem um raciocínio lógico na resolução dos problemas e se utilizam de corretamente as ferramentas escolhidas para resolução e apresentação. Também fará parte do processo avaliativo, a correção da lista proposta, realizada posteriormente pelo professor.

2.6 ATIVIDADE IV

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Equações e inequações exponenciais.
- **Quantidade de aula/tempo:** 1 (uma) aula/50min.

2.6.1 Resolvendo equações e inequações exponenciais

Nesta etapa serão resolvidos no quadro exemplos de equações e inequações exponenciais. É importante mostrar métodos diferentes de resolver estas equações, usando o recurso da fatoração e a substituição de termos, também serão resolvidos, sistemas de equações exponenciais.

2.6.2 Momento de exercícios

Em duplas, será solicitado a resolução do exercício do livro didático Conexões com a Matemática (Moderna, 2016), das seções sobre equações, inequações e sistemas exponenciais. Esta atividade é composta por 14 questões, entre exercícios próprios para fixação dos métodos de resolução e exercícios de aplicação dos conceitos da exponencial.

CAPÍTULO 2

As questões propostas nesta atividade tratam de crescimento populacional, decomposição de substâncias nos organismos, entre outros.

Poderá ser sugerido aos alunos que utilizem os recursos trabalhados nas atividades anteriores.

O exercício será iniciado na sala de aula e os alunos deverão terminá-lo em casa. É importante que os alunos sejam estimulados a tentar resolver todas as questões, mas caso não consigam resolver alguma, anotem as dúvidas para o momento de correções.

2.6.3 Correções e procedimentos avaliativos

A verificação sobre a realização dos exercícios é a forma proposta como avaliação desta atividade, que posteriormente deve ser corrigida com a turma.

A depender do ritmo de andamento das atividades da proposta pedagógica, talvez seja necessário a correção nos momentos de estudo orientado. Uma vez que a forma de resolução das exponenciais é nova para a maioria dos estudantes é importante realizar a correção destes exercícios no quadro. (No momento da correção os recursos serão utilizados apenas para verificações)

Nesta etapa, o professor perceberá as possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes, e deverá orientá-los quanto aos erros observados.

2.7 ATIVIDADE V

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Funções e equações exponenciais.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40min.

2.7.1 Atividade avaliativa

A atividade será composta por dez questões, que tratam os conceitos básicos do tema e algumas aplicações. O grau de dificuldade das questões vai variar, sendo a maioria fácil (5 questões), algumas medianas (3 questões) e apenas duas questões um pouco mais desafiadoras, não traremos aqui questões muito difíceis ou trabalhosas. A atividade será individual e sem a utilização dos recursos utilizados em alguns momentos anteriores, porém possível de ser resolvida sem cálculos excessivos.

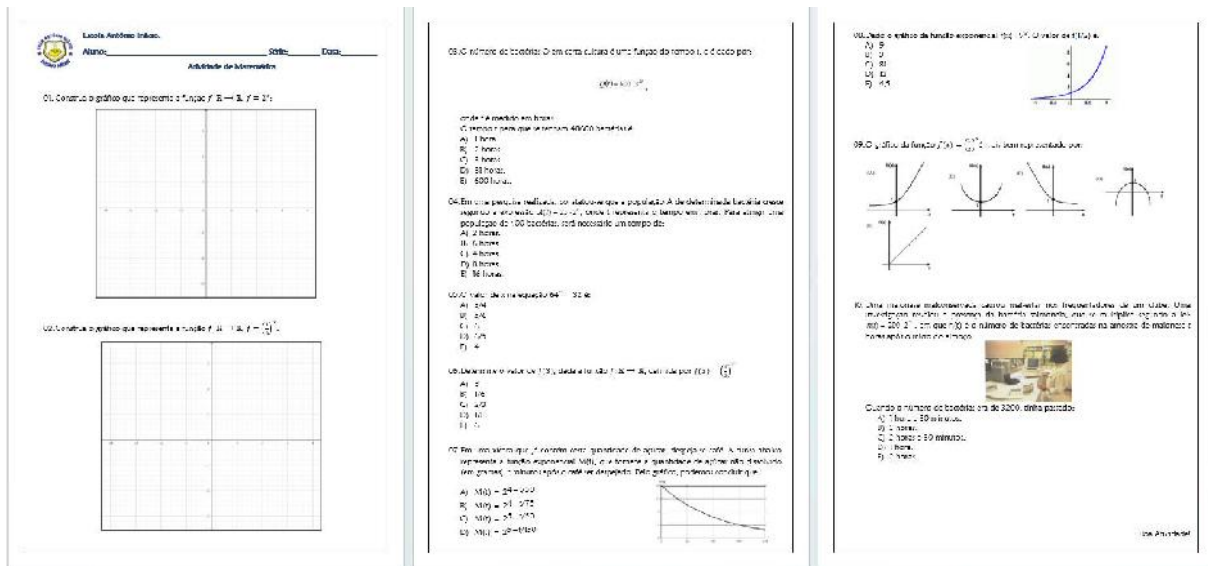
Esta atividade pretende ser desenvolvida para a verificação dos objetivos estabelecidos e das habilidades esperadas.

A sugestão da atividade proposta a seguir, é apenas um modelo de avaliação aplicada anteriormente pelo autor, que serviria para esse fim, no entanto, compreendemos que o objetivo deste instrumento avaliativo, será melhor alcançado, se ele for construído a partir da observação de todo processo e do desempenho já apresentado pelos alunos. Dessa forma é importante rever, alterar, ou substituir totalmente, caso se perceba necessário. Pois, como afirma Luckesi (Luckesi, 2011) "a avaliação deve ser flexível e adaptável, considerando o processo de aprendizagem de cada aluno".

Os comentários e correções desta atividade, feitos posteriormente, certamente contribuirão para o desenvolvimento da aprendizagem efetiva. Independente do desempenho dos estudantes nesta atividade, estes momentos de correções e comentários são necessários para a consolidação dos saberes.

CAPÍTULO 2

Figura 2.9: Modelo de atividade avaliativa



Fonte: Autor

2.8 CONSIDERAÇÕES

Ao combinar métodos tradicionais com o uso de tecnologias e atividades práticas, espera-se que a sequência didática, proposta para o ensino da função exponencial, contribua para o desenvolvimento das competências e habilidades previstas. Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos poderão explorar conceitos fundamentais como potenciação e propriedades das funções exponenciais, além de aplicá-los em contextos reais, como o crescimento populacional e a matemática financeira. O uso de ferramentas como o GeoGebra e planilhas eletrônicas auxiliam na construção e análise de gráficos, proporcionando aos alunos uma compreensão visual dos problemas.

A proposta foi planejada para promover a aprendizagem significativa, incentivando a autonomia dos alunos, conforme sugerido por Bacich (Bacich; Moran, 2017) sobre metodologias ativas. Essas metodologias colocam o aluno no centro do processo, permitindo que construam o conhecimento de forma engajada e contextualizada. Além disso, a sequência teve como objetivo integrar teoria e prática, permitindo que os alunos percebessem a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em problemas do cotidiano, fortalecendo assim a aprendizagem e o interesse pelo tema.

Com base nas experiências e no planejamento das atividades, espera-se que a abordagem seja aplicável à realidade de turmas do Ensino Médio. Esperamos, portanto, que a presente sequência didática seja uma ferramenta eficaz no ensino de funções exponenciais, trazendo benefícios que vão além do aprendizado do conteúdo, capacitando os alunos para enfrentar os desafios do cotidiano.

CAPÍTULO 2

2.8 REFERÊNCIAS

ASSIS, Cleber; MIRANDA, Tiago. **Função exponencial e Propriedades**. [S. l.: s. n.], 2025. Portal da OBMEP. Disponível em:

<https://cdnportaldaoobmep.impa.br/portaldaoobmep/uploads/material/5ohpe7bqa408s.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2025.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.

BARROZO, Sidineia; COSTA, Matheus Moreira; CAPELATO, Erika. Proposta de uma sequência didática para o ensino da função exponencial. **VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de Actas**, Madrid, p. 390–400, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s. n.], 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

CAED. **Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, 2023. Disponível em: <https://avaliacaoemontoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/colecões>.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**. São Paulo: Cortez, 2011.

MATEMÁTICA, Isto é. **Isto é Matemática - T08E13 - “A Bomba Atômica do Trigo”**. [S. l.: s. n.], abr. 2016. YouTube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=GThyTefiV1Y>. Acesso em: 17 jul. 2025.

MODERNA, Editora. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2016.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: Editora pedagógica e universitária São Paulo, 1999. v. 2.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco: Ensino Médio**. Recife: [s. n.], 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-medio/>.

SILVA, Aline Juliane Barbosa. **Atividades práticas e ferramentas tecnológicas no ensino das funções exponenciais**. 2025. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife.

3

Porcentagem: uma proposta didática para a resolução de problemas do SAEPE

LUIZ HENRIQUE BERNARDO DA SILVA¹
SEVERINO BARROS DE MELO²

A presente proposta didática é um produto que integra o estudo da aritmética euclidiana vinculado à área da matemática financeira, mediante à necessidade de revisitar o conteúdo de Porcentagem no Ensino Médio, devido à carência apresentada pelos estudantes da Escola de Referência em Ensino Médio Alberto Tôrres, da Rede Estadual de Pernambuco, e verificada tanto nos resultados das avaliações diagnósticas quanto das avaliações formativas realizadas pela rede, que também pode ser vista como consequência das lacunas originadas em função da suspensão das aulas no período da pandemia da COVID-19.

Este produto foi elaborado pelo mestrando Luiz Henrique Bernardo da Silva, sob orientação do professor doutor Severino Barros de Melo, para obtenção do grau de Mestre do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e seu principal objetivo é acrescentar aos docentes leitores um roteiro de ensino para recomposição do conteúdo de *Porcentagem* em turmas do Ensino Médio, além de contribuir com a prática pedagógica de professores que lidam com estudantes em situações semelhantes. Para tanto, esta proposta de sequência didática foi elaborada pautada na resolução de problemas elementares e fundamentados nas exigências mínimas de algumas competências e habilidades da BNCC, do Currículo de Pernambuco e da Matriz de Referência do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), visando facilitar e ressignificar o processo de ensino e de aprendizagem. Vale salientar que as quatro atividades iniciais apresentam avaliações

¹Escola de Referência em Ensino Médio Alberto Tôrres, luizhbdasilva@gmail.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco, sbmelo55@gmail.com

CAPÍTULO 3

diagnósticas compostas de questões retiradas de provas do SAEPE de 2015 a 2022. Espera-se que este produto didático proporcione resultados positivos para os professores e significativos para os estudantes.

3.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

Não é de hoje que muitos alunos apresentam dificuldades em compreender e aprender conceitos matemáticos e as suas aplicações. Na maioria das vezes, isso decorre do fato de a matemática, recorrentemente, ser encarada como um componente curricular complexo e pouco atrativo, exigindo do professor a criação de atividades que gerem e tornem o aprendizado mais significativo. Além de a grade curricular ser ampla, as turmas são compostas de estudantes com diferentes ritmos de aprendizagem e níveis de conhecimento, o que demanda do professor buscar, criar e fazer uso de novas estratégias de ensino, de adaptação de atividades e de ajustes nos procedimentos avaliativos.

Ancorando-se na visão de Vygotsky quando evidencia que o aprendizado é um processo social e cultural, mediado pela interação com outras pessoas e com os instrumentos culturais, conforme rego2013vygotsky, faz-se necessário promover um processo de ensino participativo, no qual os estudantes estejam expostos às interações com outros indivíduos, com o objetivo de compartilhar ideias, realizar discussões e assimilar diferentes posicionamentos. É necessário, também, considerar que o aprendiz traz consigo uma bagagem de conhecimentos prévios, muitas das vezes desorganizados, que podem ser reorganizados e aproveitados como sedimentos e âncoras para novas aprendizagens. Sobre isso, moreira1999teorias discorre sobre a importância de o professor partir do que os alunos já sabem, estabelecendo conexões entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios, a fim de que o aprendiz aprenda significativamente.

No que diz respeito às práticas pedagógicas, de acordo com bacich2017metodologias, é preciso que elas oportunizem o estudante ser participante ativo das situações de aprendizagem, promovendo protagonismo e autonomia. Nesse contexto, o professor atua como facilitador, proporcionando aos alunos oportunidades de investigar, experimentar, discutir e resolver problemas.

Por fim, é indispensável que, para proporcionar um estruturado processo de ensino e de aprendizagem, seja elaborada e utilizada uma sequência didática que respeite o ritmo de aprendizado e as necessidades individuais dos alunos e que estimulem o pensamento crítico, a resolução de problemas e a construção coletiva do conhecimento. Em suma, a articulação dessas abordagens favorece o ensino e a aprendizagem mais significativos, segundo moreira2006aprendizagem.

3.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

3.2.1 INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

3.2.2 CONTEÚDOS ABORDADOS

CAPÍTULO 3

- Conceito de porcentagem.
- Representação percentual.
- Taxa percentual.
- Cálculo percentual.
- Porcentagem de porcentagem.
- Variação percentual.

3.2.3 TEMA

A resolução dos problemas de porcentagem presentes nas avaliações do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), entre os anos de 2015 e 2022.

3.2.4 JUSTIFICATIVA

A porcentagem é amplamente utilizada no cotidiano em ações como: calcular juros, acréscimos, descontos, taxas de crescimento ou decréscimo, e, também, na análise e inferência de dados estatísticos. A BNCC, o Currículo de Pernambuco e a Matriz de Referência do SAEPE evidenciam que os estudantes devem dominar o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, descontos e acréscimos dentro das mais variadas situações de necessidades. Daí, é terminantemente conclusivo que dominar o conceito de porcentagem proporcionará aos aprendizes outro olhar sobre o universo dos números, das relações de proporcionalidade e do mundo financeiro, e, além disso, capacidade e habilidades resolver problemas afins dentro das mais diversas circunstâncias do conhecimento, principalmente do contexto social no qual estão inseridos.

3.2.5 COMPETÊNCIAS

- Relacionar fração, número decimal e porcentagem diante de problemas que envolvem o cálculo de porcentagens por equivalência de frações ou fração de uma quantidade e resolver problemas com diferentes abordagens de porcentagem (descontos e acréscimos).
- Compreender taxas percentuais.
- Descrever o processo resolutivo envolvendo porcentagens e realizar cálculos utilizando estratégias pessoais, cálculos mentais e calculadora.

3.2.6 HABILIDADES

Matriz de Referência do SAEPE do Ensino Médio:

- Resolver problema que envolva porcentagem (Descritor 16); associar a metade de um total ao seu equivalente em porcentagem; associar a metade de um total a algum equivalente, apresentado como fração ou porcentagem; determinar a porcentagem envolvendo números inteiros em problemas contextualizados ou não (CAEd, 2023).

BNCC e Currículo de Pernambuco:

- (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando es-

CAPÍTULO 3

estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021a).

- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021a).
- (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021a).
- (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021a).
- (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial (Brasil, 2018).
- (EM13MAT303PE19) Interpretar e comparar situações problemas que envolvam os tipos de juros (simples e composto), utilizando como ferramentas de análise, planilhas e gráficos, enfatizando o comportamento linear e exponencial dos mesmos em cada caso, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais (Pernambuco, 2021b).
- (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões (Brasil, 2018).
- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumento (Brasil, 2018).
- (EM13MAT104PE09) Investigar os processos de cálculo envolvendo as noções de taxas e de índices de natureza socioeconômica (produzindo argumentos e explorando taxas como: IR, ICMS, IPTU, IPVA), a fim de produzir análise e argumentos (Pernambuco, 2021b).

3.2.7 OBJETIVOS

- Resgatar o conceito de porcentagem como uma fração ou razão cujo denominador é 100, permitindo que os alunos reconheçam sua aplicação em diferentes contextos.
- Capacitar os alunos a identificar e interpretar taxas percentuais em contextos variados.
- Facilitar a compreensão dos alunos sobre como porcentagens se relacionam com frações e números decimais, e como converter entre essas formas.
- Ensinar aos alunos o cálculo de porcentagens de valores dados, usando diferentes métodos, como a regra de três, frações equivalentes e a calculadora.

CAPÍTULO 3

- Desenvolver a habilidade dos alunos de calcular o valor final de um produto ou serviço após a aplicação de acréscimos ou descontos percentuais.
- Capacitar os alunos a resolver problemas que envolvem a aplicação de uma porcentagem sobre outra, como em situações de descontos sucessivos ou aumentos acumulativos.
- Desenvolver a habilidade dos alunos de aplicar o conhecimento de porcentagem na resolução de problemas contextualizados, como orçamentos familiares, empréstimos e aplicações financeiras.
- Mostrar aos alunos como o conhecimento de porcentagem é essencial em diversas profissões e nas decisões financeiras pessoais.
- Utilizar atividades avaliativas e de autoavaliação para garantir que os alunos compreendam e sejam capazes de aplicar os conceitos de porcentagem de forma precisa e eficiente em diferentes situações.

3.2.8 PÚBLICO-ALVO

Estudantes do Ensino Médio da Rede Estadual de Pernambuco, na faixa etária de 14 a 19 anos.

3.2.9 PERFIL DAS TURMAS

Turmas compostas de 35 a 40 alunos, em sua maioria, egressos do Ensino Fundamental da Rede Pública do Estado de Pernambuco.

3.2.10 RECURSOS

Quadro-branco, marcadores para quadro-branco, computador, calculadora, projetores digitais, avaliações do SAEPE de anos anteriores, livro didático e fichas de exercícios impressas.

3.2.11 AVALIAÇÃO

A avaliação e o seu acompanhamento serão executados durante o desdobramento das atividades propostas considerando dos estudantes: os conhecimentos prévios, o desenvolvimento nas atividades, o empenho, o desempenho e a evolução, além de garantir uma análise contínua e final do progresso dos alunos.

CAPÍTULO 3

3.3 ATIVIDADE I

- **Conteúdos abordados:** O conceito de porcentagem e taxa percentual.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: TAXA PERCENTUAL

1. (M110249H6) Carolina participou de um processo seletivo para a obtenção de bolsas de estudo em um colégio particular de sua cidade. Para isso, ela fez uma prova que era composta de 90 questões e, ao verificar o gabarito, constatou que acertou 72 questões. Qual foi o percentual de questões dessa prova que Carolina acertou?
(a) 20% (b) 65% (c) 72% (d) 80% (e) 82%
2. (M120346G5) Em um plantão de pediatria, 30 crianças foram atendidas em um final de semana. Dessas crianças, 6 foram diagnosticadas com a mesma virose. Que percentual de crianças atendidas foram diagnosticadas com essa virose?
(a) 5% (b) 6% (c) 20% (d) 30% (e) 80%
3. (M120331ES) Um concurso teve a participação de 800 candidatos. Desses candidatos, 320 eram mulheres. A porcentagem de mulheres que participou desse concurso foi
(a) 80% (b) 48% (c) 40% (d) 32% (e) 20%

3.3.1 APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Figura 3.1: O que é Porcentagem?



Nesta situação didática, apresenta-se aos estudantes uma problematização matemática, especificamente sobre porcentagem, por meio de uma discussão que abrange a importância da compreensão sobre "o que é" e "o que significa" porcentagem, além de algumas de suas aplicabilidades no cotidiano. A apresentação

CAPÍTULO 3

ocorrerá por intermédio do vídeo "O que é Porcentagem?", do canal "Universo Narrado", disponível em https://www.youtube.com/watch?v=hqfuLr_W-Ak.

3.3.2 EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nesta etapa, os estudantes serão agrupados em equipes de 4 (quatro) a 5 (cinco) integrantes com a finalidade de analisar e discutir os enunciados das três questões da atividade diagnóstica proposta, em busca de métodos e processos de resolução. Neste momento, o professor conduzirá as discussões emergidas de dentro de cada equipe como mediador, porém, sem interferir nas conclusões dos alunos. Ao término do período de discussões, cada equipe elegerá um de seus integrantes para expor, à turma, o(s) caminho(s) de resolução encontrado(s).

3.3.3 EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Esta fase consiste na ação do professor em formalizar a definição de porcentagem e de taxa percentual, além de articular os procedimentos resolutivos encontrados pelos estudantes na etapa anterior, evidenciando os pontos em comum e destacando as divergências e os erros – quando existirem – com relação aos conteúdos abordados. É indicado que, também, nesta fase o professor traga à tona exemplificações de situações contextualizadas com o cotidiano e o meio social dos estudantes, nas quais o uso de taxas percentuais sejam um conhecimento intrínseco, visando que os estudantes obtenham, significativamente, compreensão da definição e da aplicabilidade dos assuntos.

3.3.4 GENERALIZAÇÃO

Aqui, o professor detalhará, com o uso de linguagem matemática, o conceito de porcentagem e o significado de taxa percentual por meio de comparações da "parte" com o "todo", associando ao "todo" o que se denota por "100%". Sugere-se, ainda, que o professor evidencie a divisão do "todo" em cem partes iguais (equivalentes) com o objetivo de descrever cada uma como unidade percentual, ou seja, de justificar a relação entre a "parte" e o "todo" como equivalente a uma razão de denominador "100".

3.3.5 MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Após a resolução das atividades iniciais pelos estudantes, a abordagem conceitual e a consolidação do(s) algoritmo(s) promovida pelo professor, nesta etapa, faz-se necessário que os estudantes, em formação com as mesmas equipes, respondam, registrando em seus respectivos cadernos, às questões indicadas a seguir.

1. Em uma oficina mecânica, 50 carros foram consertados em uma semana. Destes, 15 precisaram de troca de motor. Que percentual dos carros consertados precisaram de troca de motor?
2. Durante um festival de música, 400 ingressos foram vendidos. Desses, 100 ingressos foram adquiridos por menores de idade. Qual foi o percentual de ingressos vendidos para menores de idade? E para maiores de idade?
3. Em uma escola, 200 alunos participaram de um projeto de leitura. Desses, 60 leram mais de cinco livros durante o projeto. Qual é o percentual de alunos que leram mais de cinco livros?

CAPÍTULO 3

4. Um campeonato de esportes teve 160 equipes inscritas. Destas, 48 eram equipes femininas. A porcentagem de equipes femininas no campeonato foi

- (a) 20% (b) 30% (c) 40% (d) 50% (e) 60%

5. Em uma pesquisa de mercado, 2500 consumidores foram entrevistados. Desses, 875 disseram preferir marcas locais. A porcentagem de consumidores que preferem marcas locais é

- (a) 25% (b) 35% (c) 45% (d) 55% (e) 70%

3.3.6 PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

A avaliação levará em consideração os seguintes aspectos: participação e contribuição efetiva dos estudantes na realização das atividades e a evolução do desenvolvimento das resoluções dos problemas e exercícios propostos quando comparadas às da avaliação diagnóstica.

3.4 ATIVIDADE II

- **Conteúdo abordado:** Cálculo de Porcentagem.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: CÁLCULO DE PORCENTAGEM

1. (M110539E4) Pedro fez um empréstimo de R\$ 8 000,00 em um banco. Esse mês, ele conseguiu pagar 40% desse empréstimo. Qual foi o valor do empréstimo pago por ele nesse mês?

- (a) R\$ 40,00 (b) R\$ 80,00 (c) R\$ 3200,00 (d) R\$ 4800,00 (e) R\$ 7960,00

2. (M110097H6) Uma empresa aérea realizou uma pesquisa entre seus clientes para saber quais eram os seus destinos preferidos. Dos 300 clientes entrevistados, 40% optaram pela Irlanda. Quantos clientes entrevistados preferem a Irlanda como destino?

- (a) 12 (b) 40 (c) 120 (d) 180 (e) 260

3.4.1 APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta situação, os estudantes devem receber os dois problemas da atividade diagnóstica que envolvem cálculo de porcentagem, tais que as taxas percentuais incidem sobre os valores dados. Trata-se de problemas elementares de porcentagem. Diante dessas questões, os alunos serão instigados a obter o valor referente à taxa percentual relacionada a certo valor ou quantidade. Todavia, antes do contato inicial com tais problemas, deve ser exibida a tirinha "Que barra!", disponível em <https://www.humorcomciencia.com/tagtirinha/porcentagem/>, com o intuito de gerar uma breve discussão sobre a importância da porcentagem em circunstâncias cotidianas.

CAPÍTULO 3

Figura 3.2: Tirinha Porcentagem: Que Barra!



3.4.2 EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nesta fase da atividade, os alunos devem ler, interpretar e responder os dois problemas da atividade diagnóstica. Aos estudantes, deve-se disponibilizar um período adequado para que, individualmente, realizem a atividade e registrem as resoluções justificadas e explicadas por escrito. Após essa etapa, cada estudante deverá trocar sua folha de solução com a de outro colega a fim de compararem as respostas e justificativas. Em seguida, cada aluno deve registrar, na folha recebida, um parecer (um comentário) sobre as resoluções feitas pelo colega. Ao final, as folhas devem ser destruídas e os pareceres analisados por cada aluno.

3.4.3 EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Inicialmente, nesta etapa, o professor deve dar oportunidade aos estudantes que desejarem relatar sobre as suas resoluções e os comentários recebidos pelo colega. Adiante, o professor explicará o que significa calcular a porcentagem sobre um número e elencará as diversas maneiras de se efetuar esse cálculo, por exemplo: representando a porcentagem como fração ou como número decimal e multiplicando a mesma pelo valor em questão, usando proporções etc.

3.4.4 GENERALIZAÇÃO

Neste instante, caberá ao professor formalizar o significado do cálculo percentual e executar, por meio de exemplificações, diversos modos de efetuar o cálculo de porcentagem sobre os mais distintos valores dentre as mais variadas grandezas, fazendo uma ponte com as propostas corretas realizadas pelos alunos. Sugere-se, no entanto, explorar tanto os métodos de cálculos mentais rápidos, quanto os métodos que exigem cálculos escritos.

3.4.5 MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Após toda a exposição do professor, chega a fase de verificação da compreensão dos estudantes por intermédio da resolução de novos exercícios. Dessa vez, a realização das tarefas se dará em dupla,

CAPÍTULO 3

como estímulo à pluralidade de ideias que deverão ser discutidas e ajustadas entre os integrantes. Seguem as questões propostas, com habilidades exigidas semelhantes às da atividade diagnóstica:

1. Ana comprou um celular por R\$ 2 500,00. Ela conseguiu pagar 33% do valor à vista, e o restante, pagou no cartão de crédito. Qual foi o valor pago por Ana, à vista?
2. Numa pesquisa de intenção de votos, no período eleitoral, 14% dos entrevistados optaram pelo candidato A, 28% pelo candidato B, 56% pelo candidato C e o restante, se diz indeciso. Considerando que a entrevista foi realizada com 1 200 pessoas, quantas delas, no dia da pesquisa, se mostraram indecisas?
(a) 1 176 (b) 672 (c) 336 (d) 168 (e) 24
3. Dos 45 estudantes que compõem uma turma de terceiro ano, apenas 40% estiveram presentes na escola no primeiro dia de aula. Responda:
(a) Quantos estudantes foram à escola no primeiro dia letivo?
(b) Qual é o percentual dos estudantes ausentes no primeiro dia de aula? Esse percentual configura quantos estudantes?
4. (ENEM) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t (toneladas). O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação. No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente:
(a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.
(b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.
(c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.
(d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.
(e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

3.4.6 PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Sugere-se que o professor verifique a eficiência do desempenho dos estudantes em cada etapa de participação bem como a evolução dos conhecimentos construídos ao longo da realização das atividades propostas.

3.5 ATIVIDADE III

- **Conteúdos abordados:** Porcentagem de porcentagem e cálculo do "todo" (100%).
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

CAPÍTULO 3

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: PORCENTAGEM DE PORCENTAGEM E CÁLCULO DO "TODO" (100%)

- (M120658E4) Em uma exposição de artes, 88% dos 200 quadros foram vendidos. Um colecionador comprou 25% desses quadros que foram vendidos. Quantos quadros esse colecionador comprou nessa exposição?
(a) 22 (b) 25 (c) 44 (d) 50 (e) 176
- (M120583E4) Juliano é responsável pela equipe de manutenção de uma ferrovia. No primeiro dia de uma inspeção, sua equipe revisou 40% da extensão total dessa ferrovia e, no segundo dia, foram revisados os 120 quilômetros restantes. A extensão total dessa ferrovia, em quilômetros, é
(a) 300 (b) 200 (c) 192 (d) 168 (e) 160

3.5.1 APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-DIDÁTICA

Como recurso disparador de uma das temáticas a ser abordada no decorrer da aula, a tirinha abaixo deve ser exibida no projetor, ser enviada para o *smartphone* de cada estudante ou ser impressa e entregue a cada aluno, de modo que todos tenham acesso à imagem, disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/30390346>.

Figura 3.3: Tirinha Porcentagem: Níquel Náusea



Ao ser exibida, o professor deve interrogar à turma: "Qual é sua compreensão sobre a tirinha?" e "Quanto ao conhecimento matemático, o que ela aborda?". Um dos objetivos dessas perguntas é perceber se os estudantes identificarão que, no diálogo, há subtendida a ideia de porcentagem de porcentagem. Em seguida, o professor deve iniciar outra abordagem, narrando a seguinte história: "Uma estudante

CAPÍTULO 3

respondeu corretamente a apenas uma questão da prova. Sabe-se que o seu percentual de acerto, nessa prova, corresponde a 20%. Quantas questões havia na avaliação?”. Após a narrativa, o professor deverá identificar todas as mais diversas ideias e estratégias traçadas pelos seus alunos para responder a interrogativa corretamente, porém, até o momento, o professor não deverá intervir em nenhuma resposta ou sequer expressar qualquer sinais de que as respostas estão ou não corretas, o seu papel será anotar no quadro-branco todas as estratégias utilizadas pelos integrantes da turma.

Ao fim das anotações, o professor deverá separar os estudantes em equipes de 4 pessoas e entregar os dois problemas iniciais (da atividade diagnóstica) a cada um dos grupos formados.

3.5.2 EM BUSCA DE SOLUÇÕES

De posse das duas problematizações iniciais, primeiramente, o professor deve pedir aos estudantes que associem, com base nas semelhanças, os problemas diagnósticos aos que ele expôs na introdução da aula. Após tal feito, o professor solicitará a cada equipe que responda (ao seu modo) às duas questões da diagnose e, ao concluí-las, faça a entrega das respostas numa folha à parte com as devidas identificações dos integrantes.

Antes de trazer as suas explicações e formalizações dos conteúdos à tona, o professor deve sortear duas equipes para, à frente da sala, relatarem as suas compreensões e resoluções das questões, a fim de socializá-las com o grande grupo. Até o momento, o professor continuará sem intervir, pois a intenção é verificar os procedimentos resolutivos utilizados dos grupos.

3.5.3 EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Inicialmente, propõem-se que o professor relate o sentido matemático de se calcular porcentagem de porcentagem, por exemplo: evidenciar a ideia de que 10% de 10% é o mesmo que

$$\frac{10}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$$

ou seja, exprimir que equivale a calcular a décima parte da décima parte de determinado todo. Após isso, é sugerido que o professor retorne ao problema inicial: “Em uma exposição de artes, 88% dos 200 quadros foram vendidos. Um colecionador comprou 25% desses quadros que foram vendidos. Quantos quadros esse colecionador comprou nessa exposição?”, e retrate, pelo menos, os seguintes modos de resolução:

- Modo 1: Primeiro, calcular os 88% dos 200 quadros totais:

$$\frac{88}{100} \cdot 200 = \frac{17600}{100} = 176$$

Em seguida, explicar que os 25% devem ser calculados sobre os 176 quadros vendidos e expor:

$$\frac{25}{100} \cdot 176 = \frac{1}{4} \cdot 176 = \frac{176}{4} = 44$$

- Modo 2: Efetuar diretamente a porcentagem da porcentagem e, depois, executar o cálculo da porcentagem final:

CAPÍTULO 3

$$\frac{88}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{2200}{10000} = \frac{22}{100}$$

que, por sua vez,

$$\frac{22}{100} \cdot 200 = \frac{4400}{100} = 44$$

□

Com relação ao segundo problema da diagnose: "Juliano é responsável pela equipe de manutenção de uma ferrovia. No primeiro dia de uma inspeção, sua equipe revisou 40% da extensão total dessa ferrovia e, no segundo dia, foram revisados os 120 quilômetros restantes. A extensão total dessa ferrovia, em quilômetros, é..." é indispensável enfatizar que a extensão total dessa ferrovia corresponde ao 100%, isto é, a soma das partes revisadas equivale ao percentual cem, e que essa interpretação decorre das porcentagens serem complementares – quando seu somatório é cem por cento –.

Orienta-se, na resolução desse problema, explorar o método denominado *regra de três*, entre grandezas diretamente proporcionais, por exemplo: proporcionar ao estudante a compreensão de que os 120 km restantes correspondem a 60% da ferrovia inspecionada, uma vez que no primeiro dia foram inspecionados 40%. Assim,

Comprimento (km)	Percentual (%)
120	60
x	40

$$x = \frac{120 \cdot 40}{60} = \frac{4800}{60} = 80 \text{ km}$$

Isto é, 80 km inspecionados no 1º dia e 120 km inspecionados no 2º dia, sendo 200 km no total.

Outra maneira de resolvê-lo, é obtendo o "100%", isto é, se 60% representa 120 km de ferrovia inspecionada, então 100% representa o total de ferrovia inspecionada, de modo que:

Comprimento (km)	Percentual (%)
120	60
y	100

$$y = \frac{120 \cdot 100}{60} = \frac{12000}{60} = 200 \text{ km}$$

O que acarreta em 200 km ser a extensão total da ferrovia.

Por outro lado, se 60% da ferrovia corresponde a 120 km, então cada 1% equivale a 2 km, pois

$$\frac{120 \text{ km}}{60\%} = \frac{120 \text{ km} \div 60}{60\% \div 60} = \frac{2 \text{ km}}{1\%}$$

Por fim, se 1% corresponde a 2 km, então 40% equivale a $40 \cdot 2 \text{ km} = 80 \text{ km}$. Daí, os cem por cento correspondem a $120 \text{ km} + 80 \text{ km} = 200 \text{ km}$.

□

CAPÍTULO 3

3.5.4 GENERALIZAÇÃO

Nesta fase, o professor deve induzir os estudantes a compreenderem que $x\%$ de $y\%$ é igual a $z\%$, sendo $z = \frac{x \cdot y}{100}$, ou seja, que a porcentagem de porcentagem gera outra porcentagem, e deve levar os alunos a identificarem o valor do problema que representa o "todo", isto é, o "100%", principalmente em situações nas quais valor é desconhecido.

3.5.5 MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Propor aos estudantes, como exercícios de fixação do conhecimento e das habilidades, as seguintes questões:

1. (M100188H6) Ao comprar um carro, Marília pagou como entrada o valor de R\$ 10 000,00, que corresponde a 20% do valor total desse carro. Qual o valor total do carro que Marília comprou?
(a) R\$ 12000,00 (b) R\$ 18000,00 (c) R\$ 20000,00 (d) R\$ 50000,00 (e) R\$ 80000,00
2. Sofia comprou uma moto e pagou R\$ 4 500,00 como entrada, o que equivale a 15% do valor total da moto. Qual é o valor total da moto que Sofia comprou?
3. Dos 850 estudantes que há numa escola, 60% são do turno da manhã. Dos que estudam pela manhã, 40% são do 1º ano do Ensino Médio. Dos que são do 1º ano da manhã, 25% são do 1º ano A. Quantos estudantes são do 1º ano A?

3.5.6 PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Verificar as resoluções das questões apresentadas no tópico anterior e aplicar de uma lista de exercícios composta de 10 questões (de autoria do professor) que dialoguem com os conteúdos abordados na aula para acompanhamento da evolução na compreensão do assunto por parte dos estudantes.

3.6 ATIVIDADE IV

- **Conteúdo abordado:** Variação percentual.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

CAPÍTULO 3

AValiação DIAGNÓSTICA: VARIAÇÃO PERCENTUAL

- (M100341E4) Priscila comprou um carro novo por R\$ 28 000,00. Ao final de 1 ano após a compra, esse carro sofreu uma desvalorização de 17% sobre seu valor de compra. Qual é o valor atual do carro após essa desvalorização?
(a) R\$ 476,00 (c) R\$ 4 760,00 (e) R\$ 32 760,00
(b) R\$ 1 700,00 (d) R\$ 23 240,00
- (M110095H6) Daniela foi contemplada em um programa de inclusão educacional, por meio do qual obteve um desconto de 60% nas mensalidades de um curso. A mensalidade integral desse curso é R\$ 936,00. Dessa forma, qual será o valor da mensalidade paga por Daniela?
(a) R\$ 374,00 (b) R\$ 561,60 (c) R\$ 624,00 (d) R\$ 876,00 (e) R\$ 935,40
- (M100237H6) Na cantina de uma escola, o preço do sanduíche natural passou de R\$ 3,00 para R\$ 3,45. A porcentagem que descreve o aumento no preço desse sanduíche é
(a) 0,15% (b) 0,45% (c) 13,00% (d) 15,00% (e) 45,00%

3.6.1 APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-DIDÁTICA

Nesta etapa da atividade, primeiramente, os estudantes assistirão ao vídeo "Como calcular porcentagem", disponível na plataforma do *YouTube*, por meio do *link* <https://www.youtube.com/watch?v=b0AQkMYvWU8&list=LL&index=1>, com o objetivo de revisar os tópicos de porcentagem abordados nas aulas anteriores dessa sequência didática e de, também, introduzir a ideia de variação percentual. Em seguida, a imagem com o anúncio promocional "Leve 4 e Pague 3" deve ser exposta à turma, ambas como atividades disparadoras.

Figura 3.4: Promoção "Leve 3 e Pague 4".



Após a exposição, o professor deverá lançar para os estudantes as seguintes perguntas: (1) *O que a mensagem contida na imagem significa para vocês?* (2) *Vocês percebem alguma relação entre a mensagem e os conteúdos que estamos estudando? Se sim, explique qual é essa relação.* Depois da interação dos alunos, sugere-se que o professor faça comentários que girem em torno da relação existente entre a frase do anúncio e o contexto do desconto percentual, uma vez que pagar por apenas três produtos enquanto se leva quatro deles, é uma forma similar de imprimir um desconto de 25% sobre o valor da

CAPÍTULO 3

compra.

3.6.2 EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nesta fase, em folha impressa, o professor deve entregar as três questões da atividade diagnóstica sobre variação percentual e solicitar aos estudantes que, a partir das ideias abordadas no vídeo e nos comentários da imagem promocional, as respondam da maneira mais adequada mediante ao conhecimento e entendimento deles. Após a aplicação das questões, o professor pedirá aos alunos que se reúnam em equipes de 4 (quatro) a 6 (seis) pessoas com a finalidade de socializarem as suas respectivas ideias e comparem, entre si, as estratégias e os raciocínios aplicados na resolução de cada questão e registrem os pontos em comum utilizados por eles. Além disso, é indispensável que o professor, também, solicite às equipes que decidam qual(is) dentre os modos de resolução aplicados por eles é(são) considerado(s) o(s) mais e o(s) menos viável(éis).

Por fim, cada equipe deverá eleger um porta-voz para socializar as respostas alcançadas em cada questão, tão quanto os métodos de resolução usados que julgaram ser menos e mais viável.

3.6.3 EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Neste estágio, o professor apresentará as soluções dos problemas assumindo alguns métodos de resolução. Atribui-se ser interessante que o professor, para cada questão, escolha um dos métodos apresentados pelas equipes e, logo após, apresente um dos seguintes métodos alternativos:

- Para a questão 1:

(Sugestão I): Dizer que após 1 ano o valor do carro sofreu desvalorização de 17% equivale a afirmar que R\$ 28 000,00 reduziu 17%. Sob essa condição, calcular o valor atual do automóvel induz a obter 83% (100% – 17%) do valor do carro no ano anterior, ou seja

$$\frac{83}{100} \cdot 28000 = 83 \cdot 280 = 23240$$

(Sugestão II): Tendo R\$ 28 000,00 correspondendo a 100% do valor do carro, é possível obter o valor depreciado em 17% por meio de uma regra de três simples, uma vez que a relação entre o preço e o percentual é de proporcionalidade direta. Daí, temos:

Valor (R\$)	Percentual (%)
28 000	100
x	83

$$x = \frac{28000 \cdot 83}{100} = 280 \cdot 83 = 23240$$

(Sugestão III): Perceber que a desvalorização de 17% implica em 100% sofrer queda de 17%, o que permite reescrever 100% – 17% como $1 - 0,17 = 0,83$. Dessa forma, $0,83 \cdot 28000 = 23240$. Portanto, após a desvalorização, o carro passou a valer R\$ 23 240,00.

□

CAPÍTULO 3

- Para a questão 2: Repetir as sugestões indicadas na questão 1.

- Para a questão 3:

(Sugestão): Nesta questão, fica evidenciada a variação do preço de um sanduíche de R\$ 3,00 para R\$ 3,45, ou seja, uma variação de R\$ 0,45. Em síntese, o valor inicial (R\$ 3,00), que sofre o aumento, representa o 100% da situação e o objetivo da questão é calcular quantos por cento equivale esse aumento de R\$ 0,45 em relação a R\$ 3,00. Temos:

	Valor (R\$)	Percentual (%)
Inicial	3,00	100
Aumento	0,45	x

$$x = \frac{45}{3} = 15\%$$

Alternativamente, pode-se montar a proporção levando-se em consideração o valor inicial do sanduíche e o valor final do mesmo, a fim de observar e comparar os percentuais de cada um, fazendo:

	Valor (R\$)	Percentual (%)
Inicial	3,00	100
Final	3,45	y

$$y = \frac{345}{3} = 115\%$$

Por fim, perceba que de 100% para 115% ocorreu uma variação de aumento igual a 15%.

□

3.6.4 PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Verificar quais equipes apresentaram soluções corretas e métodos coerentes durante a tentativa de resolução dos problemas, além de identificar e destacar para a turma os equívocos presentes em alguns dos métodos apresentados.

3.7 ATIVIDADE V

- **Conteúdo abordado:** Porcentagem.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

CAPÍTULO 3

AVALIAÇÃO: AVALIAÇÃO ESCRITA E INDIVIDUAL SOBRE PORCENTAGEM

Nesta situação, deverá ser aplicada, individualmente, uma avaliação comparativa e somativa composta de 10 (dez) problemas semelhantes aos abordados nas quatro atividades das situações anteriores com o intuito de verificar o índice de compreensão e acertos das questões no modelo dos itens do SAEPE, isto é, das questões das atividades diagnósticas aplicadas durante a sequência didática.

3.7.1 PROPOSTA DE AVALIAÇÃO

Seguem as dez questões propostas para a avaliação final:

1. Em uma pesquisa realizada com 500 pessoas, 325 afirmaram gostar de ouvir música clássica. Qual foi o percentual de pessoas entrevistadas que gosta desse tipo de música?
2. Um atleta participou de uma maratona com um percurso total de 42 *km*. Ao final da prova, ele verificou que havia percorrido 37,8 *km*. Qual foi o percentual do percurso total que o atleta completou?
3. Em uma escola com 800 alunos, 65% praticam algum tipo de esporte. Quantos alunos dessa escola praticam esportes?
4. Uma loja de roupas recebeu um lote com 420 peças. Após uma semana, 25% das peças desse lote já haviam sido vendidas. Quantas peças desse lote ainda não foram vendidas nessa semana?
5. Uma escola tem 500 alunos. Desses, 60% participam de atividades extracurriculares. Se um clube de robótica atrai 35% dos alunos que participam de atividades extracurriculares, quantos alunos fazem parte desse clube?
6. Em uma fruteira, 75% das 400 frutas são maçãs. Um cliente comprou 20% das maçãs disponíveis. Quantas dessas maçãs ainda estão disponíveis na fruteira?
7. Uma loja de eletrodomésticos adquiriu uma geladeira por R\$ 2.200,00. Devido a uma promoção, a loja concedeu um desconto de 15% sobre esse valor para seus clientes. Qual é o preço de venda da geladeira após o desconto?
8. O preço da gasolina subiu de R\$ 5,50 para R\$ 6,05 por litro. Qual foi o percentual de aumento no preço da gasolina?
9. Um funcionário recebeu um aumento de salário de 12%. Se seu salário anterior era de R\$ 2.500,00, qual é o seu novo salário?
10. Uma loja de roupas está com uma promoção: ao comprar 3 camisetas, o cliente ganha 20% de desconto no valor total da compra. Se o cliente pagou R\$ 96,00 pelas 3 camisetas com desconto, qual era o valor total da compra sem o desconto?

CAPÍTULO 3

3.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que a proposta didática promova um ambiente de ensino mais dinâmico e interativo, onde os alunos possam engajar-se ativamente na resolução de problemas de porcentagem e na construção de seu próprio conhecimento. Em suma, este produto didático se posiciona como um recurso tanto para subsídio dos professores quanto para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos, o que pode refletir em resultados positivos nas avaliações de larga escala aplicadas no contexto escolar.

CAPÍTULO 3

3.8 REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s. n.], 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

CAED. **Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, 2023. Disponível em: <https://avaliacaoemmonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/colecões>.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental**. Recife: [s. n.], 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-fundamental-anos-finais/>.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco: Ensino Médio**. Recife: [s. n.], 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-medio/>.

Aritmética nas olimpíadas de matemática: uma proposta didática para o ensino médio

Maria Aparecida da Silva Barbosa¹
Clessius Silva²

Esta sequência didática propõe o ensino de Aritmética voltado à preparação de estudantes do ensino médio para olimpíadas de matemática, com foco no desenvolvimento do raciocínio lógico, da escrita matemática e da confiança na resolução de problemas. Organizada em encontros temáticos, articula atividades investigativas, jogos matemáticos e questões olímpicas, exploradas de forma progressiva, partindo dos conhecimentos prévios dos estudantes e avançando para conteúdos inéditos, alguns dos quais não integram o currículo escolar regular. As atividades valorizam diferentes estratégias de resolução, a socialização das ideias e a argumentação matemática. Além disso, o material busca apoiar professores da educação básica, oferecendo uma sequência flexível, adaptável e aplicável a diferentes contextos escolares.

Neste capítulo, apresenta-se a sequência didática, com foco no estudo da Aritmética a partir de problemas provenientes das Olimpíadas de Matemática. A estrutura foi organizada de modo a possibilitar um acompanhamento detalhado do processo de ensino e aprendizagem, oferecendo ao leitor uma visão clara das etapas que compõem sua execução.

O conceito de sequência didática corresponde a um conjunto de atividades articuladas e encadeadas em torno de determinados objetivos educacionais, concebidas para dar sentido e coerência ao trabalho pedagógico (Zabala, 1998). De maneira complementar, destaca-se que a sequência didática constitui uma modalidade organizativa que, ao apresentar desafios progressivos, contribui para que os estudantes desenvolvam novas competências e alcancem níveis mais elevados de aprendizagem (PANNUTI, 2004).

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, maria.asbarbosa@ufrpe.br

²Universidade Federal Rural de Pernambuco, clessius.silva@ufrpe.br

CAPÍTULO 4

Estruturar este trabalho em forma de sequência didática decorre da necessidade de organizar os encontros de maneira planejada. Com isso, pretende-se criar condições para que os alunos se envolvam ativamente com os desafios, ampliem sua compreensão matemática e desenvolvam confiança diante de situações-problema.

A seguir, apresentam-se informações sobre a sequência didática e, posteriormente, o detalhamento de cada encontro, incluindo a descrição das atividades e das estratégias de exploração em sala de aula.

4.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

A sequência didática proposta tem como objetivo aproximar os estudantes do estilo de provas das olimpíadas de matemática, favorecendo a familiarização com os tipos de questões e estratégias de resolução. A ideia é introduzir e explorar temas recorrentes em avaliações olímpicas, de modo a despertar o interesse dos alunos e fortalecer sua confiança para participar desses eventos.

Não se trata de desenvolver de forma exaustiva todos os conteúdos, mas de abrir caminhos para que os estudantes conheçam e compreendam tópicos que muitas vezes não aparecem de forma contínua no currículo escolar. Essa proposta oferece a oportunidade de perceber que a matemática olímpica também pode ser acessível aos alunos do ensino médio da rede pública, ampliando suas perspectivas e experiências de aprendizagem.

Para alcançar esse propósito, recomenda-se que os encontros sejam conduzidos em um ambiente colaborativo e motivador, com atividades que envolvam desafios e problemas instigantes. A dinâmica deve valorizar a participação ativa e frequente dos estudantes, estimulando o trabalho em grupo, a troca de estratégias e o prazer em resolver problemas. Dessa forma, a proposta deixa de ser “mais uma aula de matemática” e se torna uma experiência, capaz de envolver os estudantes em um processo de descoberta, cooperação e preparação para as olimpíadas de matemática.

4.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Divisibilidade
- Sistemas de numeração
- Máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc)
- Equações diofantinas
- Números primos
- Congruências
- Teorema chinês dos restos

TEMA

Aritmética nas olimpíadas de matemática: uma proposta para o ensino médio.

CAPÍTULO 4

JUSTIFICATIVA

A Aritmética envolve conceitos e operações matemáticas estudados, desde o Ensino Fundamental, que podem ser utilizados na resolução de problemas encontrados em olimpíadas de matemática, como a OBMEP. Muitos desses conteúdos, como divisibilidade, mdc, mmc e números primos, servem como base para a compreensão de tópicos mais avançados e para a construção de estratégias de resolução.

Esta sequência didática cria um espaço para que os estudantes explorem esses conteúdos de forma investigativa e cooperativa, revisitando conceitos prévios e avançando para temas como equações diofantinas, congruências e teorema chinês dos restos, despertando a curiosidade, estimulando o raciocínio lógico e incentivando a busca de soluções de forma autônoma.

Ao oferecer essa oportunidade na escola pública, busca-se reconhecer talentos, proporcionar experiências de aprendizado significativo e ampliar as perspectivas acadêmicas dos estudantes, valorizando seu potencial e promovendo equidade no acesso a conhecimentos específicos de preparação para olimpíadas de matemática.

COMPETÊNCIAS

- Compreender conceitos fundamentais de aritmética.
- Desenvolver pensamento lógico-matemático e estratégias de resolução de problemas.
- Aplicar conhecimentos matemáticos em contextos desafiadores (olímpicos).

HABILIDADES

A sequência didática retoma e consolida habilidades aritméticas do ensino fundamental (6º e 7º anos) que servem como base para a resolução de problemas mais complexos e para o estudo de conceitos avançados presentes em olimpíadas de matemática. Entre as habilidades trabalhadas, destacam-se:

- BNCC: EF06MA02/ PE: EF06MA02PE - reconhecer o sistema de numeração decimal, destacando base, valor posicional e função do zero, e utilizar a composição e decomposição de números naturais e racionais em representação decimal.
- BNCC: EF06MA05/ PE: EF06MA05PE - identificar e classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números (“é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”) e investigar critérios de divisibilidade.
- BNCC: EF06MA06, EF07MA01/ PE: EF06MA06PE, EF07MA01PE - resolver e elaborar problemas envolvendo múltiplos e divisores, incluindo máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, utilizando estratégias diversas, sem aplicação de algoritmos.

Essas habilidades são o ponto de partida para o desenvolvimento da proposta didática, permitindo que os estudantes avancem para temas que não estão presentes no currículo escolar como: equações diofantinas, congruências e o teorema chinês dos restos (BRASIL, 2017; Educação e Esportes de Pernambuco, 2025). A sequência é organizada de forma que cada tema seja construído a partir dos conhecimentos prévios, proporcionando coerência e facilitando a compreensão gradual dos conteúdos.

CAPÍTULO 4

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Promover, no ambiente da escola pública, um espaço formativo que desperte nos estudantes o interesse pelas olimpíadas de matemática por meio de um curso de aritmética, fortalecendo sua confiança, desenvolvendo habilidades matemáticas e ampliando suas perspectivas acadêmicas. Além disso, oferecer um material de apoio aos professores, incentivando novas iniciativas semelhantes em diferentes contextos escolares.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar, de forma acessível e significativa, os principais conteúdos de aritmética recorrentes nas olimpíadas de matemática.
- Resolver e analisar questões olímpicas da 1ª e 2ª fases.
- Apresentar soluções alternativas para um mesmo problema, quando possível, incentivando diferentes formas de raciocínio.
- Estimular a leitura, a escrita e a argumentação matemática, preparando os estudantes para provas discursivas.
- Despertar o interesse e a confiança dos estudantes para a participação em olimpíadas de matemática.
- Promover o desenvolvimento matemático por meio de atividades desafiadoras.
- Estimular o raciocínio lógico-dedutivo na resolução de problemas.
- Produzir um material didático acessível e adaptável que possa ser utilizado por outros professores da educação básica.

PÚBLICO-ALVO

Estudantes do ensino médio da rede estadual de Pernambuco, com faixa etária entre 14 e 19 anos, interessados em participar de olimpíadas de matemática.

PERFIL DAS TURMAS

Grupos de aproximadamente 15 a 25 estudantes, com diferentes níveis de desempenho em matemática, interessados em aprimorar suas habilidades na resolução de problemas olímpicos.

RECURSOS

- Jogos matemáticos;
- Quadro, piloto, papel e lápis.
- Notebook e datashow.
- Material impresso (listas de exercícios, definições e resumos).

CAPÍTULO 4

- Acesso digital a materiais complementares por meio do grupo no WhatsApp (portal da OBMEP, vídeos, etc).

AVALIAÇÃO

A avaliação será contínua e formativa, considerando:

- **Participação e socialização:** observação das apresentações de soluções, individual ou em grupo, promovendo troca de ideias e estratégias entre os estudantes.
- **Escrita matemática:** análise da clareza, organização lógica e estrutura das resoluções, com possibilidade de devolutivas construtivas do professor.
- **Avaliação dos encontros:** reflexão sobre a produtividade do encontro, nível de dificuldade das atividades e sugestões de melhoria para os próximos encontros.

4.3 ENCONTRO 01 – DIVISIBILIDADE

Tema: divisão nos inteiros.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Divisão inteira e algoritmo da divisão;
- Conceitos de dividendo, divisor, quociente e resto;
- Propriedades de divisibilidade: múltiplos e divisores.

Objetivos

- Compreender os conceitos de divisor, dividendo, quociente e resto.
- Aplicar o algoritmo da divisão inteira;
- Identificar múltiplos, divisores e padrões em restos de divisões.

ACOLHIDA E DIAGNOSE

O primeiro encontro, inicia-se com a apresentação dos objetivos dos encontros, seguida da aplicação de um questionário diagnóstico.

Objetivos:

- Levantar o perfil dos estudantes: histórico em olimpíadas, familiaridade com provas discursivas e expectativas.
- Identificar como os estudantes organizam seu raciocínio, registram suas ideias por escrito e escolhem estratégias de resolução.

CAPÍTULO 4

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

1. Você já participou de alguma olimpíada de matemática? Qual foi sua experiência?
2. Quais tipos de problemas matemáticos você mais gosta ou sente dificuldade?
3. Como você organiza seu raciocínio ao resolver problemas matemáticos?
4. Descreva como costuma registrar suas soluções e justificativas ao resolver um problema matemático.
5. O que espera aprender neste curso preparatório para provas olímpicas?
6. **Questão Desafiadora (OBMEP - 1ª FASE):** Nove amigos comeram 5 pizzas, algumas cortadas em 6 fatias e outras cortadas em 8 fatias. Todos comeram o mesmo número de fatias e não sobrou nada. Quantas fatias cada um comeu?
 - A) 4
 - B) 5
 - C) 6
 - D) 7
 - E) 8
7. Descreva como você pensou para tentar resolver a questão acima. Quais passos você seguiu? Testou alguma possibilidade? Quais alternativas considerou?

Esta atividade diagnóstica tem como objetivo identificar o perfil de escrita matemática dos participantes e oferecer subsídios para o planejamento dos próximos encontros. Em seguida, os alunos participam de uma breve roda de conversa, compartilhando percepções, sentimentos e dificuldades observadas durante o diagnóstico. Esse momento inicial permite preparar o grupo para o trabalho efetivo com o tema proposto sobre divisibilidade.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Jogo trilha dos restos

Para introduzir de forma lúdica o conceito de divisibilidade e o algoritmo da divisão inteira, propomos a atividade *Trilha dos Restos* (MELLO; PEREIRA; RAINHA, 2021).

O jogo permite que os estudantes experimentem a operação de divisão na prática e observem como o resto varia de 0 até o divisor menos uma unidade, reforçando a compreensão da expressão $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, em que a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto.

Objetivos

- Fixar os conceitos de dividendo, divisor, quociente e resto.
- Explorar a expressão da divisão $a = bq + r$, $0 \leq r < b$
- Desenvolver raciocínio estratégico e percepção de múltiplos e divisores.

CAPÍTULO 4



Figura 4.1: Tabuleiro do jogo trilha dos restos

Materiais

- Tabuleiro.
- Peça de marcação (1 por aluno ou grupo).
- Dado ou spinner com números de 1 a 6 (divisores).

Etapas

Introdução

Apresentar o jogo e explicar os conceitos de dividendo (a), divisor (b), quociente (q) e resto (r).

Regras do Jogo:

- Número de jogadores: 4.
- Primeira rodada: cada jogador locomove seu peão na trilha, de acordo com o número lançado no dado.
- A partir da segunda rodada:
 - O jogador lança o dado e o número sorteado será o seu divisor na operação a ser realizada.
 - O dividendo é o número da casa em que o peão parou.
 - O resto é o número de casas que o jogador deve andar.
- O jogador que, na sua vez, efetuar um cálculo errado, perde a sua vez de jogar.
- Será vencedor o jogador que sair primeiro da trilha.

Jogo

O jogo trilha dos restos é uma ferramenta pedagógica eficaz para ensinar divisibilidade e a expressão algébrica da divisão. Ao jogar, os alunos aplicam a fórmula $a = bq + r$, em que:

CAPÍTULO 4

- a é o número da casa onde o peão está;
- b é o número sorteado no dado (o divisor);
- q é o quociente da divisão;
- r é o resto da divisão, que determina o número de casas a serem avançadas.

A dinâmica do jogo reforça a compreensão de que o resto r deve ser menor que o divisor b , alinhando-se às propriedades fundamentais da divisão. É importante que o professor oriente o estudante a registrar suas jogadas na folha de cálculos, disponível em .

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

A atividade possibilita discussões sobre estratégias de cálculo, verificação de resultados e generalização do algoritmo da divisão para diferentes números, promovendo a compreensão conceitual e a aplicação prática da divisibilidade. Além disso, durante o jogo, os alunos podem refletir sobre questões como:

1. Quais divisores são mais vantajosos e por quê?
2. Em quais situações o avanço é máximo ou nulo?
3. Que padrões podem ser observados nos restos das divisões?
4. Existe alguma casa no tabuleiro em que o jogador não consiga mais avançar, independentemente do divisor sorteado? Qual seria e por quê?

Ao final da rodada o professor deverá relacionar os registros feitos pelos estudantes com a expressão da divisão $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, sendo possível reforçar a relação entre o jogo e conceitos de divisibilidade, bem como propor uma reflexão coletiva sobre as estratégias utilizadas, os padrões observados nos restos e as possíveis aplicações desses conhecimentos em problemas matemáticos mais complexos.

Desse modo, tem-se que o jogo *Trilha dos Restos* permite que os alunos consolidem a compreensão do algoritmo da divisão e a divisibilidade de forma mais lúdica.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Na sequência do jogo e da formalização das observações, o professor apresenta os conceitos de divisibilidade entre dois números inteiros, suas propriedades e, nos casos em que a divisão não é exata, o algoritmo da divisão euclidiana, enfatizando a existência do resto e sua aplicação em problemas matemáticos.

Durante essa etapa, é importante que o professor conecte os registros feitos pelos estudantes no jogo com a expressão algébrica da divisão $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, reforçando a compreensão conceitual do algoritmo. Além disso, essa exposição permite preparar o grupo para a resolução de situações-problema, mostrando de forma estruturada como aplicar o algoritmo em diferentes contextos.

CAPÍTULO 4

GENERALIZAÇÃO

Após a explanação teórica, propõe-se a realização de situações-problema que envolvam conceitos de divisibilidade. Durante a resolução, o professor acompanha o processo, orientando os estudantes diante das dificuldades, estimulando a socialização das ideias e promovendo melhorias na escrita matemática. Espera-se que os alunos, ao resolver os problemas, reconheçam padrões, relacionem diferentes casos e apliquem o algoritmo da divisão em contextos variados, consolidando a compreensão e a generalização do conteúdo estudado.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 01 - Divisibilidade

1. **OBMEP - 1ª FASE:** Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57, qual é o resto que ele vai encontrar?

A) 0 B) 20 C) 40 D) 54 E) 56

2. **OPEMAT - 2ª FASE:** Considere a lista periódica conforme a situação na figura abaixo: A lista é ordenada, ou seja, o primeiro termo é o número 1, o segundo o número 2, o terceiro o número 3, o quarto o número 1 e assim por diante. Julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA e (F) se a afirmação for FALSA.

1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 ...

- A) (V) (F) A sequência se repete a cada agrupamento de 7 números.
B) (V) (F) O número que ocupa a 2021ª posição é o número 3.
C) (V) (F) Observando a lista até o 2020º termo (incluindo este número), o número 3 aparece 336 vezes.
D) (V) (F) Olhando a lista até o 2019º termo (incluindo este número), o agrupamento 12 aparece 673 vezes.
E) (V) (F) Somando os primeiros 2018 números dessa sequência obtemos o valor 4371.
3. **OBMEP - 2ª FASE:** Em uma brincadeira, Euclides escolhe um número natural, coloca esse número no topo do tabuleiro ao lado e realiza o seguinte procedimento:

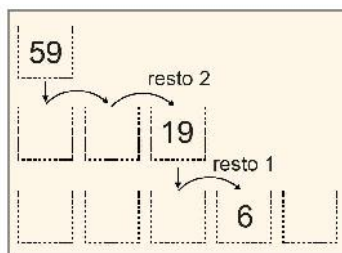
- divide o número escolhido por 3 e anota o quociente e o resto;
- se o resto for 0 coloca o quociente logo abaixo do número;
- se o resto for 1 coloca o quociente deslocando uma casa para a direita;
- se o resto for 2 coloca o quociente deslocando duas casas para a direita.

A seguir, ele repete o mesmo procedimento para o quociente obtido. Na figura vemos a brincadeira de Euclides que começa com 59 e termina com o 6 na quarta casa da base do tabuleiro.

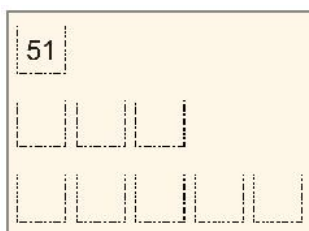
CAPÍTULO 4

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 3} \\ 2 \ 19 \\ \hline 59 = 19 \times 3 + 2 \end{array}$$

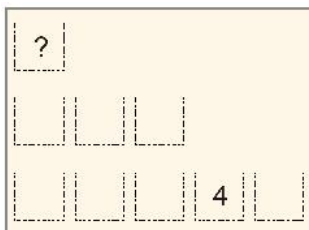
$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 3} \\ 1 \ 6 \\ \hline 19 = 6 \times 3 + 1 \end{array}$$



A) Faça a brincadeira de Euclides com o número 51.



B) Quais números Euclides pode ter escolhido se a brincadeira terminou com o 4 na quarta casa da base do tabuleiro?



C) Quantos números entre 10 e 99 começam uma brincadeira de Euclides que terminam na quarta casa da base do tabuleiro?

4. **OPEMAT - 1ª FASE:** Quantos pares (m, n) de números inteiros satisfazem a igualdade

$$3n + 5m = mn + 13.$$

- A) Quatro pares.
- B) Cinco pares.
- C) Seis pares.
- D) Sete pares.
- E) Oito pares.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

A socialização das soluções dos problemas propostos permite que os estudantes exponham suas estratégias, dificuldades e percepções em relação ao nível de desafio das atividades. Esse momento favorece a reflexão sobre diferentes caminhos de resolução e fortalece a compreensão dos conceitos

CAPÍTULO 4

trabalhados ao longo do encontro.

Além disso, possibilita ao professor acompanhar o desenvolvimento do grupo, identificar necessidades específicas e ajustar o planejamento. Assim, a avaliação não se restringe apenas ao encerramento das atividades, se trata de um processo contínuo que permite compreender não apenas o domínio dos conteúdos, mas também o desenvolvimento de competências como raciocínio lógico e comunicação matemática, alinhando-se aos objetivos gerais da sequência didática.

4.4 ENCONTRO 02 – SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Tema: sistema de numeração.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Sistemas de numeração decimal e posicional;
- Expansão de um número em uma base;
- Mudança de base.

Objetivos

- Compreender o sistema de numeração posicional e sua expansão polinomial;
- Representar números naturais em diferentes bases numéricas;
- Realizar mudanças de base.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Cartas Mágicas

Para introduzir o conceito de sistema de numeração posicional e mudança de base, propomos a seguinte atividade lúdica, baseada no programa de iniciação científica do PIC/OBMEP (Dutenhefner; Cadar, 2015). As cartelas apresentadas a seguir permitem realizar a atividade de descoberta do número secreto:

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

CAPÍTULO 4

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Imagine que o estudante escolha secretamente um número inteiro entre 1 e 63. Para descobrir o número pensado, o professor mostra cada uma das cartas e pede que o estudante informe se o número escolhido está na cartela. O processo se repete até que todas as cartelas sejam apresentadas. Ao final do processo, somando as potências de 2 correspondentes às cartelas selecionadas, o professor consegue “adivinhar” o número escolhido como em um passe de mágica.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a atividade, podemos refletir sobre como a mágica funciona e quais princípios matemáticos estão por trás dela. Alguns questionamentos que podem surgir são:

- Como a mágica funciona?
- Como as cartas são construídas?
- Como podemos modificar as cartelas para trabalhar com números maiores, como de 1 a 100?

O segredo da atividade é a decomposição única de números naturais como soma de potências de 2. Cada número aparece apenas nas cartelas correspondentes às potências de 2 que o compõem. Por exemplo, o número 22 pode ser escrito como $22 = 2 + 4 + 16$, aparecendo somente nas cartelas correspondentes às potências 2^1 , 2^2 e 2^4 .

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

A atividade das cartas mágicas permite explorar, de forma concreta, conceitos relacionados ao sistema de numeração. Os estudantes observam a representação de números em sistemas posicionais, reconhecendo que cada dígito (ou carta) corresponde a uma potência de uma base. Além disso, a atividade introduz de maneira intuitiva a mudança de base, mostrando que um mesmo número pode ser representado em diferentes sistemas, aqui exemplificada pela base binária. Dessa forma, a atividade funciona como um ponto de partida, permitindo que os estudantes compreendam intuitivamente os princípios antes de aprofundar a teoria.

Após essa exploração inicial, os conceitos de sistema posicional e mudança de base são apresentados formalmente. Para reforçar o conteúdo, sugere-se que os estudantes produzam suas próprias cartas mágicas na base binária para números de 1 a 15. No Apêndice , disponibilizamos versões em branco das cartelas, destinadas à impressão e preenchimento durante a prática em sala de aula.

CAPÍTULO 4

Essa abordagem favorece o desenvolvimento da autonomia do estudante e estimula a generalização do procedimento, seja para intervalos numéricos maiores ou para representações em diferentes bases.

GENERALIZAÇÃO

Ao final da atividade, espera-se que os estudantes percebam que o funcionamento das cartelas está fundamentado na decomposição de números em potências de uma base, e não em um truque. A partir dessa compreensão inicial, devem ser capazes de generalizar o método, reconhecendo que qualquer número pode ser representado em qualquer sistema posicional.

Essa generalização possibilita compreender o papel de cada dígito em função da potência correspondente da base escolhida. Com isso, o domínio do sistema posicional passa a servir de base para resolver problemas mais complexos, envolvendo conversão entre bases, análise de padrões numéricos e situações-problema típicas de contextos desafiadores, como as olimpíadas de matemática.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 02 - sistemas de numeração

- OBMEP - 1ª FASE:** O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é a soma de um número de dois algarismos com seu contrário?
A) 44 B) 99 C) 121 D) 165 E) 181
- OPEMAT - 1ª FASE:** Os números naturais m, n, p, q, r e s são formados por 3 algarismos não nulos. Assumindo que estes números são distintos e formados pelos mesmos algarismos, então $m + n + p + q + r + s$ é um múltiplo de:
A) 10 B) 100 C) 110 D) 200 E) 222

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

A avaliação deste encontro busca favorecer a socialização das soluções das questões propostas, bem como estimular a reflexão crítica sobre os conceitos estudados.

Em um primeiro momento, os alunos socializam suas resoluções, discutindo os diferentes caminhos adotados e levantando possíveis dificuldades encontradas. Essa troca de estratégias contribui para o fortalecimento da aprendizagem colaborativa e para a identificação de pontos que necessitam de maior aprofundamento.

A seguir, propõe-se a construção coletiva de um mapa mental ou esquema síntese, de modo que os estudantes expressem os principais temas abordados no encontro, tais como o sistema posicional, a escrita decimal, a mudança de base e exemplos práticos discutidos em sala. Esse registro visual possibilita organizar os conhecimentos adquiridos, além de favorecer a memória e a conexão entre conceitos.

A avaliação tem caráter formativo, valorizando o processo de aprendizagem e permitindo que o professor

CAPÍTULO 4

acompanhe o progresso dos alunos e planeje ações futuras.

4.5 ENCONTRO 03 – MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Tema: máximo divisor comum (mdc).

Quantidade de aula/tempo: 1 aula (50 minutos).

Conteúdos

- Divisores de um número natural e identificação de divisores comuns;
- Máximo divisor comum (mdc);
- Métodos de cálculo do mdc: listagem, decomposição em fatores primos e algoritmo de Euclides.

Objetivos

- Compreender o conceito de máximo divisor comum (mdc) e sua importância na resolução de problemas;
- Conhecer, aplicar e comparar diferentes métodos para o cálculo do mdc;
- Desenvolver a habilidade de interpretar e resolver problemas envolvendo o mdc em diferentes contextos;
- Identificar contextos matemáticos e problemas em que o mdc é a ferramenta adequada de resolução.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta etapa da sequência didática, propomos uma atividade prática para introduzir o conceito de máximo divisor comum (mdc) a partir de uma situação concreta, inspirada no problema motivador (Dutenhefner; Cadar, 2015).

O professor apresenta os dois cordões e explica:

“Temos dois rolos de cordões: um com 210 cm e outro com 330 cm. Precisamos cortá-los em pedaços de mesmo comprimento, mas queremos que esses pedaços sejam os maiores possíveis. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?”

Materiais

- Dois cordões para cada dupla (um de 210 cm e outro de 330 cm);
- Tesoura;
- Fita métrica ou régua;
- Quadro branco para registro coletivo.

A turma é dividida em duplas. Cada dupla analisa os cordões e testa cortes possíveis (10 cm, 15 cm, 20 cm, 30 cm, etc.), registrando as tentativas e verificando em quais comprimentos ambos os cordões podem ser divididos sem sobra.

CAPÍTULO 4

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

O professor organiza a socialização dos resultados no quadro. Pergunta-se:

- Qual o maior comprimento que serve para os dois cordões?
- Como garantir que este é o maior comprimento que atende as condições dadas?
- Que estratégias foram utilizadas para chegar à resposta?

Conclui-se que o cordão de 210 cm rende 7 pedaços de 30 cm e o cordão de 330 cm rende 11 pedaços de 30 cm. Assim, como $(210, 330) = 30$ e esse é o maior comprimento possível dos pedaços.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Após a socialização do problema motivador, o professor deve realizar a formalização do conteúdo que está por trás da situação apresentada. Nesse momento, é fundamental retomar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca do conceito do mdc, discutindo a noção de divisores comuns e a importância de identificar o maior entre eles. Introduce-se a definição do mdc e em seguida, o professor deverá apresentar e exemplificar diferentes métodos para o cálculo do mdc, a fim de oferecer aos alunos um repertório diversificado de estratégias de resolução. Entre esses métodos, destacam-se: a listagem de divisores de cada número e a identificação do maior divisor comum, a decomposição dos números em fatores primos e a utilização dos fatores comuns para determinar o mdc e o algoritmo de Euclides, cuja relevância vai além do cálculo imediato do mdc, uma vez que será útil no desenvolvimento posterior do estudo de equações diofantinas.

GENERALIZAÇÃO

Após a sistematização do conteúdo, o professor deve propor problemas mais complexos de caráter olímpico, que explorem a aplicação do mdc em diferentes contextos. Espera-se que os estudantes consigam reconhecer situações em que o mdc é a ferramenta adequada de resolução, selecionando e aplicando a estratégia de cálculo mais eficiente. Essa experiência possibilita que generalizem o uso do mdc para problemas variados, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, da abstração matemática e da capacidade de aplicar os conceitos em situações novas e desafiadoras.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 03 - máximo divisor comum

1. **OPEMAT - 1ª FASE:** O responsável pela organização das prateleiras de um supermercado estava muito pensativo. Ele precisava organizar 168 biscoitos de chocolate e 120 biscoitos de morango e gostaria de organizá-los de acordo com as regras 1 e 2 abaixo. Sabendo que o organizador utilizou a menor quantidade de prateleiras possível respeitando os critérios de organização abaixo, assinale a alternativa que indica a quantidade total de prateleiras utilizadas.

1. Cada prateleira deve possuir quantidades iguais de biscoitos;

CAPÍTULO 4

2. Cada prateleira deve conter apenas um sabor de biscoito.

A) 5 B) 7 C) 10 D) 11 E) 12

2. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

Tema: mínimo múltiplo comum (mmc).

Quantidade de aula/tempo: 1 aula (50 minutos).

Conteúdos

- Múltiplos de um número natural e identificação de múltiplos comuns;
- Mínimo múltiplo comum;
- Métodos de cálculo do mmc: listagem de múltiplos, decomposição em fatores primos, cálculo do mmc a partir do mdc.

Objetivos

- Compreender o conceito de mmc e suas aplicações em diferentes situações-problema;
- Conhecer e comparar diferentes métodos para o cálculo do mmc, avaliando suas vantagens e limitações;
- Desenvolver a habilidade de distinguir se um problema envolve mdc ou mmc;

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Utilizaremos problemas que podem remeter a situações do cotidiano e podem despertar a curiosidade dos estudantes. O objetivo é levá-los a refletir sobre a necessidade de encontrar um valor que satisfaça condições específicas em cada situação.

1. “Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e uma outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando essas lâmpadas piscam juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez em que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?” (Dutenhefner; Cadar, 2015).
2. “Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam respectivamente 30 segundos e 35 segundos para completar uma volta na pista. Eles partem no mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os dois atletas se encontram pela primeira vez no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá o encontro?” (Dutenhefner; Cadar, 2015).

CAPÍTULO 4

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a apresentação dos problemas motivadores, o professor organiza a socialização das ideias iniciais dos estudantes. Cada grupo ou dupla pode compartilhar as estratégias utilizadas, mesmo que não tenham chegado à resposta final. O objetivo é valorizar os diferentes caminhos de resolução e relembrar conceitos já vistos no ensino fundamental.

A seguir, apresentamos alguns questionamentos que podem orientar a discussão:

- Como vocês pensaram em resolver o problema?
- Que estratégia usaram para encontrar o tempo ou a quantidade de voltas em que os eventos coincidem?
- Listar os múltiplos é sempre eficiente? Em quais situações pode ser pouco prático?
- Existe uma forma de garantir que o valor encontrado é realmente o menor múltiplo comum?
- O que diferencia um problema de mmc de um de mdc?

Durante a discussão, é possível perceber que alguns estudantes tenham recorrido a listagem de múltiplos para resolver os problemas. Nesse caso, o professor pode estimular a reflexão sobre as limitações desse método, mostrando que, embora válido em situações simples, ele se torna pouco prático quando os números envolvidos são maiores ou quando o mínimo múltiplo comum está mais distante na sequência.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

O professor deve conduzir a formalização do conteúdo, iniciando com a listagem de múltiplos como estratégia para encontrar o mmc, evidenciando que, embora funcione para números pequenos, esse método se torna pouco eficiente para números maiores ou quando o menor múltiplo comum está distante das listas.

Em seguida, introduz-se a fatoração em primos como método mais eficiente para determinar o mmc. O professor deve destacar a relação com o mdc, permitindo que os estudantes percebam as diferenças entre os conceitos: no cálculo do mdc, consideram-se apenas os fatores comuns aos números com os menores expoentes; já no cálculo do mmc, consideram-se todos os fatores que aparecem na fatoração de qualquer número, tomando os maiores expoentes. Essa distinção possibilita que os estudantes compreendam de maneira estruturada como os mesmos fatores podem ser combinados de formas diferentes para obter resultados distintos.

Por fim, o professor deve apresentar que, conhecendo previamente o mdc, é possível calcular o mmc de maneira mais eficiente, evidenciando a conexão entre os conceitos. Essa abordagem oferece uma visão integrada, preparando os alunos para aplicar o método em diversos problemas. Além disso, é importante que o professor demonstre a consistência entre os métodos, mostrando que os resultados obtidos são equivalentes.

GENERALIZAÇÃO

Na sequência, o professor apresenta problemas que envolvem o cálculo do mmc em diferentes contextos, incluindo situações em que o estudante precisa determinar valores ou intervalos que satisfaçam

CAPÍTULO 4

condições de múltiplos comuns. Espera-se que os alunos reconheçam quando o mmc é a ferramenta adequada, relacionando-o ao mdc previamente calculado, e que apliquem estratégias eficientes, como a fatoração em primos e a análise de expoentes. Essa generalização permite que compreendam a estrutura do mmc para valores genéricos, consolidando a conexão entre mdc e mmc e promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, da abstração matemática e da capacidade de resolver problemas.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 03 - mínimo múltiplo comum

- OPEMAT - 1ª FASE:** Para quantos valores de k , o número 12^{12} é o mínimo múltiplo comum de 6^6 , 8^8 e k ?
A) 6 B) 8 C) 12 D) 24 E) 25
- OPEMAT - 2ª FASE:** Na terra de π -raia, um observador registrou que um cometa X e um cometa Y poderiam ser vistos a cada período de 76 e y anos, respectivamente. Sabendo que este ano os dois cometas foram vistos juntos e que a próxima vez que eles serão vistos juntos novamente ocorre daqui a 684 anos, responda os seguintes itens.
 - Quantas vezes os cometas serão vistos juntos durante os próximos 13.000 anos?
 - Determine todos os possíveis valores para y .

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

A avaliação deste encontro busca compreender o aprendizado dos estudantes, valorizando o processo de construção do conhecimento em torno dos conceitos do mdc e do mmc. Para isso, os alunos devem registrar e descrever suas soluções para os problemas propostos, destacando os métodos utilizados, os raciocínios adotados e as dificuldades encontradas.

Essa prática possibilita ao professor analisar não apenas a correção das respostas, mas também a clareza, a organização e o rigor da escrita matemática. Ao mesmo tempo, os estudantes são incentivados a refletir sobre os conceitos trabalhados, relacionando situações concretas e contextualizadas com as definições formais. Assim, a avaliação vai além da verificação de respostas, pois permite que o estudante reconheça avanços e dificuldades, e oferece ao professor elementos para planejar intervenções e aprofundamentos nas aulas seguintes.

4.6 ENCONTRO 04 – EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Tema: equações diofantinas.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$.

CAPÍTULO 4

- Critério de existência de soluções inteiras a partir do mdc.
- Solução particular e solução geral.

Objetivos

- Compreender a forma geral das equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$.
- Identificar a condição de existência de soluções inteiras a partir do mdc.
- Determinar soluções particulares e expressar a solução geral.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 01

Jogo da escova adaptado para equações diofantinas

Para introduzir o estudo das equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$, faremos o uso de uma adaptação do tradicional jogo de cartas “Escova”, conhecida como *Escova Diofantina* (MELLO; PEREIRA; RAINHA, 2021). O objetivo deste jogo é permitir que os estudantes, de forma lúdica, explorem a existência de soluções de uma equação diofantina.

Regras:

Número de jogadores: 4 participantes.

1. O jogo possui 36 cartas numeradas de 2 a 10, sendo 4 cartas de cada. Embaralhe as cartas e distribua 3 cartas para cada jogador.
2. Pegue 4 cartas e coloque-as no centro da mesa com as faces visíveis para todos. O monte restante deve ser deixado de lado com as faces voltadas para baixo.
3. O primeiro jogador deve procurar cartas em sua mão que, somadas com as cartas da mesa, totalizem 15, o que é chamado de *escova diofantina*. Podem ser utilizadas no máximo dois números diferentes da mão do jogador. Isso significa que o jogador pode usar duas ou três cartas da sua mão, desde que sejam iguais. **Exemplo:** duas cartas de número 6 e uma carta de número 3.
4. O jogador coloca à sua frente as cartas que pegou da mesa, assim como a carta da sua mão que permitiu a soma 15, com a face voltada para baixo. Caso não consiga pegar nenhuma carta da mesa, deve simplesmente descartar na mesa uma das cartas de sua mão.
5. Quando os jogadores tiverem utilizado suas 3 cartas, uma nova mão de 3 cartas é distribuída, utilizando o monte que havia sido posto de lado inicialmente.
A partida prossegue da mesma maneira até que as cartas terminem.
6. Cada *escova diofantina* vale 1 ponto.
7. Vence a partida a dupla que alcançar o maior número de pontos.

CAPÍTULO 4

Objetivos

O jogo trabalha com equações diofantinas elementares do tipo $ax + by = 15$, em que a e b representam os valores das cartas escolhidas e note que x e y são as quantidades utilizadas de cada uma. Assim cada jogada bem sucedida representa a resolução da equação. O jogo naturalmente conduz à investigação de:

1. Condições para que haja solução em números inteiros não negativos, discutindo a relação com $\text{mdc}(a, b)$.
2. Multiplicidade de soluções para um mesmo alvo.
3. Estratégias para maximizar a pontuação com base nas possibilidades de solução.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

A dinâmica do jogo promove a participação ativa dos estudantes e estimula a busca por combinações numéricas viáveis, criando um ambiente propício para a transição entre a resolução empírica de problemas e a formalização algébrica. Além disso, a restrição de ao máximo dois valores distintos simplifica a situação de jogo, evitando que rodadas se prolonguem excessivamente sem ação. Esta limitação também favorece a análise matemática, permitindo conexões diretas com o conteúdo de equações diofantinas.

Antes de apresentarmos o quadro com as soluções, é importante destacar o papel do jogo em sala de aula. A proposta é que todos os estudantes participem ativamente, buscando a maior quantidade possível de soluções da equação diofantina $ax + by = 15$, a partir das combinações possíveis com as cartas. Durante esse processo, também é relevante analisar os casos em que não há solução viável, seja por limitação no número de cartas disponíveis ou pela impossibilidade de se alcançar a soma desejada com determinados valores de a e b . Essa etapa permite levantar discussões importantes, como: até que ponto é possível prever, apenas observando as cartas em jogo, se uma determinada escolha poderá ou não resultar em solução?

Além disso, considerando que cada jogador tem inicialmente apenas três cartas na mão e quatro cartas dispostas na mesa, algumas escolhas de a e b se tornam inviáveis, tanto pela quantidade insuficiente de cartas quanto pelos valores necessários para atingir o resultado 15.

A seguir, destacamos alguns pares representativos de valores de a e b , correspondentes às cartas escolhidas pelos jogadores, de modo a evidenciar diferentes resultados possíveis ao definir tais valores.

Tabela 4.1: Exemplos representativos de soluções da equação $ax + by = 15$

(a, b)	Soluções inteiras não negativas (x, y)
(1, 1)	(15, 0), (14, 1), . . . , (1, 14), (0, 15)
(2, 3)	(6, 1), (3, 3), (0, 5)
(4, 7)	(2, 1)
(2, 4)	nenhuma

Alguns pares, como (2, 4), não apresentam solução. Essa observação será retomada em outro momento, quando discutiremos o papel do máximo divisor comum no que diz respeito a soluções de equações diofantinas.

CAPÍTULO 4

Após a exploração prática do jogo *Escova Diofantina*, podemos propor aos estudantes uma discussão sobre a percepção de facilidade ou dificuldade em encontrar combinações. Alguns questionamentos podem ser levantados, como:

- Das soluções encontradas quais foram mais fáceis de perceber e quais exigiram mais atenção?
- Quais pares (a, b) que possuem maior número de soluções?
- Como a presença ou ausência da carta 1 influencia a jogada?

Essa atividade também permite discutir conceitos algébricos, como a existência de soluções inteiras não negativas, relacionando-se com o $\text{mdc}(a, b)$. Quando $\text{mdc}(a, b) = 1$, sempre existe pelo menos uma solução inteira para a equação diofantina. O número 1 é justamente o caso que garante que o mdc com qualquer outro valor seja 1, ampliando as possibilidades de soluções em comparação com pares de valores maiores.

Após serem feitas as discussões, o estudante poderá perceber que o número 1 tem um papel especial, pois permite complementar qualquer outro valor para atingir o alvo 15. Porém, sua presença não garante sucesso, pois depende da quantidade de cartas disponíveis na mão e na mesa. Essa reflexão permite que os estudantes percebam como a estrutura do conjunto de cartas influencia as soluções possíveis e a estratégia do jogo.

Dessa forma, o jogo não apenas favorece a prática experimental com números, mas também conduz os estudantes a compreender propriedades fundamentais das equações diofantinas, como a importância do mdc e a existência ou não de soluções inteiras.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 02

Equação diofantina em um caixa eletrônico

Para ilustrar a aplicação de equações diofantinas lineares com coeficientes fixos, imaginemos a seguinte situação prática: uma pessoa vai a um caixa eletrônico que só dispõe de cédulas de 20 e 50 reais. De quantas formas ela pode sacar exatamente R\$ 500,00?

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

O problema é modelado pela equação diofantina linear $20x + 50y = 500$, em que $x =$ número de cédulas de R\$ 20,00 e $y =$ número de cédulas de R\$ 50,00.

Espera-se que os estudantes encontrem algumas soluções inteiras não negativas, como ilustrado na tabela a seguir:

CAPÍTULO 4

Tabela 4.2: Soluções inteiras não negativas para $2x + 5y = 50$

Cédulas de R\$ 20,00 (x)	Cédulas de R\$ 50,00 (y)	Valor Total
25	0	R\$ 500,00
20	2	R\$ 500,00
15	4	R\$ 500,00
10	6	R\$ 500,00
5	8	R\$ 500,00
0	10	R\$ 500,00

Com a participação dos estudantes, espera-se que o máximo de soluções seja apresentado e que eles socializem suas estratégias. A intenção é que percebam o padrão aritmético presente: a cada aumento de 2 cédulas de R\$50,00, o número de cédulas de R\$20,00 diminui em 5 unidades, mantendo o total de R\$500,00. Esse reconhecimento permite que, mesmo com poucas soluções iniciais, os estudantes consigam generalizar e determinar todas as demais soluções.

Para ampliar a compreensão dos estudantes acerca das soluções da equação diofantina $20x + 50y = 500$, propõe-se o uso do software GeoGebra (GEOGEBRA, 2025). A representação gráfica dessa equação permite visualizar a reta correspondente no plano cartesiano e destacar os pontos de coordenadas inteiras que a satisfazem.

Para tal, é possível que o usuário altere apenas o valor total a ser sacado, isto é, o termo constante c na equação $50x + 20y = c$. Embora as cédulas disponíveis permaneçam fixas, a variação de c torna possível investigar diferentes cenários e analisar para quais valores existem soluções inteiras não negativas. A exploração visual apresenta a presença ou ausência de pontos inteiros sobre a reta indicando a existência ou não de soluções.

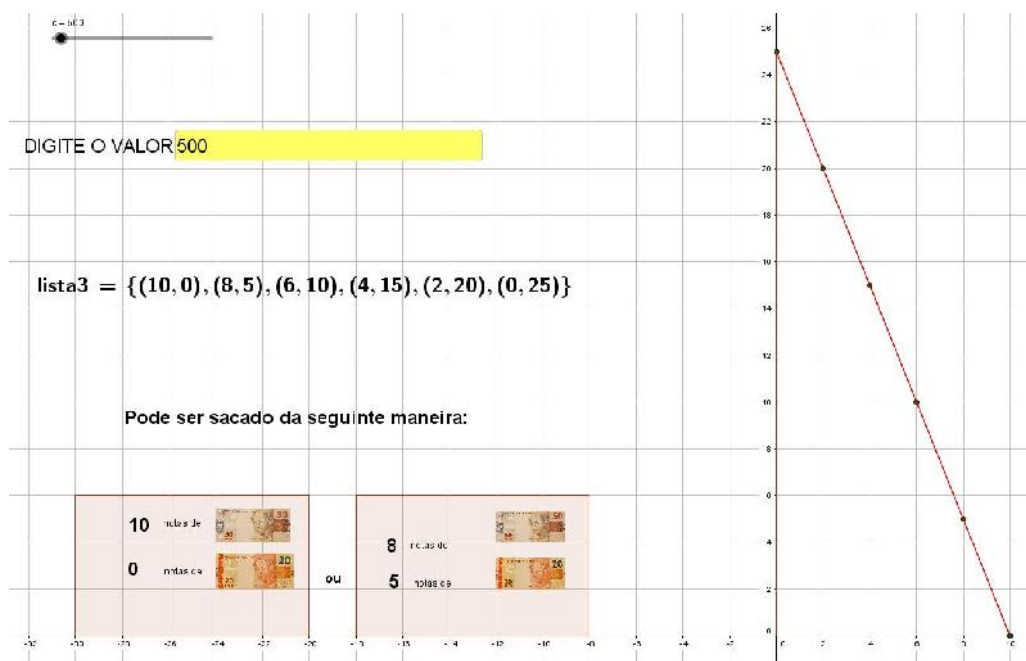


Figura 4.2: Simulação da equação diofantina do caixa eletrônico no GeoGebra.

CAPÍTULO 4

O recurso está disponível no GeoGebra Materiais (Silva Barbosa, 2025), permitindo que professores e estudantes explorem livremente as representações propostas.

A escolha de uma situação próxima ao cotidiano busca facilitar a compreensão da utilidade das equações diofantinas na resolução de problemas reais. A partir dessa exploração inicial, o professor pode avançar para a formalização do método de resolução das equações diofantinas lineares, destacando a condição de existência das soluções e a obtenção da solução geral.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Após a exploração das atividades práticas, é recomendável que o professor registre no quadro as soluções apresentadas pelos alunos, correspondentes a cada equação diofantina encontrada. Esses registros evidenciam as diferentes combinações possíveis e também os casos em que não há solução, servindo como base para introduzir a condição de existência de soluções inteiras, por meio do cálculo do mdc.

Em seguida, deve-se apresentar o conceito de solução particular, ou seja, uma solução específica que satisfaz a equação, e mostrar como construir a solução geral. A partir desse ponto, torna-se possível determinar as soluções que atendam às condições propostas, tanto nos inteiros quanto nos números naturais.

Dessa maneira, a formalização consolida o aprendizado, conectando as atividades práticas à compreensão teórica das equações diofantinas, permitindo que os estudantes percebam de forma clara a relação entre o mdc, a existência de soluções e a construção das soluções particulares ou gerais.

GENERALIZAÇÃO

Os estudantes devem perceber que o método aprendido para resolver equações diofantinas lineares é geral e pode ser aplicado em diferentes situações; compreender a relação entre o mdc, a solução particular e a construção da solução geral permitem identificar rapidamente a existência de soluções e determinar todas as combinações possíveis. Além disso, a análise de padrões nas soluções auxilia na resolução de problemas. Um aspecto importante dessa generalização é a autonomia do estudante em construir a equação diofantina, pois nem sempre ela é apresentada pronta no problema, sendo necessário ler, interpretar e modelar a situação antes de aplicar a estratégia de resolução para determinar soluções.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 04 - equações diofantinas

- OBMEP - 1ª FASE:** Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?
A) 5 B) 7 C) 14 D) 20 E) 31
- OBMEP - 1ª FASE:** De quantas maneiras podemos trocar uma nota de R\$ 20,00 por moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,25?
A) 21 B) 36 C) 38 D) 41 E) 56

CAPÍTULO 4

3. **TM² - 1ª FASE:** Beatriz tem em seu bolso 33 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos. Sabendo que Luize tem ao todo uma quantidade inteira de reais, quantas moedas de 25 centavos ela possui?

- A) 16
- B) 17
- C) 18
- D) 19
- E) Não é possível determinar.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Para consolidar o aprendizado e fixar o método de resolução de equações diofantinas lineares, propõe-se que cada estudante construa um esquema indicando o passo a passo do procedimento para a resolução de uma equação diofantina proposta por ele e que possua solução. O esquema deve incluir, de forma objetiva: identificação dos coeficientes, cálculo do mdc, verificação da existência de soluções e determinação de uma solução particular e construção da solução geral.

Essa atividade permite que o professor observe se os estudantes compreenderam o método, analisando se aprenderam a sequência de passos necessária para resolver qualquer equação diofantina linear. Ao final, cada aluno terá um material próprio que sintetiza o procedimento, servindo como referência para futuras aplicações.

4.7 ENCONTRO 05 – NÚMEROS PRIMOS

Tema: números primos.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Conceito de números primos e compostos;
- Crivo de Eratóstenes e teste de primalidade;
- Teorema fundamental da aritmética;
- Divisores de um número.

Objetivos

- Compreender o conceito de números primos e compostos;
- Investigar se determinado número é primo por meio do Crivo de Eratóstenes e de testes de primalidade;
- Realizar a fatoração única de números inteiros;

CAPÍTULO 4

- Determinar os divisores de um número a partir da fatoraçoão, incluindo a quantidade de divisores.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 01

Inicia-se o encontro com questionamentos investigativos:

- Quais números primos são facilmente lembrados?
- Como verificar se números como 91 ou 97 são primos?

Essas questões têm como finalidade despertar a curiosidade e evidenciar a necessidade de métodos sistemáticos para o reconhecimento dos números primos.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 02

Construção do Crivo de Eratóstenes

Quantos primos existem entre 2 e 100? Como podemos listá-los de maneira prática e confiável? Para investigar todos os primos de 2 a 100, distribui-se uma tabela contendo os números de 2 a 100, disponível no apêndice . A atividade consiste em:

1. Comece com o menor número primo: 2. Risque todos os múltiplos de 2, exceto o próprio 2.
2. Passe para o próximo número que ainda não foi riscado. Risque todos os múltiplos deste número, exceto o próprio número.
3. Repita o processo com o próximo número não riscado e assim por diante, até que todos os números na tabela tenham sido analisados.

Os números que permanecerem sem riscar são os números primos.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a realização da atividade, propõem-se reflexões para proporcionar a compreensão do conceito de número primo e do funcionamento do crivo de Eratóstenes:

- Quais números sobraram?
- Por que o número 1 não é considerado primo?
- Por que não precisamos continuar com múltiplos de números maiores, como 11, para determinar todos os primos até 100?

A discussão permite que os estudantes percebam a eficiência do método e reforcem a definição formal de número primo, observando o motivo pelo qual 1 não é considerado primo.

Em seguida, propõe-se analisar o número 211. Para verificar se é primo, discute-se se seria necessário testar todos os divisores menores que 211 e espera-se que os estudantes percebam que basta verificar a divisibilidade pelos números primos menores ou iguais a $\sqrt{211} \approx 14,5$, ou seja, 2, 3, 5, 7, 11, 13. Como nenhum deles divide 211, conclui-se que 211 é um número primo.

O vídeo *Crivo de Eratóstenes* (Reducatica, 2020) pode ser compartilhado com os estudantes para reforçar a atividade ou utilizado como material de apoio para o planejamento da aula pelo professor.

CAPÍTULO 4

2. **OBMEP - 1ª FASE:** Mariana escreveu as decomposições em fatores primos dos números naturais de 2 a 100:

$$2, 3, 2 \times 2, 5, 2 \times 3, \dots, 3 \times 3 \times 11, 2 \times 2 \times 5 \times 5.$$

Quantas vezes ela escreveu o algarismo 2?

- A) 99 B) 104 C) 152 D) 188 E) 191
3. **OPEMAT - 1ª FASE:** Seja n um número inteiro positivo. Defina o número n^* por

$$n^* = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Por exemplo,

$$6^* = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Dentre as alternativas abaixo, podemos concluir que o número de divisores primos distintos do número 21^* é:

- A) 2 B) 8 C) 10 D) 11 E) 21
4. **TM² - 1ª FASE:** Seja n o menor natural que possui exatamente 35 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n - 1$.

- A) 2 B) 4 C) 7 D) 12 E) 14

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Ao final do encontro, propõe-se uma reflexão sobre a importância dos números primos na sociedade, especialmente em áreas como criptografia e segurança digital. Os estudantes podem discutir a necessidade de compreender os números primos, a dificuldade de identificar primos muito grandes e a aplicabilidade prática desse conhecimento em contextos cotidianos. Sugere-se, ainda, a exibição do vídeo **Como números primos te protegem na internet** (Reducatica, 2025), que apresenta uma aplicação, reforçando o valor do conteúdo estudado.

4.8 ENCONTRO 06 – CONGRUÊNCIAS

Tema: congruência.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Conceito de congruência e notação;
- Propriedades da congruência;

CAPÍTULO 4

- Operações com congruências;
- Sistema completo de resíduos e inverso multiplicativo.

Objetivos

- Compreender o conceito de congruência modular e a notação associada;
- Reconhecer e aplicar as propriedades da congruência em operações aritméticas;
- Resolver problemas de congruência, como determinação de restos, algarismos e condições de divisibilidade.

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Formação de grupos

Os estudantes serão recebidos com um bombom, ao qual estará associado um número, que será utilizado na dinâmica inicial da aula. Em uma turma de 20 alunos, os números variam de 1 a 20, caso o número de estudantes seja diferente, o intervalo deve ser ajustado de acordo com a quantidade de participantes. Essa ação busca acolher os estudantes e preparar a turma para a explorar o conteúdo da aula.

O professor deverá determinar, na sala, regiões que representarão os restos de 0 até 5. Inicialmente, os estudantes deverão realizar mentalmente a divisão de seu número por 6, identificar o resto e se posicionar na região correspondente, observando os colegas e os números que ficaram próximos. Em seguida, deverão realizar uma nova divisão por 5 e, seguindo as mesmas orientações, se reorganizem nas regiões de 0 até 4, novamente observando os integrantes e os números que deram origem ao grupo. Por fim, os estudantes realizarão a divisão por 4, organizando os grupos para o trabalho em sala.

A dinâmica permite perceber como pequenas alterações no divisor influenciam a composição dos grupos, evidenciando classes de números com propriedades comuns. Além disso, favorece a discussão acerca do tema das congruências modulares, promovendo uma aprendizagem significativa.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a realização da dinâmica para a formação de grupos, o professor deve realizar questionamentos pontuais com o objetivo de introduzir a ideia de congruência modular, dentre os quais destacam-se:

- Quais números estavam no mesmo grupo após a divisão? Por que esses números caíram juntos no mesmo grupo?
- Quais mudanças ocorreram na composição dos grupos à medida que o divisor foi alterado?
- Se realizássemos a divisão por 5 e 10, haveria pessoas que se encontrariam no mesmo grupo?

Após a discussão inicial sobre os aspectos que envolvem congruência na formação dos grupos, podem ser propostos questionamentos motivadores que associem a aritmética modular à realidade cotidiana dos estudantes, estimulando-os a reconhecer a aplicabilidade do conceito em situações práticas. Alguns exemplos incluem:

CAPÍTULO 4

- Determinar o horário no relógio analógico a partir de um horário observado em um celular. Se são 22h no celular, que horas serão no relógio analógico?
- Calcular os horários de doses subsequentes de um medicamento tomado a cada seis horas. Se a primeira dose foi administrada às 19h, qual será o horário da próxima dose?
- Identificar o dia da semana após um determinado número de dias. Se hoje é quinta-feira e um encontro ocorrerá daqui a 40 dias, em qual dia da semana ele acontecerá?

Esses questionamentos contribuem para que os estudantes compreendam que a aritmética modular é aplicável em diversos contextos do dia a dia, reforçando a relevância do tema para a resolução de problemas matemáticos.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Nesta etapa, o professor deve apresentar o conceito de congruência, explicando o que significa dizer que dois números são congruentes módulo m . Relacionando com a dinâmica inicial, isso equivale a dizer que dois números são congruentes se o resto da divisão desses números por m for o mesmo. Além disso, deve-se apresentar a notação que representa dois números congruentes e enfatizar a relação entre congruência e divisibilidade, destacando que, se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (b - a)$. É importante evidenciar que a congruência modular constitui uma relação de equivalência, apresentando suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, bem como as propriedades operatórias de adição, multiplicação e potenciação. Em seguida, podem ser discutidos o sistema completo de resíduos e o conceito de inverso multiplicativo, elementos fundamentais para a resolução de problemas.

Durante toda a apresentação do conteúdo, é essencial que o professor utilize exemplos numéricos para facilitar a compreensão do estudante, proporcionando uma aprendizagem significativa. Merecem destaque exemplos clássicos, como a determinação do resto da divisão de alguns números, a identificação do algoritmo das unidades em determinados casos e a análise de condições que garantem a divisibilidade de certas expressões numéricas.

GENERALIZAÇÃO

A partir das atividades realizadas, dos exemplos analisados e da formalização do conteúdo, os estudantes são convidados a aplicar os conceitos de congruência modular em novas situações, resolvendo problemas e identificando padrões. Essa prática permite consolidar a compreensão dos conceitos estudados e desenvolver autonomia na resolução de questões.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Os estudantes realizarão a atividade conforme os grupos previamente formados de acordo com o resto da divisão de seus números. Cada grupo se reúne em uma mesa identificada com o número do seu resto e, dentro de cada grupo, os alunos sorteiam papéis correspondentes a funções específicas, que visam garantir a participação colaborativa e a organização da atividade:

1. **Facilitador:** conduz a leitura e a discussão da tarefa no grupo.

CAPÍTULO 4

2. **Harmonizador:** assegura a participação equilibrada de todos os integrantes.
3. **Monitor de recursos:** organiza os materiais e solicita apoio ao professor quando necessário.
4. **Repórter:** registra e apresenta as conclusões do grupo.
5. **Controlador do tempo:** informa os colegas sobre o tempo disponível.

Essa distribuição de funções busca promover a colaboração e assegurar que todos os alunos participem ativamente da resolução do problema.

Cada grupo recebe uma questão diferente relacionada ao tema da congruência modular. Com aproximadamente 10 minutos para a resolução, os estudantes elaboram estratégias em conjunto e registram suas conclusões em cartolina. Durante a atividade, cada integrante desempenha a função sorteada, assegurando a participação colaborativa. Ao final, o repórter apresenta a solução do grupo, promovendo a socialização das diferentes abordagens. Essa dinâmica fortalece a compreensão da congruência modular e amplia a capacidade de aplicação do conceito em novos problemas.

Questões referentes ao encontro 06 - congruência

1. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o resto da divisão de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 2011 + 21$ por 8?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

2. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \dots + \underbrace{777 \dots 77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777 \dots 777}_{\text{setenta e sete setes}} ?$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3. **OPEMAT - 1ª FASE:** O cadastro de pessoa física (CPF) é um documento de identificação usado pela receita federal que consiste de onze dígitos sendo os nove primeiros fornecidos pela receita federal e os dois últimos, chamados dígitos verificadores, calculados da seguinte forma: se $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9$ são os nove primeiros dígitos do CPF fornecido, então calculamos

$$A = 10d_1 + 9d_2 + 8d_3 + 7d_4 + 6d_5 + 5d_6 + 4d_7 + 3d_8 + 2d_9,$$

e calculamos r , onde r é o resto da divisão de A por 11. Se o resto for 0 ou 1 então o décimo dígito d_{10} será 0. Caso contrário d_{10} será $11 - r$. Para calcular o décimo primeiro dígito, calculamos

$$B = 10d_2 + 9d_3 + 8d_4 + 7d_5 + 6d_6 + 5d_7 + 4d_8 + 3d_9 + 2d_{10},$$

e calculamos R , onde R é o resto da divisão de B por 11. Se $R = 0$ ou $R = 1$ então $d_{11} = 0$.

CAPÍTULO 4

Caso contrário, $d_{11} = 11 - R$. Se uma pessoa tem os nove primeiros dígitos de seu CPF dados por 299792458, os dígitos d_{10} e d_{11} são respectivamente:

- A) 1 e 8 B) 0 e 7 C) 2 e 6 D) 0 e 8 E) 3 e 5

4. **OPEMAT - 1ª FASE:** Uma determinada loja de livros de matemática resolveu fazer uma promoção que proporcionava 35% de desconto nos livros. Para obter o desconto, os clientes precisavam usar um cupom com um número de seis dígitos dado por 80AB35 que é múltiplo de 99, e assim precisavam descobrir os valores de A e B . Assinale a alternativa abaixo que contém um possível valor de A .

- A) 2 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

O encontro se encerra com uma atividade avaliativa coletiva, na qual os estudantes compartilham suas experiências e refletem sobre o trabalho em grupo, destacando pontos fortes e dificuldades enfrentadas.

Esse momento de socialização favorece a consolidação da aprendizagem, promove a construção coletiva do conhecimento e fortalece o engajamento e a cooperação entre os colegas.

4.9 ENCONTRO 07 – TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS

Tema: sistema de congruências.

Quantidade de aula/tempo: 2 aulas / 1h40.

Conteúdos

- Sistemas de congruências;
- Teorema chinês dos restos (TCR);
- Padrões numéricos e solução geral.

Objetivos

- Compreender e representar sistemas de congruências a partir de problemas contextuais.
- Resolver sistemas de congruências por substituição ou pelo Teorema Chinês dos Restos.
- Identificar padrões numéricos e compreender a solução geral de um sistema.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Desafio do número secreto

O professor convida um estudante para pensar em um número natural menor que 30. Em seguida, pede que divida esse número por 3 e por 5, anotando os restos. O estudante informa apenas os restos ao professor e à turma. O desafio consiste em adivinhar o número escolhido pelo estudante.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Lançado o desafio para a turma, o professor deverá instigar os estudantes a desenvolverem estratégias para a resolução do problema.

- Como podemos descobrir o número a partir dos restos?
- Existe sempre um número que satisfaça essas condições?
- Pode haver mais de uma solução? Ou nenhuma solução?

Seria interessante que os estudantes registrassem o problema por meio de duas congruências modulares. Assim, o professor poderia mostrar que esse simples problema representa um sistema de equações.

Para aumentar o desafio, sugere-se a apresentação de um problema clássico:

Qual é o número que deixa restos 2, 3 e 2 quando dividido, respectivamente, por 3, 5 e 7?

Os estudantes são incentivados a investigar por meio de tentativa e erro. Ao obter a solução, o professor propõe novos questionamentos para estimular a reflexão:

- E se quisermos descobrir um número maior que 1000 e menor que 1200 que satisfaça as mesmas condições?
- Seria fácil continuar listando todos os números?
- Conseguem perceber algum padrão e prever qual seria o número?

Esses questionamentos evidenciam a necessidade de um método geral e eficiente para a resolução de sistemas de congruências.

EXPLANAÇÃO DE DEFINIÇÕES E CONSOLIDAÇÃO DO ALGORITMO

Após a resolução dos problemas motivadores, o professor deve conduzir a formalização do conteúdo, retomando os problemas apresentados e mostrando que eles representam sistemas de congruências. É importante esclarecer o que significa solucionar um sistema, ou seja, identificar o número que satisfaz todas as condições simultaneamente.

O professor deve apresentar duas estratégias principais de resolução: a substituição e a aplicação do teorema chinês dos restos, enfatizando o raciocínio por trás das soluções e preparando os estudantes para aplicar os conceitos em novas situações.

CAPÍTULO 4

GENERALIZAÇÃO

O professor pode propor problemas contextualizados que possam ser modelados por sistemas de congruências. Ao conduzir os estudantes na identificação das congruências correspondentes e na resolução do sistema, promove-se a aplicação prática dos conceitos aprendidos.

Dessa forma, os estudantes têm a oportunidade de consolidar a compreensão do conteúdo, observando como os princípios do Teorema Chinês dos Restos e da resolução por substituição se aplicam a situações concretas. Em seguida, cada estudante deve resolver individualmente ou em grupo os problemas propostos para o encontro, reforçando a autonomia na aplicação dos conceitos.

MOMENTO DOS EXERCÍCIOS

Questões referentes ao encontro 07 - Teorema Chinês dos Restos

1. **OPEMAT – 2ª FASE:** Um general deseja verificar o número de soldados em um de seus pelotões. Então, mandou que os soldados formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 2 soldados. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 11 em 11 e verificou que sobraram 4. Finalmente, fez os soldados se alinharem de 13 em 13 e sobraram 8. Sabendo que o pelotão tem entre dois mil e três mil soldados, determine quantos soldados sobraram quando o general os mandou formar de 100 em 100.
2. **ENQ:** A Secretaria de Educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividí-los entre 7 escolas, sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Encontre a quantidade de livros.
3. **ENQ:** Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram 1, 2, 3 e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Ao final da resolução das atividades, os estudantes são convidados a socializar suas soluções, apresentando no quadro e discutindo coletivamente os caminhos percorridos. Esse momento de partilha valoriza a diversidade de estratégias e permite que a turma reconheça as conexões entre os conceitos estudados.

Como encerramento do minicurso, realiza-se uma roda de conversa avaliativa, na qual os estudantes são convidados a refletir sobre sua trajetória de aprendizagem. O professor pode orientar a discussão a partir das seguintes questões:

- Qual conteúdo ou atividade você considerou mais interessante ou marcante durante o minicurso?
- Quais estratégias de resolução foram mais fáceis de compreender e aplicar?
- Quais conteúdos ou atividades apresentaram maior dificuldade?

CAPÍTULO 4

- De que forma essa experiência pode contribuir para sua preparação para as olimpíadas de matemática?
- Como você se sentiria diante de problemas semelhantes em provas olímpicas?
- Quais habilidades você acredita ter desenvolvido ao longo dos encontros: lógica, criatividade, percepção de padrões, argumentação matemática, comunicação matemática ou outras?

Esse momento final de avaliação e reflexão busca consolidar a aprendizagem, valorizar o esforço coletivo e estimular os estudantes a perceberem sua evolução, fortalecendo a confiança e interesse para enfrentar novos desafios.

4.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao propor esta sequência didática, pretende-se oferecer condições para que os estudantes ampliem seus conhecimentos em aritmética e, ao mesmo tempo, se aproximem do universo das olimpíadas de matemática, compreendendo a estrutura das questões, desenvolvendo segurança para enfrentar situações-problema e adquirindo confiança para participar de competições.

Com uma abordagem que valoriza o raciocínio lógico, a escrita matemática e o trabalho colaborativo, busca-se estimular nos participantes a percepção de que são capazes de enfrentar os desafios propostos, compreendendo que, embora não seja simples, é possível se preparar e construir as competências necessárias para alcançar um bom desempenho.

Mais do que o domínio de conteúdos aritméticos, a sequência didática enfatiza a importância das estratégias de resolução e do incentivo à prática da escrita matemática. Embora muitas das questões iniciais das olimpíadas sejam objetivas, a proposta prioriza o desenvolvimento do raciocínio matemático, da argumentação e da capacidade de organizar e comunicar soluções, considerando que, em etapas posteriores, os problemas passam a exigir respostas discursivas. Dessa forma, busca-se formar estudantes capazes de justificar seus procedimentos, lidar com desafios progressivamente mais complexos e atuar de maneira ativa no processo de fazer matemática.

A iniciativa se alinha aos princípios da educação integral ao incentivar autonomia, participação ativa e protagonismo estudantil, contribuindo para que essa vivência se multiplique entre outros colegas.

Dessa forma, os encontros funcionam como ponto de partida para o ingresso no mundo olímpico, despertando o interesse pela matemática, favorecendo a participação em outras competições, ampliando horizontes e reconhecendo os benefícios que esse caminho pode oferecer para a formação pessoal, acadêmica e profissional dos estudantes.

CAPÍTULO 4

4.10 REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Básica**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Acesso em: 30 jun. 2025. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. **Encontros de Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. p. 121. Distribuição: IMPA/OBMEP. ISBN 978-85-244-0392-7.

EDUCAÇÃO E ESPORTES DE PERNAMBUCO, Secretaria de. **Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental – Anos Finais**. [S. l.: s. n.], 2025. Acesso em: 30 jun. 2025. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-fundamental-anos-finais/>.

GEOGEBRA. **GeoGebra: Mathematics Software**. [S. l.: s. n.], 2025. <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 13 out. 2025.

MELLO, Cristiane de; PEREIRA, Loisi Carla Monteiro; RAINHA, Marcelo Leonardo dos Santos. Práticas de ensino na formação do futuro professor de Matemática. **Revista Educação Pública**, v. 21, n. 3, 2021. ISSN 1984-6290. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/3/praticas-de-ensino-na-formacao-do-futuro-professor-de-matematica>.

PANNUTI, Maria Regina Viana. Caminhos da prática pedagógica. **TVE Brasil. Rio de Janeiro**, p. 01–05, 2004.

REDUCATICA. **Como números primos te protegem na internet — Criptografia e Números Primos**. [S. l.: s. n.], 2025. Acessado em: 17 set. 2025. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7sPjyualo_4.

REDUCATICA. **Crivo de Eratóstenes — Como encontrar números primos**. [S. l.: s. n.], 2020. Acesso em: 17 set. 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=uJaPQGtYg6g>.

SILVA BARBOSA, Maria Aparecida da. **Equação Diofantina: Caixa Eletrônico**. [S. l.: s. n.], 2025. <https://www.geogebra.org/material/copy/id/mpz nahsk>. Recurso interativo no GeoGebra. Acesso em: 13 out. 2025.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. Reimpressão 2010. ISBN 978-85-7307-426-0.

A. Divisibilidade

Diagnose

Tabuleiro

1. Você já participou de alguma Olimpíada de Matemática? Qual foi sua experiência?
2. Quais tipos de problemas você mais gosta ou sente dificuldade?
3. Como você organiza seu raciocínio ao resolver problemas matemáticos?
4. Descreva como costuma registrar suas soluções e justificativas ao resolver um problema matemático.
5. O que espera aprender neste curso preparatório para provas olímpicas?
6. **Questão Desafiadora (OBMEP - 1ª FASE):** Nove amigos comeram 5 pizzas, algumas cortadas em 6 fatias e outras cortadas em 8 fatias. Todos comeram o mesmo número de fatias e não sobrou nada. Quantas fatias cada um comeu?
 - A) 4
 - B) 5
 - C) 6
 - D) 7
 - E) 8
7. Descreva como você pensou para tentar resolver a questão acima. Quais passos você seguiu? Testou alguma possibilidade? Quais alternativas considerou?

Trilha dos Restos

Tabuleiro

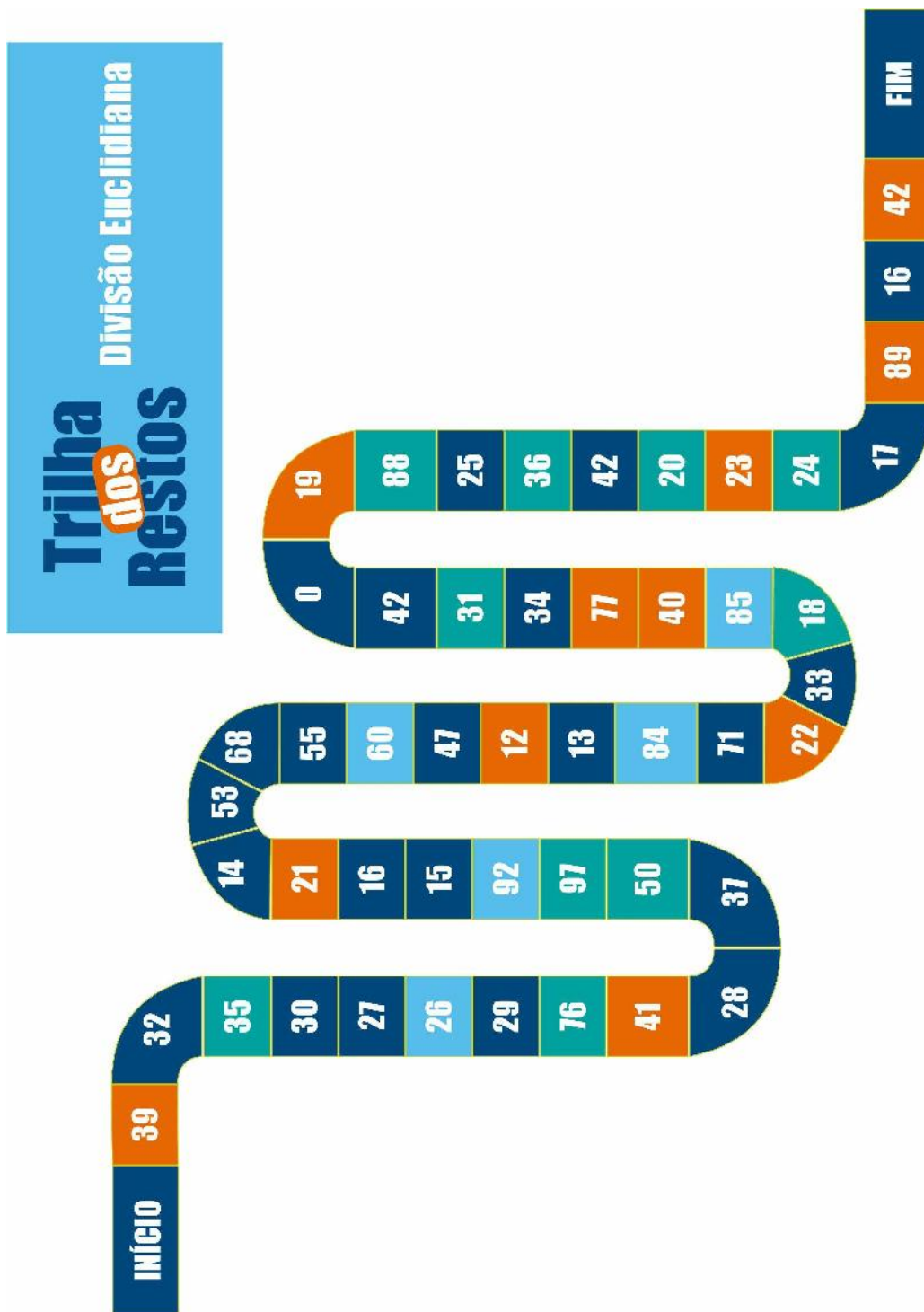


Figura 4.3: Tabuleiro Trilha dos Restos

Questões Olímpicas - Encontro 01

Divisibilidade

1. **OBMEP - 1ª FASE:** Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57, qual é o resto que ele vai encontrar?

- A) 0 B) 20 C) 40 D) 54 E) 56

2. **OPEMAT - 2ª FASE:** Considere a lista periódica conforme a situação na figura abaixo: A lista é ordenada, ou seja, o primeiro termo é o número 1, o segundo o número 2, o terceiro o número 3, o quarto o número 1 e assim por diante. Julgue as afirmacoes a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA e (F) se a afirmação for FALSA.

1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 ...

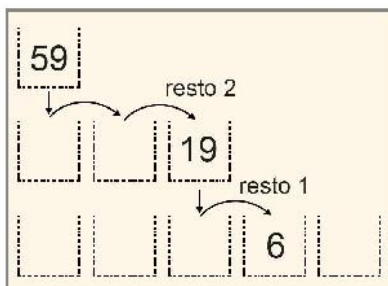
- A) (V) (F) A sequência se repete a cada agrupamento de 7 números.
 B) (V) (F) O número que ocupa a 2021ª posição é o número 3.
 C) (V) (F) Observando a lista até o 2020º termo (incluindo este número), o número 3 aparece 336 vezes.
 D) (V) (F) Olhando a lista até o 2019º termo (incluindo este número), o agrupamento 12 aparece 673 vezes.
 E) (V) (F) Somando os primeiros 2018 números dessa sequência obtemos o valor 4371.

3. **OBMEP - 2ª FASE:** Em uma brincadeira, Euclides escolhe um número natural, coloca esse número no topo do tabuleiro ao lado e realiza o seguinte procedimento:

- divide o número escolhido por 3 e anota o quociente e o resto;
- se o resto for 0 coloca o quociente logo abaixo do número;
- se o resto for 1 coloca o quociente deslocando uma casa para a direita;
- se o resto for 2 coloca o quociente deslocando duas casas para a direita.

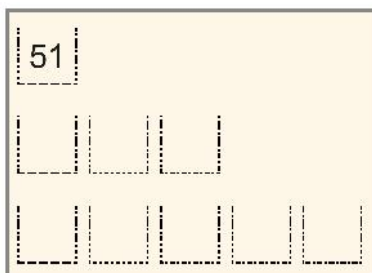
A seguir, ele repete o mesmo procedimento para o quociente obtido. Na figura vemos a brincadeira de Euclides que começa com 59 e termina com o 6 na quarta casa da base do tabuleiro.

$$\begin{array}{r}
 59 \overline{) 3} \\
 \underline{2 \ 19} \\
 59 = 19 \times 3 + 2 \\
 19 \overline{) 3} \\
 \underline{1 \ 6} \\
 19 = 6 \times 3 + 1
 \end{array}$$

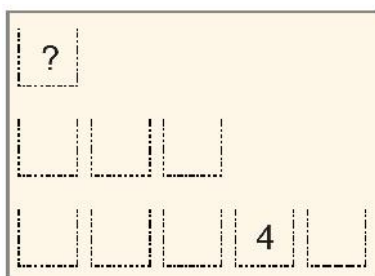


CAPÍTULO 4

A) Faça a brincadeira de Euclides com o número 51.



B) Quais números Euclides pode ter escolhido se a brincadeira terminou com o 4 na quarta casa da base do tabuleiro?



C) Quantos números entre 10 e 99 começam uma brincadeira de Euclides que termina na quarta casa da base do tabuleiro?

4. **OPEMAT - 1ª FASE:** Quantos pares (m, n) de números inteiros satisfazem a igualdade

$$3n + 5m = mn + 13.$$

- A) Quatro pares.
- B) Cinco pares.
- C) Seis pares.
- D) Sete pares.
- E) Oito pares.

B. Sistemas de Numeração

Atividade Motivacional - Cartas Mágicas

Sistema de Numeração

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^0 em sua decomposição em potências de 2.



2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^1 em sua decomposição em potências de 2.

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^2 em sua decomposição em potências de 2.

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^3 em sua decomposição em potências de 2.

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^4 em sua decomposição em potências de 2.

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta do jogo com os números que possuem o fator 2^5 em sua decomposição em potências de 2.

Cartas Mágicas

Sistema de Numeração

Descobrir um número pensado utilizando cartas numeradas e compreender a lógica do sistema binário de forma prática.

Objetivo: Construir suas próprias cartas mágicas para os números de 1 a 15, aplicando conceito de sistema binário e representação posicional.

Instruções para preenchimento:

- Cada cartela representa uma potência de 2 (1, 2, 4, 8).
- Para cada número de 1 a 15, determine em quais potências ele aparece na decomposição binária.
- Coloque o número na cartela correspondente à(s) potência(s) de 2 em que ele aparece.
- Exemplo: o número 5 tem representação binária 0101 — aparece nas potências 1 e 4, então entra nas cartelas 1 e 4.
- Preencha todas as cartelas de 1 a 15 seguindo essa lógica.

- Teste a mágica com colegas: alguém pensa em um número de 1 a 15 e você tenta adivinhar usando suas cartelas.
- Experimente generalizar o método para números maiores ou para outras bases numéricas.

CAPÍTULO 4

Questões Olímpicas - Encontro 02

Sistema de Numeração

- OBMEP - 1ª FASE:** O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é a soma de um número de dois algarismos com seu contrário?
 - 44
 - 99
 - 121
 - 165
 - 181
- OPEMAT - 1ª FASE:** Os números naturais m, n, p, q, r e s são formados por 3 algarismos não nulos. Assumindo que estes números são distintos e formados pelos mesmos algarismos, então $m + n + p + q + r + s$ é um múltiplo de:
 - 10
 - 100
 - 110
 - 200
 - 222

C. Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

Atividade Motivacional 01

MDC

Temos dois rolos de arame: um com 210 cm e outro com 330 cm. Precisamos cortá-los em pedaços de mesmo comprimento, mas queremos que esses pedaços sejam os maiores possíveis. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço?

Questões Olímpicas - Encontro 03

MDC

- OPEMAT - 1ª FASE:** O responsável pela organização das prateleiras de um supermercado estava muito pensativo. Ele precisava organizar 168 biscoitos de chocolate e 120 biscoitos de morango e gostaria de organizá-los de acordo com as regras 1 e 2 abaixo. Sabendo que o organizador utilizou a menor quantidade de prateleiras possível respeitando os critérios de organização abaixo, assinale a alternativa que indica a quantidade total de prateleiras utilizadas.

CAPÍTULO 4

1. Cada prateleira deve possuir quantidades iguais de biscoitos;
2. Cada prateleira deve conter apenas um sabor de biscoito.

A) 5
B) 7
C) 10
D) 11
E) 12
2. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 60

Atividade Motivacional 01

MMC

1. “Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e uma outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando essas lâmpadas piscam juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez em que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?” (Dutenhefner; Cadar, 2015).
2. “Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam respectivamente 30 segundos e 35 segundos para completar uma volta na pista. Eles partem no mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os dois atletas se encontram pela primeira vez no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá o encontro?”

Questões Olímpicas - Encontro 03

MMC

1. **OPEMAT - 1ª FASE:** Para quantos valores de k , o número 12^{12} é o mínimo múltiplo comum de 6^6 , 8^8 e k ?

A) 6
B) 8

CAPÍTULO 4

- C) 12
- D) 24
- E) 25

2. **OPEMAT - 2ª FASE:** Na terra de π -raia, um observador registrou que um cometa X e um cometa Y poderiam ser vistos a cada período de 76 e y anos, respectivamente. Sabendo que este ano os dois cometas foram vistos juntos, e que a próxima vez que eles serão vistos juntos novamente ocorre daqui a 684 anos, responda os seguintes itens.

- (a) Quantas vezes os cometas serão vistos juntos durante os próximos 13.000 anos?
- (b) Determine todos os possíveis valores para y .

D. Equações Diofantinas

Atividade Motivacional 01

Escova Diofantina



Figura 4.4: Cartas Escova Diofantina - Frente

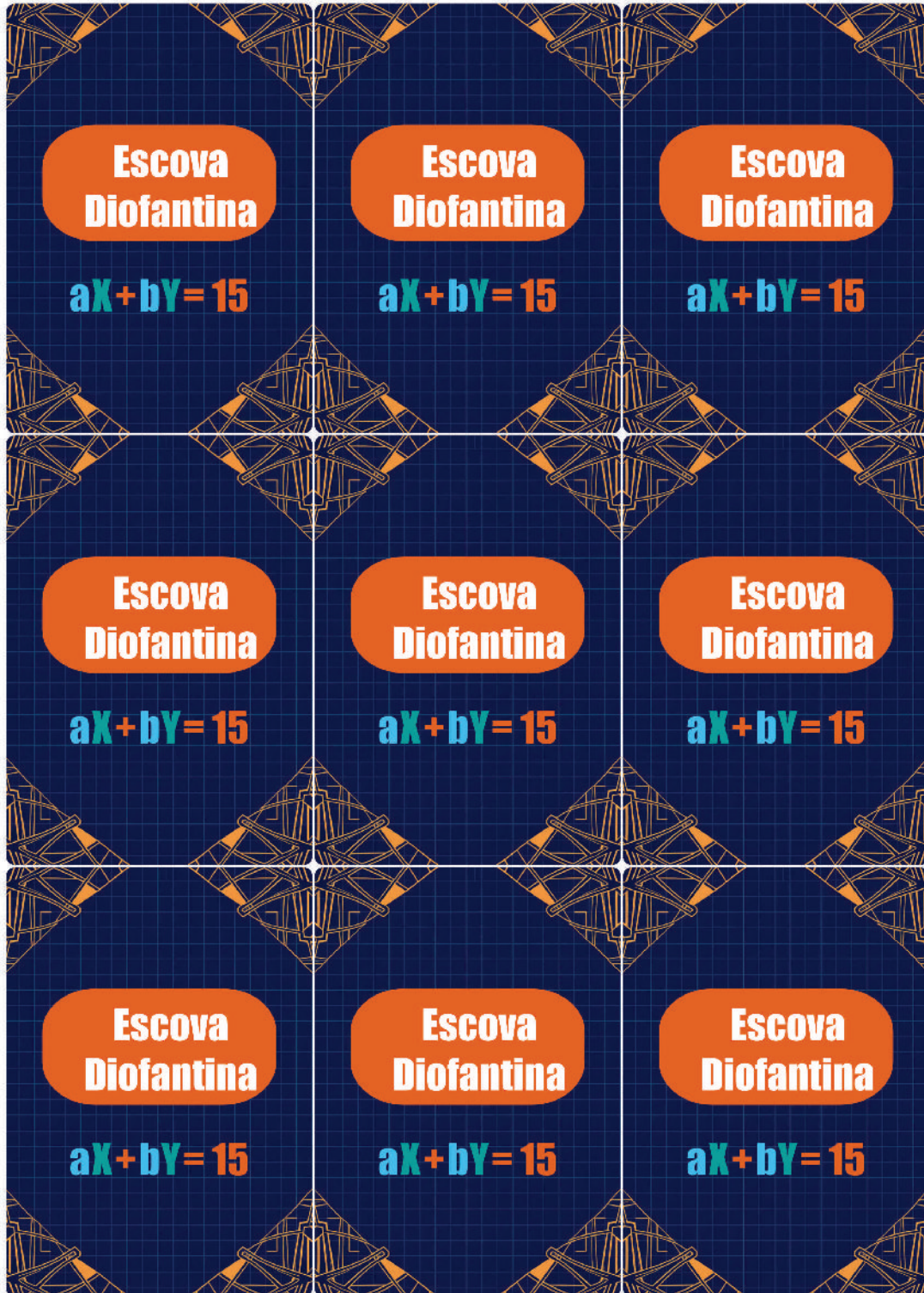


Figura 4.5: Cartas Escova Diofantina - Verso

CAPÍTULO 4

Atividade Motivacional 02

Equações Diofantinas

Um caixa eletrônico só dispõe de cédulas de 20 e 50 reais. De quantas formas é possível sacar exatamente R\$ 500,00? Modele a situação com uma equação diofantina e determine todas as soluções inteiras não negativas.

Questões Olímpicas - Encontro 04

Equações Diofantinas

- OBMEP - 1ª FASE:** Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?
 - 5
 - 7
 - 14
 - 20
 - 31
- OBMEP - 1ª FASE:** De quantas maneiras podemos trocar uma nota de R\$ 20,00 por moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,25?
 - 21
 - 36
 - 38
 - 41
 - 56
- TM² - 1ª FASE:** Beatriz tem em seu bolso 33 moedas, algumas de 25 centavos e outras de 10 centavos. Sabendo que Luize tem ao todo uma quantidade inteira de reais, quantas moedas de 25 centavos ela possui?
 - 16
 - 17
 - 18
 - 19
 - Não é possível determinar.

CAPÍTULO 4

E. Números Primos

Atividade Motivacional 01

Números Primos

Questões Investigativas:

- Quais números primos você lembra facilmente?
- Como verificar se números como 91 ou 97 são primos?

Números Primos

Crivo de Eratóstenes

Siga os passos abaixo para descobrir os números primos de 2 a 100:

- Comece com o menor número primo: 2. Risque todos os múltiplos de 2, exceto o próprio 2.
- Passe para o próximo número que ainda não foi riscado. Risque todos os múltiplos deste número, exceto o próprio número.
- Repita o processo com o próximo número não riscado e assim por diante, até completar todos os números na tabela.
- Os números que permanecerem sem riscar são os números primos entre 1 e 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

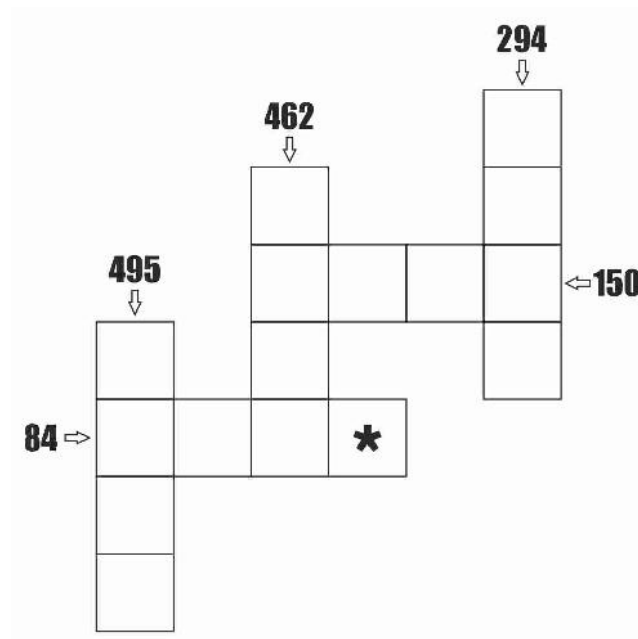
Números primos obtidos: _____

Questões Olímpicas - Encontro 05

Números Primos

CAPÍTULO 4

1. **OBMEP - 1ª FASE:** As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?



- A) 2
 B) 3
 C) 5
 D) 7
 E) 11
2. **OBMEP - 1ª FASE:** Mariana escreveu as decomposições em fatores primos dos números naturais de 2 a 100:

$$2, 3, 2 \times 2, 5, 2 \times 3, \dots, 3 \times 3 \times 11, 2 \times 2 \times 5 \times 5.$$

Quantas vezes ela escreveu o algarismo 2?

- A) 99
 B) 104
 C) 152
 D) 188
 E) 191
3. **OPEMAT - 1ª FASE:** Seja n um número inteiro positivo. Defina o número n^* por

$$n^* = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

CAPÍTULO 4

Por exemplo,

$$6^* = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Dentre as alternativas abaixo, podemos concluir que o número de divisores primos distintos do número 21^* é:

- A) 2
 - B) 8
 - C) 10
 - D) 11
 - E) 21
4. **TM² - 1ª FASE:** Seja n o menor natural que possui exatamente 35 divisores positivos. Determine a quantidade de divisores positivos de $n - 1$.
- A) 2
 - B) 4
 - C) 7
 - D) 12
 - E) 14

F. Congruência

Atividade Motivacional 01 - Formação de Grupos

Congruência

Os estudantes serão recebidos com um bombom, ao qual estará associado um número. Esse número será utilizado na dinâmica inicial da aula, visando acolher os alunos e introduzir o conceito de congruência modular de forma lúdica.

1. O professor determina, na sala, regiões que representarão os restos de 0 até 5.
2. Cada estudante realiza mentalmente a divisão de seu número por 6, identifica o resto e se posiciona na região correspondente, observando os colegas próximos.
3. Repita o procedimento com divisores 5 e 4, reorganizando os grupos de acordo com os restos.
4. Após a última divisão, cada grupo ficará formado e será a base para o trabalho colaborativo.
5. Cada grupo receberá uma questão diferente relacionada ao tema de congruência modular.
6. Os integrantes do grupo sortearão funções: facilitador, harmonizador, monitor de recursos, repórter e controlador do tempo.

CAPÍTULO 4

Essa dinâmica permite perceber como pequenas alterações no divisor influenciam a composição dos grupos, evidenciando padrões nos números e introduzindo a ideia de congruência modular de forma significativa.

Papel dos Estudantes na Formação dos Grupos

Congruência

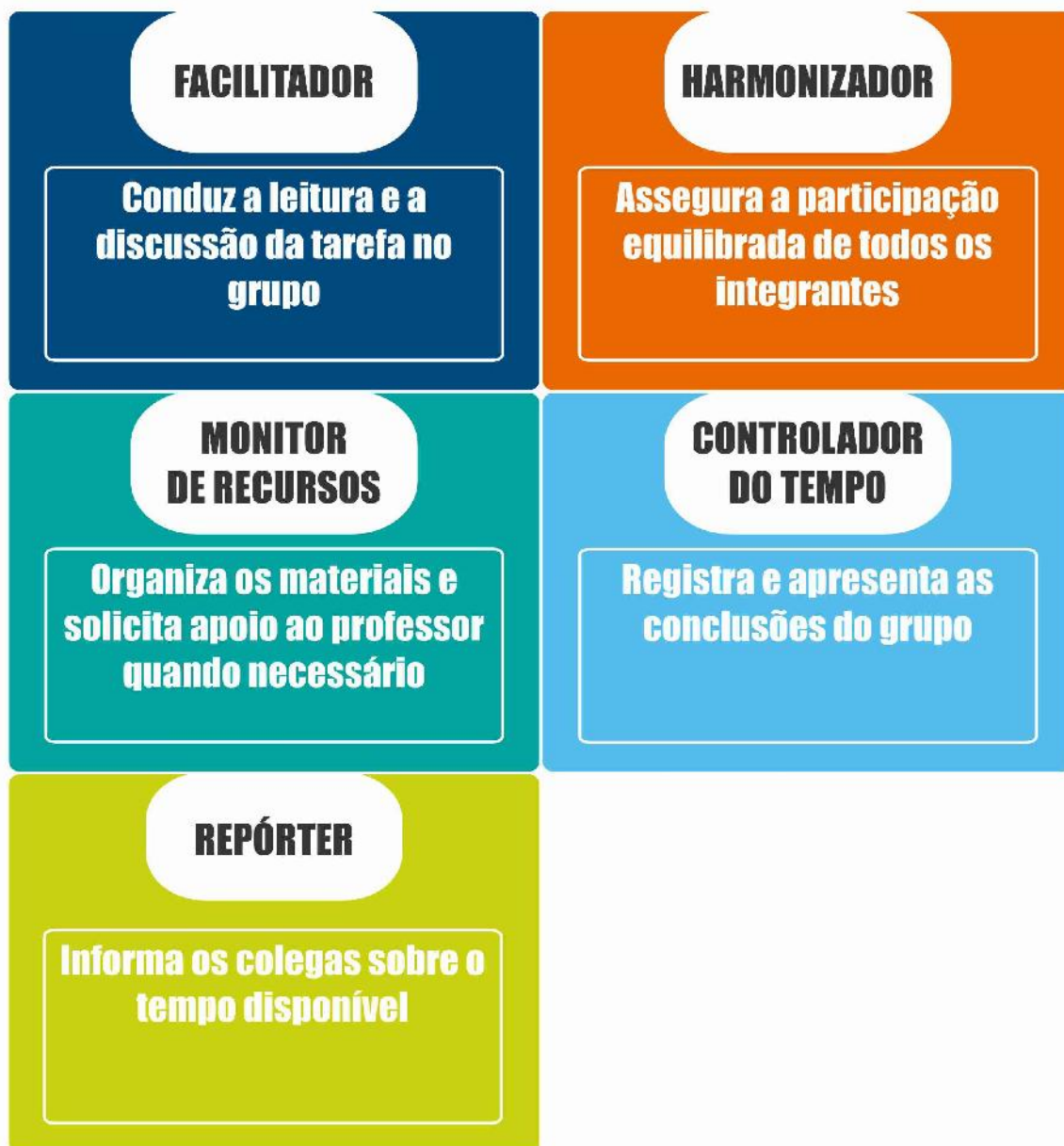


Figura 4.6: Distribuição dos papéis.

CAPÍTULO 4

Questões Olímpicas - Encontro 06

Congruência

1. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o resto da divisão de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 2011 + 21$ por 8?

- A) 2
- B) 3
- C) 5
- D) 6
- E) 7

2. **OBMEP - 1ª FASE:** Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \dots + \underbrace{777\dots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\dots777}_{\text{setenta e sete setes}} ?$$

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9

3. **OPEMAT - 1ª FASE:** O cadastro de pessoa física (CPF) é um documento de identificação usado pela receita federal que consiste de onze dígitos sendo os nove primeiros fornecidos pela receita federal e os dois últimos, chamados dígitos verificadores, calculados da seguinte forma: se $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9$ são os nove primeiros dígitos do CPF fornecido, então calculamos

$$A = 10d_1 + 9d_2 + 8d_3 + 7d_4 + 6d_5 + 5d_6 + 4d_7 + 3d_8 + 2d_9,$$

e calculamos r , onde r é o resto da divisão de A por 11. Se o resto for 0 ou 1 então o décimo dígito d_{10} será 0. Caso contrário d_{10} será $11 - r$. Para calcular o décimo primeiro dígito, calculamos

$$B = 10d_2 + 9d_3 + 8d_4 + 7d_5 + 6d_6 + 5d_7 + 4d_8 + 3d_9 + 2d_{10},$$

e calculamos R , onde R é o resto da divisão de B por 11. Se $R = 0$ ou $R = 1$ então $d_{11} = 0$. Caso contrário, $d_{11} = 11 - R$. Se uma pessoa tem os nove primeiros dígitos de seu CPF dados por 299792458, os dígitos d_{10} e d_{11} são respectivamente:

- A) 1 e 8
- B) 0 e 7
- C) 2 e 6

CAPÍTULO 4

D) 0 e 8

E) 3 e 5

4. **OPEMAT - 1ª FASE:** Uma determinada loja de livros de matemática resolveu fazer uma promoção que proporcionava 35% de desconto nos livros. Para obter o desconto, os clientes precisavam usar um cupom com um número de seis dígitos dado por $80AB35$ que é múltiplo de 99, e assim precisavam descobrir os valores de A e B . Assinale a alternativa abaixo que contém um possível valor de A .

A) 2

B) 5

C) 7

D) 8

E) 9

G. Teorema Chinês dos Restos

Atividade Motivacional 01 - Desafio do número secreto

Teorema Chinês dos Restos

Pense em um número natural menor que 30.

Divida esse número por 3 e por 5, anotando apenas os restos.

Informe os restos ao professor e à turma.

O desafio consiste em adivinhar o número escolhido a partir dessas informações.

Questões Olímpicas - Encontro 07

Teorema Chinês dos Restos

1. **OPEMAT – 2ª FASE:** Um general deseja verificar o número de soldados em um de seus pelotões. Então, mandou que os soldados formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 2 soldados. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 11 em 11 e verificou que sobraram 4. Finalmente, fez os soldados se alinharem de 13 em 13 e sobraram 8. Sabendo que o pelotão tem entre dois mil e três mil soldados, determine quantos soldados sobraram quando o general os mandou formar de 100 em 100.
2. **ENQ:** A Secretaria de Educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividí-los entre 7 escolas, sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Encontre a quantidade de livros.
3. **ENQ:** Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram 1, 2, 3 e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?

Avaliação Final dos Encontros

Roda de Conversa

- Qual conteúdo ou atividade você considerou mais interessante ou marcante durante o minicurso?
- Quais estratégias de resolução foram mais fáceis de compreender e aplicar?
- Quais conteúdos ou atividades apresentaram maior dificuldade?
- De que forma essa experiência pode contribuir para sua preparação para as Olimpíadas de Matemática?
- Como você se sentiria diante de problemas semelhantes em provas olímpicas?
- Quais habilidades você acredita ter desenvolvido ao longo dos encontros: lógica, criatividade, percepção de padrões, argumentação matemática, comunicação matemática ou outras?

5

Problemas olímpicos e letramento matemático: contribuições da Teoria dos Grafos em uma sequência didática no 9º ano

Mariana Pereira Franco ¹
Karla Ferreira Sousa de Arruda ²

Esta proposta apresenta uma sequência didática destinada a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, orientada pela resolução de problemas e pela modelagem matemática para a consolidação do letramento matemático. A sequência utiliza a Teoria dos Grafos como recurso de representação e modelagem para tornar explícitas as relações entre dados e condições de situações-problema e, com isso, favorecer a tomada de decisão e a argumentação matemática, especialmente em problemas de competições matemáticas. A justificativa apoia-se nas demandas curriculares relacionadas a raciocinar, representar, comunicar e argumentar, bem como na necessidade de fortalecer aprendizagens no ano de conclusão do Ensino Fundamental, em diálogo com avaliações externas e com práticas de enfrentamento de desafios matemáticos. A proposta aborda registros variados (linguagem natural, esquemas e grafos) e prevê momentos de discussão e validação de estratégias, sem antecipar uma formalização axiomática, mas garantindo precisão conceitual compatível com o nível escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) atribui ao Ensino Fundamental o compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático*, entendido como o conjunto de competências e habilidades relacionadas a raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, favorecendo a formulação de conjecturas e a resolução de problemas em diferentes contextos (BRASIL, 2018). Nessa perspectiva, a

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), mariana.p.franco@outlook.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), karla.arruda@ufrpe.br

CAPÍTULO 5

aprendizagem matemática não se restringe à reprodução e operacionalização de procedimentos, mas exige a mobilização de saberes associados à interpretação de situações-problema, seleção das informações relevantes e argumentação coerente quanto a tomada de decisões e as resoluções propostas.

Nesse cenário, as competições matemáticas, em especial as olimpíadas científicas, têm sido reconhecidas como espaços formativos relevantes, capazes de estimular o raciocínio lógico, a autonomia intelectual e o enfrentamento de problemas não rotineiros (OBMEP, 2025). Além disso, no 9º ano se intensifica a necessidade de recomposição de aprendizagens e de retomada de conteúdos anteriores devido a natureza dos problemas propostos em avaliações externas, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE).

Portanto, evidencia-se a necessidade de abordar temas por meio de metodologias que estimulem a familiarização com problemas de natureza distinta (como os de avaliações externas e competições matemáticas) em consonância com a recomposição de aprendizado dos conteúdos do Ensino Fundamental. Associada ao ato de planejar e investigar, destaca-se a resolução de problemas que, segundo Polya (1995 apud pontes), requer duas etapas iniciais cruciais, norteadas pelo questionamento “O que é necessário para resolvê-lo?!” , seguido de “Esse problema é conhecido? Quais estratégias devemos usar para sua resolução?”. Nesse contexto, ao ampliar o leque de estratégias com que o estudante é familiarizado e tem o domínio, aumenta-se também a possibilidade de resolução do problema. Em especial, a partir da variedade de problemas que o professor propõe aos estudantes, eles amplificam e aprimoram o que seriam os problemas conhecidos a partir dos modelos construídos previamente.

Mais ainda, além de aprimorar a consolidação de estratégias e de conhecimentos prévios, a resolução de problemas pode ser utilizada para introduzir novos conceitos e conteúdos, uma vez que “o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo coconstrutores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo” (ONUICHIC; ALLEVATO, 2011).

Assim, propomos o uso desta metodologia para apresentar problemas que envolvam a Teoria dos Grafos, que é o ramo da Matemática que estuda e modela as relações entre objetos, em que o grafo é o conjunto formado por vértices (ou nós), que representam os objetos, e arestas (ou arcos), que relacionam um par não ordenado de vértices. Isto ocorre pois “grafos são objetos interessantes e frutíferos para se estudar. [...] Argumentos elementares sobre grafos nos aproximam de matemática mais séria” (Itenberg; Genkin; Fomin, 2012). Além disso, os problemas que os envolvem aparecem com recorrência em competições matemáticas nacionais e internacionais, sendo um dos temas do currículo olímpico (Nieto-Said; Sánchez-Lamoneda, 2022) cuja abordagem não precisa ocorrer de forma teórica aprofundada, uma vez que

Os problemas relacionados aos grafos são postos geralmente em linguagem natural (por exemplo: ilhas conectadas por pontes, cidades conectadas por rodovias, etc.), sem o uso de terminologia teórica de grafos. No entanto, o conhecimento básico sobre grafos facilita a compreensão da estrutura destes problemas e do processo de resolução. (NIETO-SAID; SÁNCHEZ-LAMONEDA, 2022, tradução nossa).

Ressaltamos que os grafos não estão presentes no currículo escolar por meio de habilidades da BNCC, porém a abordagem deste conteúdo está atrelada ao desenvolvimento do pensamento computacional e do letramento matemático ao utilizar-se de metodologias como a modelagem matemática e a resolução de problemas que são “formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental” (BNCC). Além disso, a teoria de grafos nos permite modelar diversos problemas, como os que envolvem redução de custos,

CAPÍTULO 5

caminho ótimo ou coloração de mapas, que são de grande relevância no contexto acadêmico e industrial. Neste trabalho, focamos no uso dos grafos como um recurso estratégico para o desenvolvimento do pensamento combinatório, do letramento matemático, e para a resolução de problemas olímpicos, que exigem a seleção de informações e a identificação de relações cruciais para a solução e escrita da justificativa.

Esta sequência didática é voltada para turmas do 9º ano, visando o fortalecimento da leitura, interpretação e argumentação matemática, articulando resolução de problemas e modelagem matemática. Como eixo de representação, mobiliza-se a Teoria dos Grafos principalmente como forma de tornar visíveis as relações entre elementos do problema, por meio de vértices e arestas, sem priorizar uma formalização axiomática precoce, mas explorando múltiplos registros de representação para apoiar a compreensão e a justificativa. Ao aproximar estudantes de problemas de perfil olímpico e de situações de otimização e coloração, a proposta busca promover práticas de letramento matemático nas quais compreender, representar e argumentar sejam dimensões centrais do aprender Matemática. Dessa forma, pretende-se contribuir para uma aprendizagem mais significativa, alinhada tanto às orientações curriculares nacionais quanto às demandas evidenciadas por avaliações externas e competições matemáticas.

5.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

Essa proposta tem como metodologias a resolução de problemas e a modelagem matemática e foi planejada para turmas do 9º ano do Ensino Fundamental com necessidade de recomposição de aprendizagens e fortalecimento de leitura, interpretação e argumentação matemática. Nesse sentido, a sequência didática é desenvolvida a partir de problemas olímpicos a fim de aproximar os estudantes dos conteúdos do currículo próprio das competições matemáticas, especialmente a Teoria dos Grafos, enquanto possibilita a recomposição de aprendizado das habilidades relevantes do ensino fundamental abordadas em avaliações externas.

Deste modo, conteúdos que são comuns nas avaliações externas e cuja retomada se faz necessária na etapa de conclusão do ensino fundamental podem ser mobilizados ao resolver os problemas. Destacamos os que envolvem as operações com números naturais, inteiros e racionais, bem como as classificações e propriedades de polígonos, porém, esse recorte pode ser ampliado de acordo com o perfil da turma.

Por outro lado, os grafos são estruturas combinatórias importantes tanto na própria Análise Combinatória, quanto em outros ramos da matemática, tendo grande aplicação e relevância no ramo da tecnologia, especialmente na programação. Para a elaboração das listas foram utilizados materiais importantes da literatura, como (Bondy; Murty, 1976) e (Diestel, 2022), mas também obras que estão disponíveis gratuitamente na internet que tratam de grafos em contexto olímpico, como (Benevides, 2019a) e (Benevides, 2019b), obras que recomendamos a leitura em caso de dúvidas e para o aprofundamento.

O uso de grafos em olimpíadas está principalmente atrelado ao modo de representação de informações, isto é, da sua representação visual formada por vértices e arestas. Usualmente, os vértices representam as informações que queremos relacionar e as relações estabelecidas são as arestas. As arestas podem ser valoradas (como nos problemas 1 e 2 da lista inicial) ou não.

Ademais, a introdução da Teoria de Grafos nessa proposta não visa a formalização axiomática precoce, mas o desenvolvimento da capacidade de modelagem matemática aliada ao aprimoramento da leitura e interpretação de problemas. O propósito da abordagem dos grafos deve ser a representação das relações

CAPÍTULO 5

estabelecidas entre os elementos dos problemas por meio de estruturas de vértices e arestas. Incentiva-se a exploração de múltiplos registros de representação — incluindo diagramas e listas de adjacência — para que o estudante perceba, de forma intuitiva, o conceito de isomorfismo, isto é, a compreensão de que diferentes representações visuais podem equivaler a mesma estrutura lógica de relações. Essa abordagem fundamenta-se nos referenciais teóricos de Jurkiewicz (2009) e nos materiais didáticos do Portal da Matemática da OBMEP, que privilegiam a resolução dos problemas olímpicos.

A condução das atividades deve alternar entre três modalidades: a individual, para incentivar a autonomia na interpretação do enunciado e na proposição de soluções; a discussão coletiva mediada, para a validação do conhecimento e das estratégias; e o trabalho em duplas, que favorece a socialização de estratégias e a discussão para a tomada de decisão. É fundamental que o docente explicita, desde o início, os critérios avaliativos que serão utilizados ao analisar as respostas. A avaliação não deve se restringir ao resultado final, mas sim valorizar a clareza, o uso diversificado de representações e a coerência da justificativa apresentada, compreendendo o erro como parte integrante do processo de aprendizagem.

Ao longo de todas as etapas, o docente deve atuar como um observador atento, registrando evidências qualitativas que permitam mapear o progresso do discente. Na Avaliação Diagnóstica, o foco é identificar os conhecimentos prévios, os conteúdos prioritários para a recomposição de aprendizagem e os possíveis obstáculos na leitura e interpretação de enunciados. Durante a Avaliação Formativa, deve-se monitorar a evolução das formas de argumentação e a progressiva apropriação dos grafos como ferramenta de resolução. Na Avaliação Somativa, a análise deve ser comparativa entre a produção inicial e a final, buscando evidências de avanço conceitual e amadurecimento das estratégias de resolução e argumentação. Recomenda-se o registro sistemático de pontos de bloqueio e tipos de erro, fornecendo subsídios para intervenções pontuais e planejamentos de retomada.

Se necessário, algumas adaptações podem ser feitas ao longo da sequência didática para promover a participação dos discentes. A quantidade de problemas pode ser reduzida, mantendo-se a estrutura das listas e variando apenas a quantidade de itens. É possível oferecer apoio na leitura para estudantes que apresentem dificuldades, evidenciando as restrições do enunciado e o objetivo do problema, além de permitir múltiplos meios de expressão (desenhos, tabelas ou esquemas gráficos) para a resolução. No entanto, é imprescindível que seja mantida a exigência da justificativa, ainda que sejam aceitos diferentes níveis de formalização linguística e matemática.

Assim, cabe ao docente o papel de mediador quanto a provocação de explicitações (“como você pensou?”), validação de estratégias diversas e orientação da turma quanto ao registro do raciocínio e argumentações associadas à resolução dos problemas. Destaca-se a importância de diferenciar o apoio à compreensão do enunciado (permitido e necessário) da antecipação de solução e proposição de estratégias para resolução.

5.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

CAPÍTULO 5

CONTEÚDOS ABORDADOS

- **Recomposição de aprendizagem:**

- Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados;
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais;
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais;
- Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações;
- Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações;

- **Teoria de Grafos e Modelagem:**

- Definição, elementos (vértices e arestas) e representações diagramáticas de grafos;
- Aplicações da Teoria de Grafos em situações-problema reais (redes, conexões e caminhos);
- Coloração de grafos: conceitos de adjacência e otimização aplicados à resolução de problemas.

- **Análise Combinatória:**

- O Princípio Multiplicativo da contagem aplicado à determinação de caminhos e possibilidades em estruturas de redes.

TEMA

Análise combinatória, grafos, e problemas olímpicos.

JUSTIFICATIVA

A sequência didática justifica-se pela necessidade de fortalecer leitura, interpretação e escolha de estratégias na resolução de problemas matemáticos, especialmente no 9º ano e no contexto de avaliações externas. Propõe-se o uso de problemas combinatórios e a modelagem por grafos como recurso para explicitar relações entre informações do enunciado e orientar o planejamento de estratégias de resolução. Ao representar objetos como vértices e suas relações como arestas, os estudantes são levados a selecionar dados relevantes, organizar o raciocínio e comunicar procedimentos, o que pode favorecer a argumentação matemática e a recomposição de aprendizagens mobilizadas nas etapas da oficina.

COMPETÊNCIAS (BRASIL, 2018)

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

CAPÍTULO 5

- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

HABILIDADES

- **Habilidades BNCC (BRASIL, 2018)**
 - (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
 - (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
 - (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
 - (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
 - (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
 - (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
 - (EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
- **Habilidades relacionadas à Teoria de Grafos**
 - Definir e reconhecer grafos a partir de situações do cotidiano, identificando vértices, arestas e tipos básicos, e representando-os por diferentes registros (desenho, lista de arestas, lista de adjacência e matriz de adjacência), justificando a escolha da representação mais adequada ao problema;
 - Interpretar e analisar grafos em diferentes formas de representação, determinando propriedades como adjacência, grau de vértices, caminhos e conectividade, e utilizando essas informações para resolver e elaborar problemas de modelagem de redes;
 - Aplicar a coloração de vértices (e/ou arestas) em grafos para modelar e resolver problemas de restrição e alocação, determinando uma coloração válida, estimando ou calculando o número cromático em casos simples e argumentando sobre a correção e a eficiência da solução;
 - Investigar e comparar estratégias de coloração, avaliando como a estratégia influencia a quantidade de cores e comunicando a solução com clareza, por meio de registros matemáticos e explicações.

CAPÍTULO 5

OBJETIVOS

- Identificar grafos em problemas olímpicos;
- Revisar operações com racionais;
- Diferenciar os polígonos de acordo com as suas propriedades;
- Comparar os elementos de um polígono e os elementos de um grafo;
- Escolher estratégias de resolução de problemas adequadas às problemáticas propostas;
- Relacionar as informações do problema por meio de vértices e arestas;
- Discutir soluções alternativas para os problemas;
- Aplicar as técnicas de resolução abordadas durante a oficina na resolução da lista final.

PÚBLICO-ALVO

Turma de 9º ano do Ensino Fundamental de escola pública com estudantes de 13 a 15 anos de idade.

PERFIL DAS TURMAS

Turmas concluintes do Ensino Fundamental II que necessitem recompor aprendizado e retomar os principais conteúdos por meio de resolução de problemas.

RECURSOS

Quadro; marcador para quadro branco ou giz; Listas de problemas: lista inicial, lista intermediária e lista final; projetor e slides.

PROCESSO AVALIATIVO

A avaliação da sequência didática dar-se-á de forma processual e contínua, valorizando a participação ativa do discente e a sua capacidade de mobilizar conhecimentos para a resolução de problemas, sendo organizada em:

- Avaliação diagnóstica: ocorrerá nos momentos iniciais da sequência visando identificar conhecimentos prévios e obstáculos conceituais. Serão considerados os questionamentos e dúvidas orais durante a resolução da atividade inicial, assim como a participação ativa na discussão sobre o contexto olímpico.
- Avaliação formativa: ocorrerá ao longo da oficina de resolução de problemas e das discussões coletivas, possibilitando o ajuste imediato das estratégias de ensino. Serão analisadas a participação ativa nas discussões coletivas; a interação durante a oficina; a resolução compartilhada de problemas, através de exposição oral ou resolução na lousa; além das resoluções propostas para a lista intermediária.

CAPÍTULO 5

- Avaliação somativa: ocorrerá por meio da análise das soluções descritas da lista final de problemas, verificando a consolidação das habilidades e a formalização dos conceitos trabalhados.

Na avaliação formativa e somativa, além do acerto e erro, serão considerados:

- (i) identificação do objetivo do problema;
- (ii) seleção e organização de informações relevantes do problema;
- (iii) adequação da estratégia de resolução à situação-problema (incluindo modelagem por grafos, quando pertinente);
- (iv) correção e ajustes do procedimento, quando necessário;
- (v) clareza, organização e fundamentação da justificativa e argumentos apresentados.

Esses critérios serão observados de forma transversal em todas as etapas da sequência didática e produções (listas inicial, intermediária e final), bem como na participação em discussões coletivas e apresentações no quadro.

5.3 MÓDULO I- PRIMEIRO CONTATO

5.3.1 Contextualização e motivação

Duração: 20 minutos

Objetivo: Neste primeiro momento da sequência, busca-se motivar os estudantes a participar em competições matemáticas e também estimular a participação ativa durante a sequência didática.

Descrição das atividades:

Inicialmente, os estudantes serão questionados:

1. Quais as suas principais dificuldades em avaliações e testes?
2. Como normalmente ocorre a sua preparação para uma avaliação?

A partir das respostas apresentadas, será enfatizada a importância da preparação para qualquer tipo de avaliação, seja durante a infância e adolescência, ainda no contexto escolar, ou ao longo da vida adulta, em cenários de competição, sejam elas esportivas ou relacionadas ao mundo do trabalho; especialmente nas seleções de ingresso: em uma universidade, curso técnico, cargo público ou empresa privada.

Será enfatizado que, no contexto da matemática, a maior parte dos estudantes brasileiros já participa anualmente da maior olimpíada estudantil do mundo em números de participantes, a Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas (OBMEP). Então as perguntas iniciais serão retomadas e complementadas com os questionamentos abaixo:

1. Quais as suas principais dificuldades na resolução da OBMEP?
2. Você costuma estudar e se preparar para a realização da OBMEP?

CAPÍTULO 5

3. Você já percebeu alguma diferença entre as questões da OBMEP e as questões abordadas nas avaliações internas institucionais?
4. Será que é possível estudar um conteúdo para a OBMEP e se preparar para as seleções e avaliações externas simultaneamente?

A partir das discussões acarretadas pelos questionamentos acima, será enfatizada a necessidade de preparação tanto para a OBMEP, quanto para olimpíadas regionais, avaliações externas e seleções de ingresso. Será destacado que a preparação aprofundada para um tipo de avaliação fortalece a preparação das demais.

Orientações ao professor:

Aproxime a discussão das experiências dos estudantes com avaliações e preparações para competições. Enseje a reflexão sobre quais as atitudes deles quando não compreendem inicialmente uma questão e sobre o impacto de avaliações e competições externas ao cotidiano da sala de aula.

Evidencie a importância das olimpíadas também no contexto local da instituição, abordando quais olimpíadas já são realizadas e quais olimpíadas regionais são relevantes, mas os estudantes ainda não participaram.

Enfatize exemplos do contexto local, como estudantes medalhistas do estado (ou cidade) e o impacto de bons resultados em olimpíadas na formação acadêmica, inclusive na possibilidade de participação em projetos como o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC Jr.) da OBMEP. Estes resultados podem ser consultados nos sites das Olimpíadas. ^a

Questione se os estudantes já haviam refletido sobre a importância da participação em olimpíadas e da preparação para realização das provas e os convide a uma nova reflexão. A partir dos pontos levantados, destaque as semelhanças e diferenças entre essa forma de avaliação, as avaliações internas institucionais e as provas de seleção externa. ^b

Evidencie que a preparação olímpica exige superar desafios e se aprofundar em temáticas muitas vezes não exploradas no cotidiano do contexto escolar, enquanto reforça os conteúdos matemáticos previstos e aprimora a leitura matemática, interpretação, organização de informações e resolução de problemas.

^aOs resultados da OBMEP e OPEMAT são públicos e podem ser consultados nos sites das Olimpíadas ((OBMEP, 2025), na aba de premiados, e (Olimpíada Pernambucana de Matemática – OPEMAT, 2025), na aba de resultados, respectivamente). No entanto, há olimpíadas, como a Mandacaru e Canguru, que divulgam o resultado apenas para os participantes.

^bCompetições matemática muitas vezes possuem um currículo próprio que não necessariamente converge com o currículo escolar. Em sua obra, Nieto-Said e Sánchez-Lamonedá (2022) evidenciam os temas importantes do currículo olímpico de Matemática, que incluem a Teoria de Grafos.

5.3.2 Produção inicial

Duração: 80 minutos

Objetivo: O objetivo deste momento é o aprofundamento sobre estratégias de resolução de problemas à luz da lista inicial, incluindo a resolução por tentativa e erro. Além disso, é relevante evidenciar como a escrita da justificativa da solução do problema corrobora com a compreensão das etapas e conceitos

CAPÍTULO 5

atrelados a cada problema, além de aproximar o estudante da argumentação matemática.

Descrição das atividades:

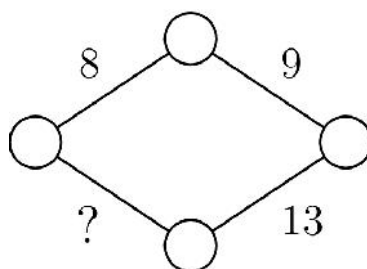
Nesta etapa, será dada ênfase à resolução individual da lista inicial de problemas, em que:

1. Cada estudante receberá uma lista inicial de problemas;
2. O estudante deverá, dentro do tempo estimado, ler e identificar o objetivo de todos os problemas, além de resolver o maior número possível de problemas com justificativa;
3. Vinte minutos após a entrega da lista, o docente iniciará um diálogo com a turma para compreender as possíveis dúvidas e dificuldades, enquanto eles darão continuidade à resolução dos problemas;
4. Após trinta minutos do início da aplicação, o docente falará especificamente sobre o problema 5 da lista, conforme descrito nas orientações ao professor.

Ao final da aplicação, a importância da leitura e da interpretação na Matemática deve ser ressaltada, assim como o (re)conhecimento de ferramentas e estratégias que auxiliam na resolução coerente e prática de problemas. Além disso, será salientado que essa é a atividade inicial, cujo intuito é a compreensão de quais estratégias os estudantes utilizaram e o mapeamento das dúvidas mais recorrentes.

5.3.3 Lista inicial de problemas

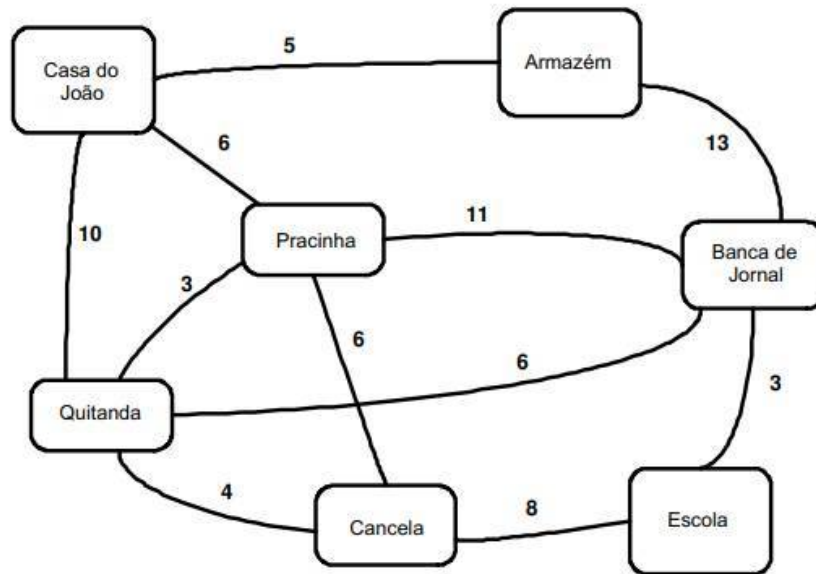
1. **(CANGURU – 2023 – Nível C)** Válder quer escrever um número em cada vértice e em cada lado do losango mostrado. Ele quer que a soma dos números escritos nos vértices de cada lado seja igual ao número escrito nesse lado. Qual número ele deve escrever no lugar do ponto de interrogação?



- (a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

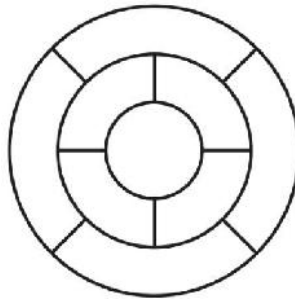
2. **(JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA)** Com base na representação abaixo, em que os números representam a distância entre os locais, em metros, responda:

CAPÍTULO 5



- Qual o menor caminho da casa de João até a escola? Por quê?
- Represente esse caminho.
- Qual o maior caminho da casa de João até a escola? Represente esse caminho.

3. **(OBMEP – 2024 – Nível 1 – 1ª fase)** Felipe vai colorir a figura de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. Qual é o menor número de cores que ele deve usar?



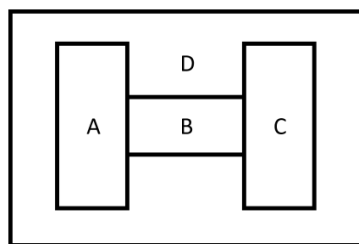
- (a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) 5

4. **(OPEMAT – 2022 – Nível 2 – 1ª fase)** Bernardo quer pintar a figura abaixo com tintas nas cores vermelho, azul, verde, preto e amarelo, considerando as seguintes restrições:

- Cada região A, B, C e D da figura deve ser pintada inteiramente com a mesma cor;
- Duas regiões adjacentes, ou seja, regiões que fazem fronteira (C e B, por exemplo), devem ter cores diferentes.

De quantas maneiras Bernardo pode pintar a figura?

CAPÍTULO 5



- a) 120 b) 180 c) 240 d) 320 e) 625

5. **(JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA)** Uma escola quer definir o número mínimo de horários necessários para aplicação de provas a fim de reduzir os custos no final do ano letivo. A tabela mostra a alocação de alunos (identificados pelo número na chamada) nos exames finais que devem prestar.

Se as disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns, responda:

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X							X	
Português	X			X								X				X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X				X		X
Física			X		X						X		X			
Química		X						X	X					X		
Biologia		X				X					X	X				

- a) A prova de matemática não poderá ser realizada ao mesmo tempo que quais disciplinas?
 b) Quantos horários, no mínimo, a escola deve disponibilizar? Por quê?

Orientações ao professor

Os estudantes podem ter certa resistência e dificuldade inicial para a realização da atividade, tanto no que tange à interpretação dos problemas, quanto à resolução de forma coerente e com argumentação das etapas realizadas. Enfatize que é importante que eles escrevam como obtiveram a resposta, ainda que por chute ou tentativa e erro. Dê exemplos de possíveis registros, mesmo para as questões que eles não conseguirem obter o resultado final, em que é válida a anotação das dúvidas ou entraves, ou ainda, a escrita “ não entendi a pergunta”.

Dialogue com os estudantes de modo a compreender, oralmente, os principais pontos de entrave e as dificuldades e, se possível, tome nota das dúvidas mais frequentes.

Auxilie na compreensão do enunciado, especialmente quando uma parte considerável da turma não conseguir identificar o objetivo. Para isto, reformule o enunciado ou faça perguntas como “o que esta informação significa?” e “quais as restrições do problema? O que não pode ocorrer”.

Nesta etapa, não sane dúvidas conceituais, como, por exemplo, losango e vértice; mas registre-as, pois elas serão importantes para suscitar a recomposição da aprendizagem. A saber: a dúvida sobre o que é um losango pode conduzir, posteriormente, à classificação de polígonos e, em especial, de quadriláteros e das suas propriedades.

CAPÍTULO 5

Na resolução da questão 2, no item b), evidencie que os estudantes podem representar o caminho da forma que lhe for mais conveniente, mas preservando as informações desse caminho. Nessa etapa, o importante é que os estudantes associem à noção de caminho do contexto extra-escolar à resolução do problema e não necessariamente saibam aplicar a definição de caminho segundo a Teoria de Grafos nesse contexto.

O enunciado do problema 5 tem como base uma tabela em que cada número representa um estudante e o X marca as disciplinas que eles terão de fazer prova, isto é, a incompatibilidade de horários. Os discentes podem ter dificuldades com a interpretação desta representação por não a considerarem intuitiva, mas ela suscita a recomposição de muitos conteúdos a posteriori, para além de sua interpretação.

Destaque, portanto, que a frase “Se duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns” remete à noção de que um aluno não conseguirá estar em duas salas diferentes ao mesmo tempo e, portanto, as provas precisarão ser realizadas em horários diferentes caso haja pelo menos um aluno que precise fazer as duas provas (como é o caso de Português e Matemática devido ao aluno 1). Desse modo, a partir do exemplo da interpretação da informação de um dado da tabela, os estudantes poderão generalizar para as demais informações apresentadas. O intuito do problema é (re)conhecer uma estratégia de resolução de problemas quando muitas informações são apresentadas e estão relacionadas.

Não analise apenas quanto o estudante acertou, mas como ele acertou ou errou. O estudante não entendeu o enunciado? Ele realizou alguma operação incorretamente? O estudante não lembra o que é um losango? Ele acertou, mas não sabe explicar como chegou à resposta? Esses são questionamentos pertinentes a essa etapa, pois conduzem aos pontos que precisam ser aprimorados pela turma e serão abordados nas etapas seguintes.

Por fim, evidencie para os estudantes que este foi o primeiro momento de uma sequência didática; portanto, o mais importante nessa atividade inicial é entender os erros comuns e as dúvidas para reforçar o aprendizado ao longo das aulas seguintes.

5.4 MÓDULO II - OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

5.4.1 Resolução conjunta da lista inicial

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- Revisar operações com racionais;
- Diferenciar os polígonos de acordo com as suas propriedades;
- Comparar os elementos de um polígono e os elementos de um grafo;
- Escolher estratégias de resolução de problemas adequadas às problemáticas propostas.

CAPÍTULO 5

Descrição das atividades:

As questões serão resolvidas enfatizando os conteúdos associados a elas, por parte do docente, e as estratégias utilizadas para resolução, por meio da participação discente. Assim, é esse momento da oficina que será dada ênfase às principais dúvidas acerca dos conteúdos, tanto de Geometria, quanto de Números e operações.

Na resolução da questão 1, destaca-se a definição de vértices e losango para recompor a aprendizagem no que tange aos poliedros, polígonos, e, em especial, classificação e propriedades de quadriláteros.

Na questão 2, destacam-se as operações com naturais em que o docente pode apresentar questão semelhante em que as arestas apresentam decimais, inteiros, frações e até raízes exatas e aproximadas. De modo análogo, o docente evidenciará em cada questão os conteúdos que os estudantes demonstraram dificuldades durante a etapa de resolução da lista inicial. Convidando também os estudantes que se dispuserem a apresentar a sua estratégia e resolução do problema.

Orientações ao professor

Estimule a reflexão sobre a resolução de problemas e a importância da tomada de decisão. Para isso, siga um roteiro na resolução de todas as questões:

1. Qual o objetivo do problema? O que está sendo pedido?
2. Quais as informações relevantes? O que não importa e podemos descartar?
3. Como podemos relacionar e representar as informações relevantes?
4. Como as informações nos auxiliam a atingir o objetivo?
5. Como justificar a resposta?

Será durante esse momento da sequência didática que as recomposições de aprendizagem terão destaque. Ajuste a resolução dos problemas para os pontos em que os estudantes apresentaram a maior dificuldade. Questione o porquê da solução, como eles chegaram até ela, os conteúdos atrelados ao problema e se, em algum momento, eles já estudaram o conteúdo.

Devolva a atividade corrigida para os estudantes e permita que eles, caso queiram, comparem com os colegas e compartilhem as estratégias e erros. Enfatize os erros comuns, as prováveis causas e como evitá-los, especialmente os erros operacionais e conceituais.

Convide ao quadro estudantes que acertaram a primeira questão para que eles apresentem como resolveram o problema e, em seguida, aprimore as soluções apresentadas e apresente soluções novas, como a solução por meio de sistema de equações. Dê destaque a justificativa e não apenas ao resultado final, questione como os estudantes chegaram à resposta e se haveriam outras estratégias plausíveis para o mesmo problema.

Complemente a resolução de cada questão com os conteúdos que os estudantes apresentaram dificuldades. Por fim, analise com a turma qual estratégia melhor se adequou a cada problema da lista.

CAPÍTULO 5

5.4.2 Introdução aos grafos

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- Entender o conceito de grafo e sua representação visual;
- Identificar elementos do grafo - vértices e arestas;
- Entender os conceitos de vizinhança e isomorfismo de grafos (ainda que não definidos formalmente);
- Reconhecer grafos em questões;
- Compreender a importância e o uso de grafos em contexto extraescolar.

Descrição das atividades:

A partir dos enunciados e das figuras da lista inicial, o docente incentivará reflexões sobre o uso e a estrutura de grafos tanto em problemas, quanto no dia-a-dia, por meio das etapas:

1. Questionamento sobre a definição de losango ser essencial para a resolução do problema 1;
2. Destaque que as informações utilizadas para a resolução do problema partiram da relação entre os vértices e que o valor não se referia à medida dos lados, mas à relação (de adição) entre os vértices (números dos vértices);
3. Explicação que em representações compostas por vértices e arestas, em especial, quando as arestas representam relações entre os vértices, essa representação tem nome: grafo;
4. Escrita de outros grafos no quadro e pedido para que os estudantes identifiquem os vértices, as arestas e quais vértices estão conectados. Explicação de que chamamos esses vértices de vizinhos;
5. Representação de um desses grafos de outro modo, preservando as relações e explicação que, embora pareçam distintos, as relações permaneceram, então poderiam representar o mesmo problema.

Para além das etapas supracitadas, o problema 2 será resolvido utilizando os conhecimentos de grafos, questionando “qual vértice dessa representação tem mais vizinhos?”, “Há vértices que não conseguimos evitar no caminho?”. Será destacada ao longo da resolução que o estudo do menor caminho do destino à chegada é um problema comum do dia-a-dia, em especial quando trata-se de aplicativos de geolocalização. Em geral, o menor caminho aborda problemas em que as arestas tem valores, isto é, o grafo é valorado. Portanto, nesses casos, não se busca o caminho com a menor quantidade de arestas, mas o caminho com a menor soma de valores das arestas.

Durante a finalização desse momento, será pedido que os estudantes analisem o restante da prova e pensem se e como seria possível representar as questões por meio de grafos.

CAPÍTULO 5

Orientações ao professor

Utilize o grafo para relacionar as informações dos problemas, evidenciando a relevância dessa etapa para a justificativa e obtenção da solução. Não apresente uma definição formal de grafos, o objetivo é que os estudantes compreendam os seus elementos (vértices e arestas) e como isso auxilia na visualização, interpretação e representação de problemas. Para isso, sempre questione o que seria representado pelos vértices e pelas arestas de cada problema.

É essencial que os estudantes compreendam que não há uma única forma de representar a questão por meio de grafos, isto é, que compreendam a ideia de isomorfismo de grafos, em que, preservadas as relações de vizinhança, as representações estão corretas, embora sejam visualmente distintas. Evidencie o isomorfismo para destacar que uma boa representação por meio de grafos pode auxiliar na resolução do problema.

Destaque situações do dia-a-dia e da sala de aula que poderiam ser representadas por grafos, como: amizades em rede social; a disposição dos estudantes na sala de aula; hierarquia em uma empresa; rotas traçadas por aplicativos de geolocalização.

Evidencie que o caminho de um grafo se assemelha à noção de caminho que já utilizamos: é necessário um vértice inicial - ponto de partida -, um vértice final (diferente do inicial) - chegada/destino - e todos os vértices precisam estar conectados sequencialmente por arestas.

A finalidade dessa etapa é a compreensão do grafo e entendimento do seu uso no dia-a-dia e na modelagem de questões e relações, especialmente por meio da modelagem das duas primeiras questões da lista inicial.

5.4.3 Coloração de grafos e questões de otimização

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- compreender a importância do número cromático para questões olímpicas (ainda que o conceito de número cromático não seja apresentado formalmente);
- reconhecer quando o problema é de coloração de grafos;
- modelar problemas por meio de grafos e colorir-los de forma ótima.

Descrição das atividades:

Para atingir os objetivos, esse momento será marcado pela resolução das últimas questões da lista inicial, dando ênfase ao não adiamento dos problemas, o que é usual em problemas combinatórios.

Nesse sentido, será apresentado que em problemas de coloração de mapas, usualmente as regiões são os vértices e as arestas conectam regiões vizinhas (por mais de um ponto). Assim, os estudantes seriam apresentados à estratégia de resolução do algoritmo guloso que consiste em:

1. identifique a região com maior número de vizinhos - chamemos de v ;
2. atribua uma cor para essa região;

CAPÍTULO 5

3. verifique se alguma região que pode ser colorida com a mesma cor v , em seguida:

- se houver uma única região ou as regiões que não são vizinhas de v (e poderiam ter a mesma cor de v) não são vizinhas entre si, então todas elas terão a mesma cor de v ;
- caso haja regiões que não são vizinhas de v , mas são vizinhas entre si, escolha a região com o maior número de vizinhos para ter a mesma cor de v .

4. Analise agora um vizinho de v e repita os passos anteriores.

Para além da apresentação da estratégia de resolução de problemas anteriores, será realizada a modelagem do problema 5 que consiste em considerar as disciplinas como vértices e traçar aresta entre vértices que são conectados por alunos. Isto é, se um aluno fará as provas das disciplinas, os vértices que representam as disciplinas são vizinhos.

Além disso, segundo essa modelagem por meio de grafos, devemos novamente identificar o número cromático do grafo, isto é, o menor número de cores necessárias para colorir o grafo de modo que os vizinhos não possuam a mesma cor.

A finalização desse momento será apresentando como a coloração de grafos permite compreender as relações, aparentemente complexas e com muitas informações, de forma objetiva e visual na resolução de problemas com conflitos.

Orientações ao professor

A coloração de grafos é recorrentemente cobrada em olimpíadas e a noção de vizinhança é essencial para a resolução desse tipo de problema. Assim, a representação por meio de grafos permite identificar a vizinhança por meio de arestas.

Há algumas estratégias para a resolução de problemas de coloração, porém destaca-se a estratégia em que se analisa inicialmente o vértice com maior grau, isto é, o vértice com maior número de vizinhos. A partir disto, identifica-se os vértices que não são vizinhos e, portanto, podem ser coloridos com a mesma cor. Ao adotar essa estratégia, abordamos inicialmente a coloração do vértice que seria “o maior problema”, pois haveria maior restrição de cores devido a quantidade de vizinhos, o que condiz com as estratégias comuns da Análise Combinatória de iniciar pelas restrições. No entanto, essa é uma estratégia de resolução e não a garantia de que obteremos a solução ótima.

Dessa forma, problemas de coloração de vértices, em geral, são problemas de otimização em que buscamos a maior quantidade de formas que um mapa pode ser colorido, ou ainda, qual o menor número de cores necessárias para realizar a pintura (isto é, o valor de $\chi(G)$: o número cromático do grafo).

Além da coloração de mapas, a coloração de vértices tem aplicações no estudo de compatibilidade de espécies, na alocação de restaurantes em uma praça de alimentação e no problema da grade de horário, como abordado no problema 5.

Evidencie a contribuição da modelagem do problema 5 por meio de grafos, em que os vértices representam as disciplinas e as arestas representam os conflitos entre as disciplinas (há estudantes que farão as provas das duas disciplinas). Nesse caso, a coloração de vértices do grafo representa a atribuição dos horários e o problema reduz-se ao questionamento: qual o número cromático do

CAPÍTULO 5

grafo? Ou ainda, qual o menor número de cores necessárias para colorir o mapa?

5.4.4 Atividade complementar em dupla (Lista intermediária)

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- identificar grafos em problemas;
- reconhecer a estrutura do grafo;
- escolher estratégias de resolução de problemas adequadas às problemáticas propostas;
- relacionar as informações do problema por meio de vértices e arestas;
- discutir soluções alternativas para os problemas.

Descrição das atividades:

Este é o momento de aplicação da lista de consolidação dos conhecimentos abordados nas atividades anteriores. Os estudantes estarão organizados em duplas para suscitar o debate, a discussão de estratégias e a colaboração na interpretação dos problemas e resolução dos problemas, sem intervenção conceitual por parte do docente.

Lista intermediária de problemas

1. O que é grafo? Exemplifique.
2. Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora:
 - 6A jogou com 7A, 7B, 8B
 - 6B jogou com 7A, 8A, 8B
 - 7A jogou com 6A, 6B
 - 7B jogou com 6A, 8A, 8B
 - 8A jogou com 6B, 7B, 8B
 - 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A

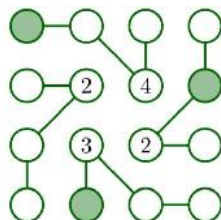
Uma maneira de representar a situação é através de uma figura.

- a) Faça essa representação.
- b) Quais são os vértices do grafo?
- c) O que as arestas representam?
- d) Todos os times jogaram entre si? Justifique.

CAPÍTULO 5

3. **(Mandacaru – 2024 – Zumbi dos Palmares)** Em cada um dos círculos deve ser escrito um dos números 1, 2, 3 ou 4, de forma que em cada linha, em cada coluna e em cada quatro círculos unidos por segmentos, os números sejam diferentes.

Calcule a soma dos números que devem ser escritos nos três círculos pintados:



(a) 6

(b) 7

(c) 8

(d) 9

(e) 10

Orientações ao professor

Organize os estudantes em duplas ou, caso necessário, em trios. Incentive o debate entre os integrantes da mesma dupla ou trio. Utilize questionamentos norteadores para toda a turma, como “Será que já estudamos alguma estrutura ou representação que colabore para a resolução desses problemas?”, “Algum desses problemas parece com os problemas da lista inicial?”.

Oriente que cada integrante da dupla deve participar ativamente da escrita da justificativa, porém a resolução final deve ser consensual.

Supervisione o trabalho das duplas, mas não interfira na interpretação e resolução dos problemas, mesmo que surjam dúvidas. Enfatize que as dúvidas podem ser anotadas por escrito na própria atividade.

Recolha as atividades e dúvidas para fundamentar o momento seguinte.

5.5 MÓDULO III - FINALIZAÇÃO

5.5.1 Retomada da discussão

Duração: 50 minutos

Descrição das atividades:

Serão retomados os principais pontos abordados durante a oficina e as lista inicial e intermediária, como: grafos, coloração, estratégias de resolução e como a representação por meio de grafos corrobora para aprimorar a interpretação de problemas. Será enfatizada a associação entre problemas da lista inicial e intermediária, explicitando quais estratégias (como modelagem por grafos, algoritmo de Dijkstra, algoritmo guloso e tentativa e erro)

CAPÍTULO 5

Orientações ao professor

Relembre conceitos importantes (classificação de quadriláteros, operações com decimais e inteiros, vizinhança de grafo) à medida que questiona os principais pontos aprendidos ao longo da oficina. Retome as estratégias utilizadas ao longo da oficina e as dúvidas que surgiram ao longo do processo de ensino-aprendizagem, conectando as potencialidades e limitações das estratégias e como puderam ser utilizadas para resolver os problemas da lista intermediária.

Siga as etapas de resolução dos problemas de forma análoga ao que foi proposto na resolução compartilhada da lista inicial.

Dê ênfase principalmente à resolução da última questão da lista em dupla. Se possível, solicite que um estudante resolva a questão no quadro ou que os estudantes destaquem quais caminhos pensaram para resolver o problema.

Registre no quadro os principais obstáculos observados ao longo da oficina, as principais estratégias de resolução, os conceitos abordados e os pontos de atenção. Questione quais as principais dúvidas que permaneceram e tente saná-las antes do início da aplicação da lista final.

5.5.2 Resolução individual da lista de final de atividades

Duração: 100 minutos

Objetivos:

- identificar grafos em problemas olímpicos;
- reconhecer a estrutura do grafo;
- escolher estratégias de resolução de problemas adequadas às problemáticas propostas;
- relacionar as informações do problema por meio de vértices e arestas;
- comparar problemas da lista inicial e lista final;
- discutir a viabilidade de resoluções abordadas na oficina no contexto da lista final.

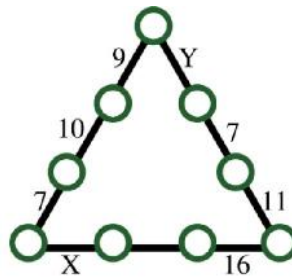
Descrição das atividades:

O docente irá entregar a lista final para que os estudantes resolvam de forma individual. Nos últimos 10 minutos de aplicação, será enfatizada a importância da leitura e interpretação de problemas, bem como a familiarização dos estudantes com estratégias de resolução de problemas.

Lista final de problemas

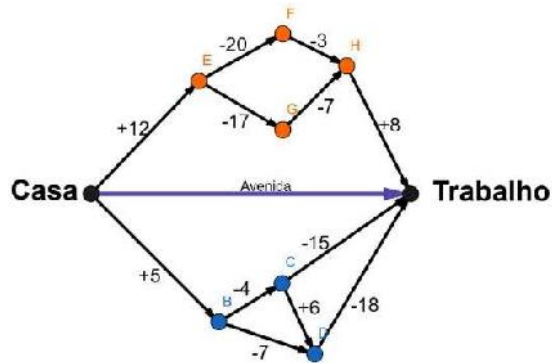
1. **(MANDACARU – 2024 – Nível Zumbi)** Nos círculos da figura foram distribuídos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, um para cada círculo, sem repetição, e de forma que o número localizado em cada segmento representa a soma dos dois números conectados por esse segmento. Calcule o valor de $X \cdot Y$.

CAPÍTULO 5



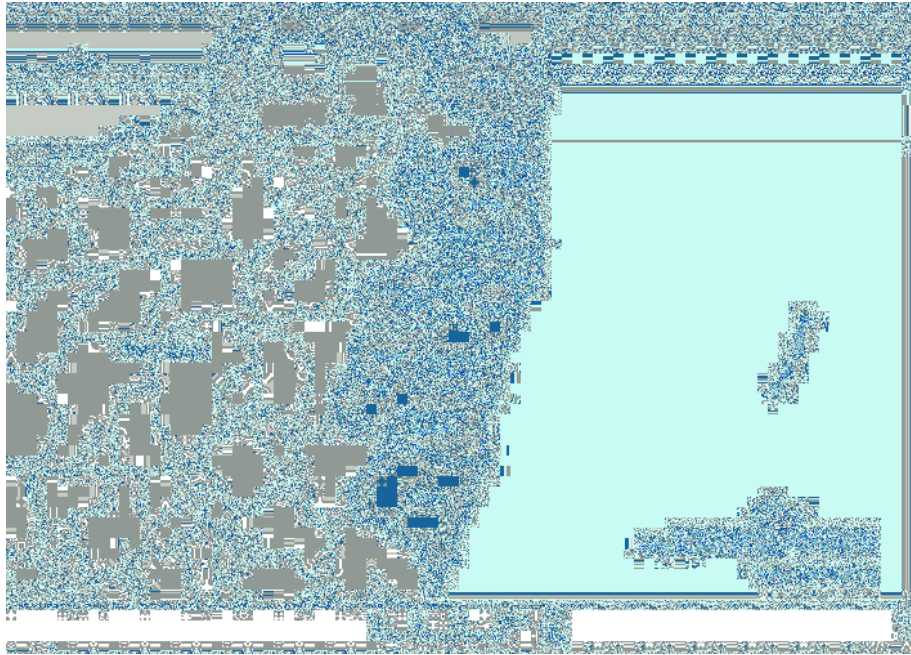
- (a) 12 (b) 15 (c) 54 (d) 44 (e) 64

2. Joana utilizou um aplicativo de geolocalização para indicar as possíveis rotas de casa ao trabalho. Seguindo pela avenida que a conecta diretamente ao destino, seu trajeto seria de 50 minutos. O aplicativo mostra a diferença de tempo (em minutos) entre a nova rota e a rota principal. A rota principal e as alternativas foram representadas na figura.



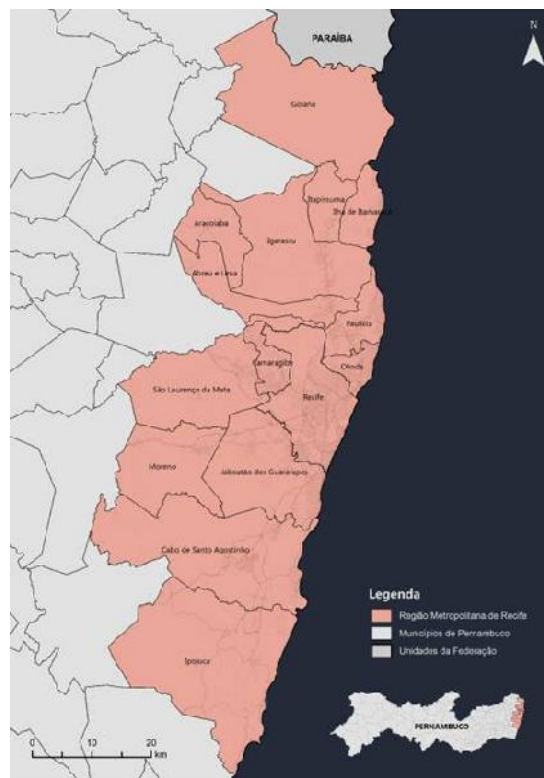
- a) Qual o trajeto mais rápido?
 b) Qual o trajeto mais demorado?
 c) De quantas formas distintas Joana pode ir de casa para o trabalho? Quais são elas?
3. No mapa abaixo está representada a Região Metropolitana do Recife (RMR). Observe atentamente o mapa e responda:

CAPÍTULO 5



- Quais são os municípios vizinhos de Jaboatão dos Guararapes? E os vizinhos de Recife?
- Represente, utilizando grafo, a RMR.
- Quantas cores, no mínimo, são necessárias para colorir o mapa se municípios vizinhos não podem ter a mesma cor?
- Pinte o mapa abaixo com o menor número cromático possível.

CAPÍTULO 5



4. **(CANGURU – 2023)** Algumas arestas de um cubo devem ser pintadas de vermelho, de forma que qualquer uma das faces tenha pelo menos uma aresta vermelha. No mínimo, quantas arestas devem ser pintadas?
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6
5. **(JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA)** O dono de uma loja de animais comprou uma certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies. Alguns desses peixes não podem ficar no mesmo aquário. A compatibilidade entre as espécies está na tabela (onde X significa incompatibilidade).

CAPÍTULO 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A						X	X		X
B			X					X	
C		X			X			X	
D					X	X		X	
E			X	X			X		
F	X			X			X		X
G	X				X	X		X	X
H		X	X	X			X		
I	X					X	X		

- Quais peixes podem ficar no mesmo aquário que o peixe A?
- Qual o menor número de aquários necessário para abrigar, sem problemas, todos os peixes?
- É possível distribuir os peixes de forma que cada aquário tenha (aproximadamente) o mesmo número de peixes? Justifique.
- Represente, utilizando grafo, a compatibilidade entre os peixes.

Orientações ao professor

A lista final é a consolidação da sequência didática, a partir da qual poderá ser realizada tanto a avaliação somativa, com possível atribuição de nota, quanto a reflexão sobre possíveis avanços e necessidades de retomada de aprendizado, quando comparada à lista inicial.

Corrija a lista final visando não apenas o acerto, adotando, portanto, critérios qualitativos por meio da verificação: da compreensão do enunciado e identificação do objetivo; da escolha, do uso e da adequação da estratégia de resolução; do uso de modelagem e representação de grafos; da argumentação matemática; e da evolução em comparação à lista inicial.

A partir dos resultados, identifique se há conteúdos que ainda precisam ser retomados, investigando a necessidade da realização de nova oficina de problemas com ênfase nos tópicos que os estudantes apresentaram maior dificuldade, oportunizando a recomposição de aprendizagem enquanto aprimora o letramento matemático.

5.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento e a familiarização com a Teoria de Grafos favorecem o engajamento estudantil ao tratar de contextos extraescolares e valorizar múltiplas estratégias de resolução. Além disso, potencializa o desenvolvimento e a organização do raciocínio e da argumentação, o que favorece a resolução mais rápida do problema, bem como reforça a necessidade de compreender as relações entre os elementos presentes no problema, aprimorando a leitura e a interpretação do problema proposto.

Os estudantes por meio da modelagem com grafos, realizada a partir do reconhecimento dos padrões dos problemas e das relações entre os seus elementos, devem desenvolver novas estratégias para resolver esses e outros problemas inéditos, especialmente aqueles presentes nas olimpíadas de matemática e nas avaliações externas.

CAPÍTULO 5

Neste cenário, o docente, a partir da análise dos dados provenientes do projeto, pode propor intervenções pedagógicas mais precisas. Isto é, a identificação das abordagens recorrentes e dos conhecimentos necessários para a resolução dos problemas viabiliza a elaboração de estratégias didáticas que recomponham o aprendizado e promovam o desenvolvimento do pensamento combinatório.

CAPÍTULO 5

5.6 REFERÊNCIAS

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. **Introdução à Teoria dos Grafos – Parte 1: Tópicos Adicionais**. [S. l.: s. n.], 2019. Material Teórico – Tópicos Adicionais. Revisor: Antonio Caminha M. Neto.

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. **Introdução à Teoria dos Grafos – Parte 2: Tópicos Adicionais**. [S. l.: s. n.], 2019. Material Teórico – Tópicos Adicionais. Revisor: Antonio Caminha M. Neto.

BONDY, J.A.; MURTY, U.S.R. **Graph Theory with Applications**. [S. l.]: Macmillan, 1976.

BRASIL. **Ministério da educação. Base nacional comum curricular**. [S. l.]: Brasília: MEC, 2018.

DIESTEL, Reinhard. **Graph Theory**. 5th. [S. l.]: Springer, 2022. v. 173. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 978-3-662-65008-5. Disponível em: <https://diestel-graph-theory.com/>.

ITENBERG, Iliia; GENKIN, Sergey; FOMIN, Dmitri. **Círculos Matemáticos: a Experiência Russa**. [S. l.]: AMS/IMPA, 2012.

NIETO-SAID, J. H.; SÁNCHEZ-LAMONEDA, R. A Curriculum for Mathematical Competitions. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, n. 5, p. 1043–1057, 2022. DOI: 10.1007/s11858-022-01389-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01389-9>.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. [S. l.: s. n.], 2025. Acessado em: 05 de julho de 2025. Disponível em: <http://obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 5 jul. 2025.

OLIMPÍADA PERNAMBUCANA DE MATEMÁTICA – OPEMAT. **Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) – site oficial**. Acesso em: 4 dez. 2025. OPEMAT. 2025. Disponível em: <https://www.opemat.com.br/>.

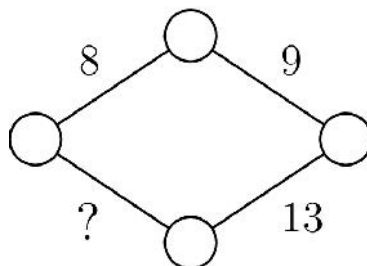
ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Revista Bolema**, 2011.

CAPÍTULO 5

APÊNDICE A

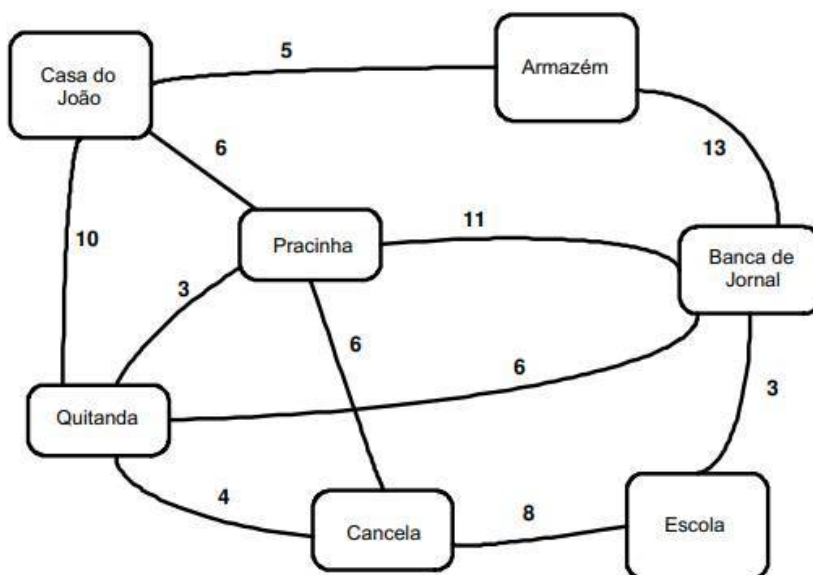
Lista inicial

1. **(CANGURU – 2023 – Nível C)** Válder quer escrever um número em cada vértice e em cada lado do losango mostrado. Ele quer que a soma dos números escritos nos vértices de cada lado seja igual ao número escrito nesse lado. Qual número ele deve escrever no lugar do ponto de interrogação?



- (a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

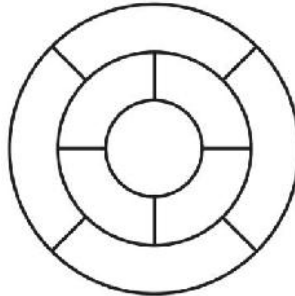
2. **(JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA)** Com base na representação abaixo, em que os números representam a distância entre os locais, em metros, responda:



- a) Qual o menor caminho da casa de João até a escola? Por quê?
b) Represente esse caminho.
c) Qual o maior caminho da casa de João até a escola? Represente esse caminho.

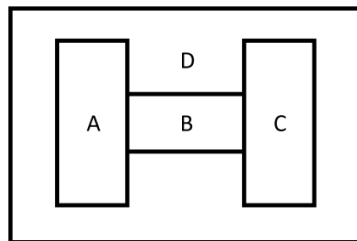
CAPÍTULO 5

3. (OBMEP – 2024 – Nível 1 – 1ª fase) Felipe vai colorir a figura de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. Qual é o menor número de cores que ele deve usar?



- (a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) 5
4. (OPEMAT – 2022 – Nível 2 – 1ª fase) Bernardo quer pintar a figura abaixo com tintas nas cores vermelho, azul, verde, preto e amarelo, considerando as seguintes restrições:
- Cada região A, B, C e D da figura deve ser pintada inteiramente com a mesma cor;
 - Duas regiões adjacentes, ou seja, regiões que fazem fronteira (C e B, por exemplo), devem ter cores diferentes.

De quantas maneiras Bernardo pode pintar a figura?



- a) 120 b) 180 c) 240 d) 320 e) 625
5. (JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA) Uma escola quer definir o número mínimo de horários necessários para aplicação de provas a fim de reduzir os custos no final do ano letivo. A tabela mostra a alocação de alunos (identificados pelo número na chamada) nos exames finais que devem prestar.

Se as disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns, responda:

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X								X
Português	X			X								X				X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X				X		X
Física			X		X						X		X			
Química		X						X	X					X		
Biologia		X				X					X	X				

CAPÍTULO 5

- a) A prova de matemática não poderá ser realizada ao mesmo tempo que quais disciplinas?
- b) Quantos horários, no mínimo, a escola deve disponibilizar? Por quê?

CAPÍTULO 5

APÊNDICE B

Lista intermediária

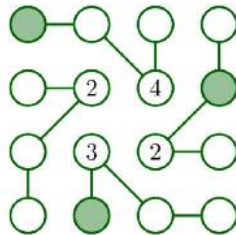
1. O que é grafo? Exemplifique.
2. Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora:

- 6A jogou com 7A, 7B, 8B
- 6B jogou com 7A, 8A, 8B
- 7A jogou com 6A, 6B
- 7B jogou com 6A, 8A, 8B
- 8A jogou com 6B, 7B, 8B
- 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A

Uma maneira de representar a situação é através de uma figura.

- a) Faça essa representação.
 - b) Quais são os vértices do grafo?
 - c) O que as arestas representam?
 - d) Todos os times jogaram entre si? Justifique.
3. **(Mandacaru – 2024 – Zumbi dos Palmares)** Em cada um dos círculos deve ser escrito um dos números 1, 2, 3 ou 4, de forma que em cada linha, em cada coluna e em cada quatro círculos unidos por segmentos, os números sejam diferentes.

Calcule a soma dos números que devem ser escritos nos três círculos pintados:



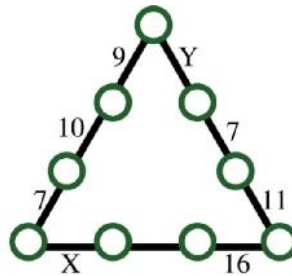
- (a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

CAPÍTULO 5

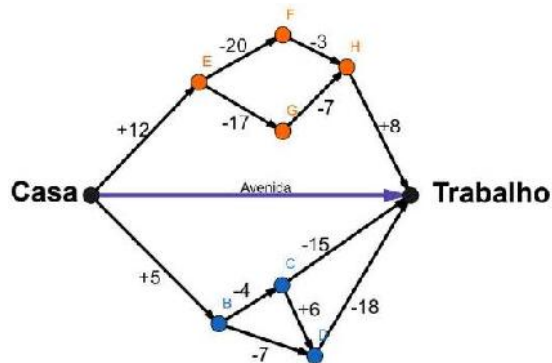
APÊNDICE C

Lista final

1. (MANDACARU – 2024 – Nível Zumbi) Nos círculos da figura foram distribuídos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, um para cada círculo, sem repetição, e de forma que o número localizado em cada segmento representa a soma dos dois números conectados por esse segmento. Calcule o valor de $X \cdot Y$.

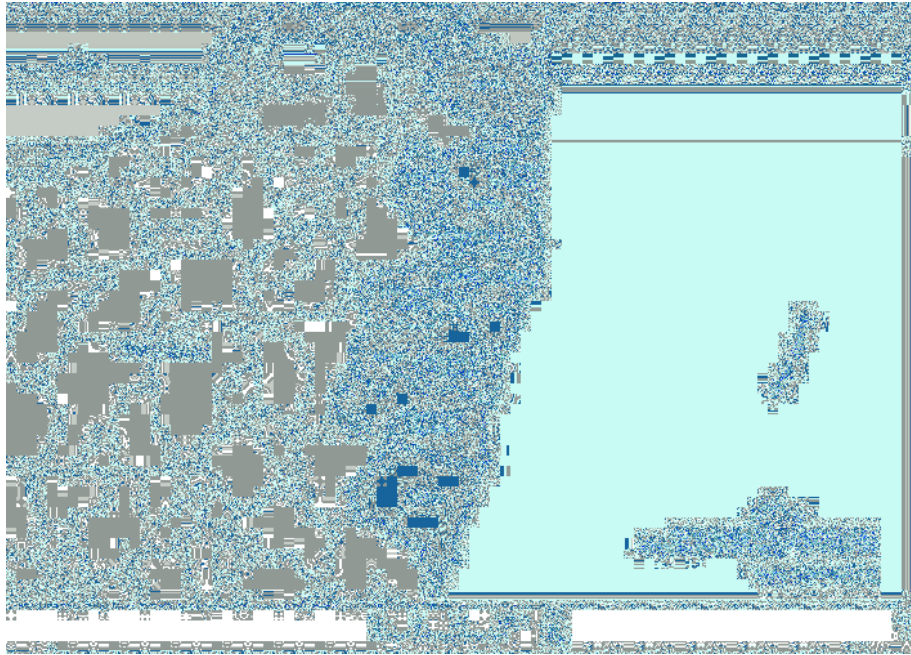


- (a) 12 (b) 15 (c) 54 (d) 44 (e) 64
2. Joana utilizou um aplicativo de geolocalização para indicar as possíveis rotas de casa ao trabalho. Seguindo pela avenida que a conecta diretamente ao destino, seu trajeto seria de 50 minutos. O aplicativo mostra a diferença de tempo (em minutos) entre a nova rota e a rota principal. A rota principal e as alternativas foram representadas na figura.



- a) Qual o trajeto mais rápido?
b) Qual o trajeto mais demorado?
c) De quantas formas distintas Joana pode ir de casa para o trabalho? Quais são elas?
3. No mapa abaixo está representada a Região Metropolitana do Recife (RMR). Observe atentamente o mapa e responda:

CAPÍTULO 5



- Quais são os municípios vizinhos de Jaboatão dos Guararapes? E os vizinhos de Recife?
- Represente, utilizando grafo, a RMR.
- Quantas cores, no mínimo, são necessárias para colorir o mapa se municípios vizinhos não podem ter a mesma cor?
- Pinte o mapa abaixo com o menor número cromático possível.

CAPÍTULO 5



4. **(CANGURU – 2023)** Algumas arestas de um cubo devem ser pintadas de vermelho, de forma que qualquer uma das faces tenha pelo menos uma aresta vermelha. No mínimo, quantas arestas devem ser pintadas?
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6
5. **(JURKIEWICZ, 2009, ADAPTADA)** O dono de uma loja de animais comprou uma certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies. Alguns desses peixes não podem ficar no mesmo aquário. A compatibilidade entre as espécies está na tabela (onde X significa incompatibilidade).

CAPÍTULO 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A						X	X		X
B			X					X	
C		X			X			X	
D					X	X		X	
E			X	X			X		
F	X			X			X		X
G	X				X	X		X	X
H		X	X	X			X		
I	X					X	X		

- Quais peixes podem ficar no mesmo aquário que o peixe A?
- Qual o menor número de aquários necessário para abrigar, sem problemas, todos os peixes?
- É possível distribuir os peixes de forma que cada aquário tenha (aproximadamente) o mesmo número de peixes? Justifique.
- Represente, utilizando grafo, a compatibilidade entre os peixes.

6

Sequência Didática: Possibilidades Didáticas para o Trabalho com Representações de Números Racionais

MAYRA ILZE XAVIER¹

TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA²

Apresenta-se, neste trabalho, uma proposta de sequência didática que constitui parte de uma pesquisa de mestrado sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental na transição entre diferentes representações de números racionais (frações, decimais e porcentagens). O estudo é desenvolvido em uma escola pública do município de Jaboatão dos Guararapes–PE, tendo como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os conteúdos programáticos previstos para o 3º bimestre. A proposta surge da necessidade observada nos resultados de atividades diagnósticas e avaliações realizadas pela rede, que demonstram dificuldades conceituais persistentes dos estudantes em compreender as múltiplas formas de representação dos números racionais.

Este produto foi elaborado pela mestrandia Mayra Xavier, no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), com o objetivo de oferecer aos docentes um roteiro de ensino que auxilie na recomposição das aprendizagens essenciais relacionadas aos números racionais, contribuindo nas práticas pedagógicas de professores que atuam em contextos semelhantes. Estruturada com base na realização de atividades lúdicas, a proposta de sequência didática busca favorecer a compreensão conceitual, a diversificação de estratégias e a transição

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, mayraixavier@gmail.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco, tarciana.silva@ufrpe.br

CAPÍTULO 6

significativa entre as representações de frações, decimais e porcentagens. Pretende-se que esta proposta didática traga resultados positivos para os professores e impacte significativamente a compreensão dos estudantes.

6.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

Embora os números racionais estejam presentes em diversos contextos do nosso dia a dia, e suas representações serem conteúdos trabalhados desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, observa-se que muitos alunos concluem o Ensino Médio sem uma compreensão adequada dos diferentes significados desses números, e nem dominar as operações envolvidas.

Conforme (Lima, 2013), os alunos apresentam dificuldades no conceito de números racionais quando “não entendem porque um mesmo objeto matemático (uma fração) pode ser representado de infinitas formas diferentes(frações equivalentes)”. Embora essas diferentes formas de representação expressem o mesmo conceito matemático, muitos alunos não conseguem estabelecer relações de equivalência entre elas. Essas dificuldades comprometem a compreensão dos números racionais e impacta diretamente o desempenho dos estudantes.

Percebe-se que o ensino dos números racionais e suas representações exige intervenções pedagógicas que contribuam para a construção de significados e estejam alinhadas entre a teoria e prática. Segundo (Duval, 2009), a aprendizagem matemática só se torna significativa quando o estudante é capaz de articular diferentes registros de representações. Diante disso, o papel do professor é essencial nesse processo, pois é ele quem propicia condições para a construção do conhecimento matemático.

Essa sequência didática foi elaborada com o propósito de apoiar o trabalho do professor, oferecendo atividades que partem de situações-problema contextualizadas, instigando o raciocínio lógico e a construção coletiva do conhecimento. As propostas não devem ser vistas como um roteiro rígido, mas como um recurso flexível que pode ser adaptado à realidade da turma e ao tempo disponível. Dessa forma, busca-se oferecer ao professor um recurso de baixo custo, de fácil aplicação e alinhado às competências e habilidades previstas na BNCC(BRASIL, 2018), possibilitando que a sala de aula se torne um espaço de diálogo, construção e ressignificação do conhecimento matemático.

6.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

Área do Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente Curricular: Matemática.

Série: 6º ano

Nº de aulas:10 aulas

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais

CAPÍTULO 6

- Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”

TEMA

A transição entre as diferentes representações dos números racionais (frações, decimais e porcentagens)

JUSTIFICATIVA

O estudo dos números racionais é essencial para ampliar a compreensão dos estudantes sobre diferentes formas de representar e relacionar números. A sequência didática, que aborda representação, equivalência, operações, relação entre frações, decimais e porcentagem, contribui para que os alunos desenvolvam habilidades previstas na BNCC e apliquem esses conhecimentos em situações do cotidiano, como medidas, cálculos de valores e porcentagens. Favorecendo uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

COMPETÊNCIAS

BNCC

- 1 - Renhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho
- 2 - Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- 3 - Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- 6 - Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

HABILIDADES

BNCC

- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

CAPÍTULO 6

- (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
- (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
- (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

OBJETIVOS

- Explorar frações como parte de um todo, desenvolver a noção de equivalência e transitar do concreto para o abstrato.
- Trabalhar estratégias de operação com números racionais em diferentes representações e compreender a conversão entre frações, decimais e porcentagens.
- Identificar e relacionar diferentes representações (numérica, pictórica, decimal e percentual) e aplicar em situações do cotidiano.
- Estimular o raciocínio lógico, a argumentação, a comparação e o trabalho em grupo, promovendo flexibilidade no pensamento matemático e a resolução de problemas.

PÚBLICO-ALVO

Alunos de 6ª série do Ensino fundamental - Anos finais.

PERFIL DAS TURMAS

Turmas compostas por 25 a 30 alunos, egressos do Ensino Fundamental - anos iniciais.

RECURSOS

Quadro branco, cartolina, papel ofício colorido, fichas de exercícios, marcadores coloridos, crachá, tesoura, cola.

CAPÍTULO 6

AVALIAÇÃO

A avaliação será contínua e processual, acompanhando o desenvolvimento dos estudantes ao longo de toda a sequência didática. Sendo considerado os conhecimentos prévios, desempenho nas atividades e exercícios e a evolução do raciocínio.

6.3 ATIVIDADE I

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo abordado: Identificar fração como representação.

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas - 100 minutos



Figura 6.1: Problema da divisão da Pizza

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Para iniciar a etapa, o professor apresentará a seguinte situação:

Um professor trouxe 5 pizzas para dividir entre 6 alunos. É possível dar 1 pizza inteira para cada aluno? Como podemos fazer para dividir igualmente essas 5 pizzas entre os 6 alunos?

A ideia do problema é levar os estudantes a perceber que os números naturais não são suficientes para representar algumas situações de partilha e que, nesses casos, é necessário recorrer às frações.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nesta etapa, os estudantes serão organizados em equipes de quatro a cinco integrantes e receberão representações de pizzas relacionadas ao problema proposto, além de lápis e tesouras. A partir desse

CAPÍTULO 6

material manipulável, deverão discutir e testar diferentes formas de repartir as 5 pizzas igualmente entre os 6 colegas, registrando suas descobertas. O professor atuará como mediador, acompanhando as discussões, incentivando o raciocínio dos grupos e intervindo apenas com perguntas orientadoras, quando necessário.

APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES

Após o momento de exploração em grupo, o professor conduzirá a sistematização das ideias. Nesse momento, será apresentada a definição de fração como uma forma de representar partes de um todo ou o resultado de uma divisão. O professor identificará o que chamamos de numerador e denominador. Além disso, será evidenciado que calcular uma fração também pode ser compreendido como realizar uma divisão entre eles, como no caso de $5 \div 6$, que resulta na fração $\frac{5}{6}$. A consolidação desses conceitos podem ser enriquecida com o uso de exemplos visuais, como pizzas, barras e retângulos fracionados, de modo a conectar os caminhos encontrados pelos alunos.

GENERALIZAÇÃO

O professor ampliará o raciocínio destacando que, em certas divisões, os números naturais não são suficientes para expressar o resultado, sendo necessário o uso das frações. No problema proposto, cada aluno ficou com $\frac{5}{6}$ de uma pizza, o que reforça a importância desse novo registro numérico. Retomando o que foi discutido, o professor enfatizará que a fração pode ser entendida de duas formas principais: como parte de um todo, quando se divide a pizza em seis partes iguais e se considera cinco delas, e como o resultado de uma divisão, ao efetuar a operação $5 \div 6 = \frac{5}{6}$. Dessa forma, os estudantes compreenderão que a ideia de fração vai além da representação de partilhas de objetos concretos, alcançando também situações em que é necessário determinar uma parte de uma quantidade numérica.

EXERCÍCIOS

Depois de resolverem as primeiras atividades e acompanharem a explicação do professor sobre os conceitos e algoritmos, os alunos deverão responder questões como :

EXERCÍCIOS

1. Em uma festa, foram encomendados 6 bolos iguais para dividir entre 12 convidados. Quanto cada convidado receberá?
2. Uma professora trouxe 7 barras de chocolate para dividir entre 10 alunos. Qual a fração de barra que cada aluno receberá?
3. Uma pizza foi cortada em 8 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços. Qual fração da pizza ele comeu?
4. Um bolo foi dividido em 6 fatias. Maria comeu 2 fatias. Que fração do bolo ela comeu?
5. Uma barra de chocolate tem 10 quadradinhos. Carlos comeu 7 quadradinhos. Qual fração da barra ele comeu?

CAPÍTULO 6

AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada considerando a participação dos alunos nas discussões, na realização, no desempenho e na colaboração no das atividades.

6.4 ATIVIDADE 2

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo abordado: Frações equivalentes

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas - 100 minutos



Figura 6.2: Problema da divisão do chocolate

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta Situação Didática, vamos iniciar apresentando aos alunos o problema:

Pedro ganhou uma barra de chocolate. Ele a dividiu em 2 partes iguais e comeu 1 pedaço. Júlia ganhou uma barra do mesmo tamanho, mas dividiu em 4 partes iguais e comeu 2 pedaços. Quem comeu mais chocolate?

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Os estudantes receberão uma ficha com a barra de chocolate inteira, sem divisões demarcadas. A partir desse material, deverão representar as situações descritas no problema, dividindo a barra em duas partes iguais e pintando uma delas para indicar o consumo de Pedro, e em quatro partes iguais, pintando duas, para indicar o consumo de Júlia. Em seguida, os estudantes serão convidados a registrar suas observações, identificando quantas partes foram formadas, quantas foram pintadas e que fração cada situação representa, para então responder à pergunta: “Quem comeu mais chocolate? Após essa primeira exploração, as duplas compartilharão suas conclusões com a turma, comparando visualmente as representações construídas e discutindo se as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ correspondem à mesma quantidade de chocolate consumido. O professor atuará como mediador, circulando entre as equipes, observando suas

CAPÍTULO 6

estratégias e levantando questões que provoquem a reflexão, sem oferecer respostas prontas. O modelo da ficha utilizada encontra-se disponível no Apêndice.

APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES

Após a discussão coletiva, o professor explicará que frações diferentes podem representar a mesma quantidade, assim são chamadas de frações equivalentes. Será mostrado que, multiplicando ou dividindo numerador e denominador pelo mesmo número, obtemos frações equivalentes (ex.: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$). Para reforçar o conceito, os alunos participarão de uma dinâmica ativa onde cada aluno receberá um crachá contendo uma fração e no sinal do professor, os estudantes deverão procurar colegas que possuam frações equivalentes à sua e formar grupos. A quantidade de frações equivalentes e o tamanho dos grupos serão planejados de acordo com o número de alunos da turma. A atividade se encerra quando todos os grupos estiverem corretamente organizados, sendo valorizada a colaboração entre os colegas, com destaque para o grupo que concluir a tarefa primeiro de forma correta.

GENERALIZAÇÃO

Nessa etapa, o professor abordará o conceito de frações equivalentes para apoiar a compreensão do cálculo de frações de uma quantidade. Será mostrado que a equivalência se mantém mesmo quando aplicamos as frações a números, o que possibilita determinar partes de uma quantidade de maneira organizada. Por exemplo, para calcular quanto é $\frac{1}{3}$ de 12, os alunos serão convidados a pensar em uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ que tenha denominador 12. Assim, ao transformar $\frac{1}{3}$ em $\frac{4}{12}$, perceberão que o numerador indica diretamente a quantidade correspondente, concluindo que $\frac{1}{3}$ de 12 é igual a 4. Dessa forma, os estudantes entendem que as frações equivalentes não apenas representam a mesma quantidade em formas diferentes, mas também são um recurso útil para calcular frações de números de modo visual, construtivo e significativo.

EXERCÍCIOS

Após a discussão conceitual sobre frações equivalentes e a realização dos exemplos orientados pelo professor, os estudantes deverão resolver individualmente os exercícios propostos a seguir:

CAPÍTULO 6

EXERCÍCIOS

1. Marque o "X" nas frações equivalentes

- a) $() \frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$
b) $() \frac{3}{5}$ e $\frac{10}{9}$
c) $() \frac{5}{8}$ e $\frac{15}{24}$
d) $() \frac{4}{7}$ e $\frac{12}{21}$

2. Complete com o valor que falta para que as frações sejam equivalentes :

- a) $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{8}$
b) $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{12}$
c) $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{18}$

3. João comeu 4 pedaços de uma pizza dividida em 8. Escreva duas outras frações equivalentes que representem a parte que ele comeu e explique como encontrou.

4. Quanto é $\frac{2}{5}$ de 20? Construa uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ com denominador 20 e indique o numerador que representa a quantidade.

5. Em uma festa, foram preparados 18 doces. Carla comeu $\frac{1}{3}$ desses doces que estavam disponíveis. Quantas fatias de doces Carla comeu?

AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada considerando a participação na resolução do problema inicial, na capacidade de representar e identificar frações equivalentes e no desempenho da dinâmica, verificando se os alunos conseguem aplicar a regra de multiplicação/divisão para criar equivalências.

6.5 ATIVIDADE 3

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo abordado: Comparação de frações e sua forma decimal.

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas/100 minutos

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta etapa, o professor inicia a aula com um quiz interativo elaborado na plataforma Kahoot, no qual os alunos responderão a quatro perguntas que envolvem a comparação de números, identificando qual deles é maior. As opções podem incluir frações, decimais ou representações gráficas (como figuras ou desenhos de partes do todo). O objetivo dessa atividade é estimular a curiosidade, a percepção inicial sobre grandeza e comparação, e promover a discussão entre os alunos antes de introduzir formalmente os conceitos. O quiz utilizado nesta atividade encontra-se disponível no Apêndice.

CAPÍTULO 6

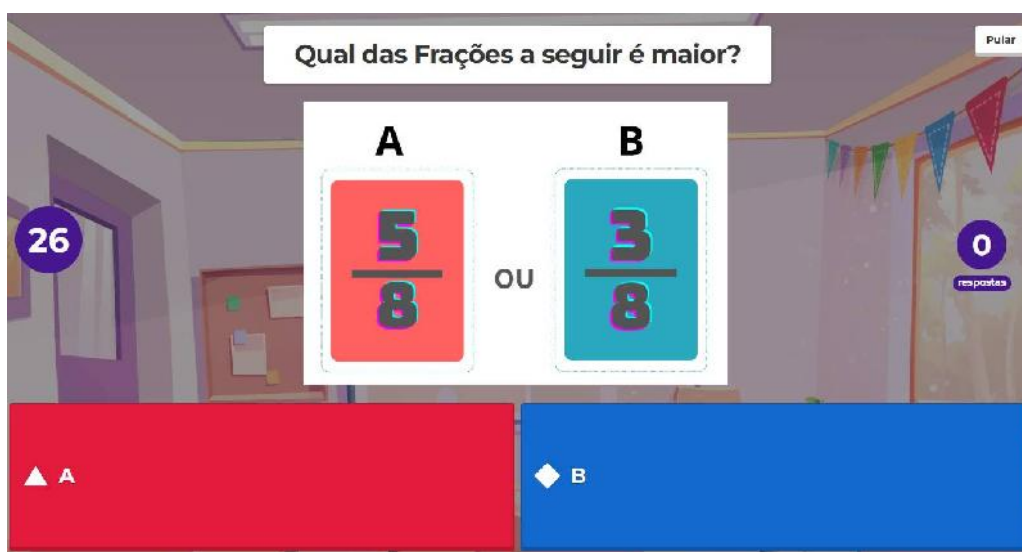


Figura 6.3: Atividade do Kahoot

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a realização do quiz no kahoot, o professor deve pedir aos estudantes explicarem como chegaram às respostas do Kahoot. O professor deve fazer perguntas como: Por que você acha que essa fração é maior que a outra? Alguma das formas apresentadas foi mais fácil de comparar? Depois da interação dos alunos, sugere-se que o professor solicite aos estudantes que decidam qual(is) dentre os modos de comparação que aparecem no quiz é considerado por eles o mais fácil.

APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES

O professor sistematiza que as frações podem ser comparadas de diferentes maneiras. Uma das estratégias consiste em observar os denominadores: quando eles são iguais, a fração com o maior numerador é a maior. Outra possibilidade é transformar as frações em equivalentes com denominadores iguais ou convertê-las para a forma decimal, facilitando a comparação. É importante enfatizar que toda fração representa o resultado da divisão do numerador pelo denominador, regra fundamental para a compreensão desse conteúdo. Aproveitando essa definição, o professor fará a relação para a comparação com números decimais, mostrando que qualquer fração pode ser transformada em decimal por meio da divisão do numerador pelo denominador. De forma inversa, decimais também podem ser representados como frações. Essa relação permite que os alunos comparem frações e decimais de maneira sistemática, compreendendo que diferentes representações podem expressar a mesma quantidade.

GENERALIZAÇÃO

A partir das situações exploradas no quiz e das discussões sobre estratégias de comparação, os estudantes devem compreender que comparar frações envolve identificar uma mesma unidade de referência e analisar como numeradores e denominadores se relacionam. Para consolidar o aprendizado de forma prática e interativa, os alunos participarão de uma rotação por estações, nas quais realizarão diferentes atividades relacionadas à comparação de frações e decimais. Para consolidar o aprendizado de forma prática e interativa, os estudantes participarão de uma rotação por estações:

CAPÍTULO 6

- A primeira estação é com o Jogo Batalha das Frações, o objetivo é reforçar a percepção inicial de grandeza e familiaridade com as frações na qual os alunos comparam diferentes frações e identificam qual é maior. As regras e cartas para impressão encontram-se no Apêndice.
- A segunda estação é o Jogo da Memória Fração e Decimal, trabalhando a relação entre frações e decimais, mostrando que diferentes representações podem indicar a mesma quantidade. Os alunos consolidam a compreensão de equivalência e começam a estabelecer conexões entre as formas numéricas. As regras e cartas para impressão encontram-se no Apêndice.
- A terceira estação é o Varal das Frações, que exige que os estudantes organizem frações e decimais em ordem crescente. Essa atividade exige síntese e aplicação das regras de comparação, integrando conceitos aprendidos nas etapas anteriores, promovendo raciocínio crítico e a generalização do conteúdo. As regras e cartas para impressão encontram-se no Apêndice.

EXERCÍCIOS

Por fim, após a realização das atividades nas estações, os estudantes resolverão exercícios que permitam aplicar e consolidar os conceitos de comparação de frações e decimais, reforçando a compreensão e a habilidade de generalizar as estratégias aprendidas.

EXERCÍCIO

1. Numa prova, João acertou 12 de 20 questões.
 - a) Escreva a fração que representa os acertos na forma decimal.
 - b) Se Maria acertou $\frac{3}{4}$ da prova de 20 questões, quem acertou mais?
2. Coloque em ordem decrescente:
 $0,25 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 0,6$
3. João comeu $\frac{2}{5}$ de uma pizza e Maria comeu 0,4 da pizza. Quem comeu mais?
4. Uma sala tem 30 alunos. $\frac{1}{3}$ dos alunos gostam de matemática, Já $\frac{2}{5}$ dos alunos gostam de história. Nessa sala tem mais estudantes que gostam de matemática ou de história?

AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada considerando a participação nas discussões e resolução dos desafios propostos, observando a evolução do raciocínio dos alunos ao comparar frações por diferentes estratégias (numérica, desenho e reta numérica).

6.6 ATIVIDADE 4

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo abordado: Operações com frações e decimais.

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas - 100 minutos

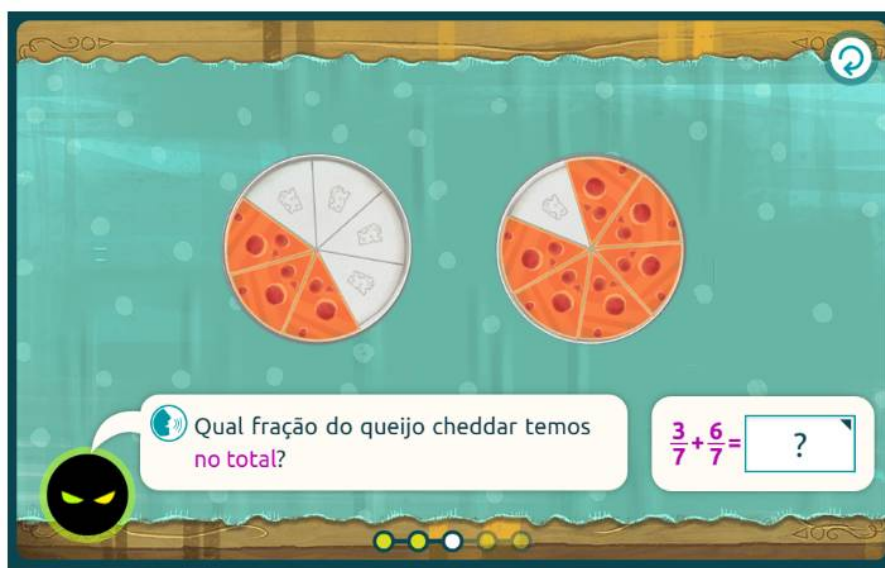


Figura 6.4: Jogo de adição de Frações

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta Situação Didática, a aula será iniciada com um jogo digital interativo disponível na plataforma Matific Play, episódio Cats and Mice, cuja proposta é motivar os estudantes a explorarem a adição de frações por meio de representações visuais. No jogo, os alunos são desafiados a combinar frações para formar um todo, visualizando as partes e compreendendo como a soma constrói a unidade.

Link de acesso: <https://www.matific.com/bra/pt-br/home/math/episode/cats-and-mice/>

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após a introdução com o jogo, os alunos discutem sobre as estratégias de como identificaram o resultado utilizado para resolver as situações-problema apresentadas. Nesse momento, discute-se como a observação das representações visuais das frações, organizadas em partes iguais de um todo, auxilia na identificação do denominador comum e na compreensão da soma das frações envolvidas. Os alunos compartilham suas estratégias para determinar a fração total obtida, analisando como as partes preenchidas em cada representação contribuem para o resultado final.

APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES

Nesta etapa, o professor retoma as situações discutidas e conduz os alunos à formalização do conceito. A partir das combinações que resultaram o professor introduz a noção de operações com frações de mesmo denominador: Quando os denominadores são iguais, basta somar ou subtrair os numeradores para encontrar o resultado. Em seguida, inicia-se a reflexão sobre o caso de denominadores diferentes, destacando que nem sempre as frações terão a mesma base para a comparação ou a soma. Nesses casos, será necessário buscar frações equivalentes que possuam denominadores comuns, para depois efetuar a operação.

CAPÍTULO 6

GENERALIZAÇÃO

Nesta etapa, os alunos são levados a ampliar a compreensão sobre a relação entre frações e o inteiro, conectando esse raciocínio às operações de adição e subtração. Retoma-se a ideia de que qualquer fração possui um complemento em relação ao inteiro, por exemplo: $\frac{7}{10}$ tem como complemento $\frac{3}{10}$, e que essa relação é percebida diretamente quando os denominadores são iguais. Chegando na observação que “Para encontrar a fração que completa o inteiro, basta calcular a diferença entre o denominador e o numerador, mantendo o mesmo denominador”. A partir daí, o professor conduz os alunos para observar que as frações com mesmo denominador permitem operações diretas somando ou subtraindo os numeradores. Já as frações com denominadores diferentes, por outro lado, exigem a transformação em frações equivalentes que compartilhem o mesmo denominador e que para operar frações com números decimais, é necessário converter a fração em decimal ou o decimal em fração equivalente, permitindo a comparação e a realização correta da operação.

Assim, os alunos compreendem que encontrar frações equivalentes e converter decimais é fundamental para realizar operações de adição e subtração envolvendo diferentes representações dos números racionais, pois isso possibilita a comparação entre frações e decimais, a construção de resultados corretos e a aplicação em situações do cotidiano.

EXERCÍCIOS

Nesta etapa, os alunos terão a oportunidade de aplicar os conceitos construídos em diferentes níveis de complexidade. O professor organiza os exercícios de forma gradual:

CAPÍTULO 6

EXERCÍCIO

1. Complete:

a) $\frac{3}{8} + = 1$ b) $\frac{5}{12} + = 1$

2. Realize as operações :

a) $\frac{1}{3} + 0,6 =$

b) $4 - \frac{2}{3} =$

c) $1,3 + \frac{2}{5} + \frac{8}{10} =$

3. Ana comeu $\frac{3}{8}$ de uma pizza e Pedro comeu $\frac{2}{8}$.

a) Quanto foi consumido ao todo?

b) Quanto falta para completar a pizza inteira?

4. Um tanque de combustível comporta 30 litros. Um carro já utilizou $\frac{2}{5}$ do tanque e, depois disso, gastou mais 7,5 L.

a) Quantos litros foram consumidos ao todo?

b) Qual fração da capacidade do tanque ainda resta?

AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada considerando a participação nas discussões e na resolução dos problemas, na clareza ao explicar as estratégias utilizadas e na resolução correta das operações nos exercícios e no jogo.

6.7 ATIVIDADE 5

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Conteúdo abordado: Porcentagem como fração de denominador 100.

Quantidade de aulas/horas: 2 aulas 100 minutos

APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nesta atividade, os alunos serão divididos em grupos e receberão cartões com imagens segmentadas em partes iguais. Alguns segmentos já mostram valores percentuais, enquanto outros estão em branco. O desafio da turma é preencher corretamente esses espaços, descobrindo as porcentagens faltantes. A dinâmica estimula a colaboração, a observação e o raciocínio, permitindo que os alunos construam o conceito de porcentagem atrelando ao de forma prática e visual a frações. O modelo de ficha de atividade utilizado encontra-se disponível no Apêndice.

CAPÍTULO 6

25%	25%
25%	?

Figura 6.5: Porcentagem x Fração

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Após o tempo destinado à atividade, o professor fará um sorteio para escolher duas equipes que irão expor suas resoluções para toda a turma. Cada grupo apresentará o raciocínio seguido, os passos utilizados e as possíveis dificuldades enfrentadas durante a resolução. Nesse momento, o professor atuará apenas como ouvinte, sem interferir nas respostas, já que a proposta é valorizar as estratégias criadas pelos alunos e compreender quais caminhos eles estão utilizando para resolver problemas com frações.

APRESENTAÇÃO DAS DEFINIÇÕES

Nesta etapa, o professor apresenta o conceito de porcentagem como uma fração com denominador 100, mostrando que todo valor percentual pode ser representado como uma fração equivalente. Destaca-se que os alunos já chegaram aos valores percentuais associando-os a frações equivalentes, percebendo que a porcentagem indica quantas partes de 100 correspondem à quantidade analisada. O docente sistematiza a relação entre fração e porcentagem, reforçando que, para transformar uma fração em porcentagem, basta escrevê-la com denominador 100. Os alunos serão convidados a somar os percentuais encontrados nos cartões da atividade anterior, consolidando a compreensão de que cada valor corresponde a uma fração de 100 partes. Serão apresentados exemplos adicionais conectando a porcentagem a situações do cotidiano, como descontos, impostos e estatísticas simples, reforçando a utilidade prática do conceito.

GENERALIZAÇÃO

Para consolidar a aprendizagem, o professor fará a relação ainda da porcentagem atrelada a números decimais. Essa abordagem permite que os alunos visualizem e relacionem as três formas de representação do mesmo valor. Para reforçar a prática e tornar a atividade lúdica, os alunos poderão aplicar esses conceitos no jogo Baralho das Representações, combinando cartas que apresentam o mesmo valor em fração, decimal, porcentagem ou pictórica. Estimulando o raciocínio, a comparação e a associação entre

CAPÍTULO 6

diferentes representações dos números racionais. O material completo com as regras está disponível no apêndice.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios a seguir, iremos trabalhar como um mesmo número pode assumir representações equivalentes, permitindo ao aluno compreender que frações, decimais e porcentagens constituem diferentes formas de expressar o mesmo conceito matemático.

EXERCÍCIOS

1. Em uma turma de 20 alunos, 5 gostam de matemática.
 - a) Qual fração da turma gosta de matemática?
 - b) Transforme essa fração em decimal.
 - c) E em porcentagem?
2. Uma loja dá 15% de desconto em um produto que custa R\$ 80.
 - a) Qual fração representa o desconto?
 - b) Qual o valor do desconto em reais?
 - c) Qual o valor restante do produto?
3. Em uma caixa com 24 bombons, 6 são de morango, 10 são de chocolate e o restante é de amendoim.
 - a) Qual fração da caixa corresponde aos bombons de chocolate?
 - b) Qual a porcentagem que representa os bombons de morango?

AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada considerando a participação nas discussões e nas representações gráficas, na resolução correta das situações-problema e na clareza na transição entre frações, decimais e porcentagens.

6.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta proposta didática tem como objetivo promover a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes, estimulando o desenvolvimento de habilidades relacionadas à articulação entre diferentes registros de representação dos números racionais. Para isso, são utilizadas atividades práticas contextualizadas ao cotidiano dos alunos, possibilitando que a aprendizagem se torne mais significativa. Espera-se, assim, o fortalecimento das práticas pedagógicas, e da integração entre teoria e prática, contribuindo para uma aprendizagem mais efetiva nos Ensino Fundamental-Anos finais. Além disso, busca-se oferecer ferramentas aos professores para trabalhar com materiais didáticos mais eficientes, que consolidem a aprendizagem dos conteúdos abordados e construam uma base sólida para as etapas subsequentes do ensino.

CAPÍTULO 6

6.8 REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. [S. l.: s. n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 5 de dez. de 2025.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais: Sémiotique et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels (Fascículo I)**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

LIMA, Fernanda Soto. **Números racionais na forma fracionária: atividades para superar dificuldades de aprendizagem**, 2013.

CAPÍTULO 6

APÊNDICE

A.Ficha de Registro

FICHA DE REGISTRO - COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

Pedro ganhou uma barra de chocolate. Ele a dividiu em 2 partes iguais e comeu 1 pedaço. Júlia ganhou uma barra do mesmo tamanho, mas dividiu em 4 partes iguais e comeu 2 pedaços.

Represente as situações descritas:

PEDRO



JÚLIA :



Quem comeu mais chocolate?

Os materiais apresentados neste apêndice foram elaborados pela autora para fins pedagógicos, no âmbito deste produto educacional.

QUIZ KAHOOT

Qual das Frações a seguir é maior?

A $\frac{5}{8}$ OU B $\frac{3}{8}$

A Kahoot! quiz slide with a classroom background. At the top, a question asks 'Qual das Frações a seguir é maior?'. Below the question, two options are presented: 'A' with a red box containing the fraction $\frac{5}{8}$, and 'B' with a blue box containing the fraction $\frac{3}{8}$. The word 'OU' is between the two boxes. At the bottom, there are two horizontal bars: a red one on the left and a blue one on the right, each with a small white triangle pointing right.

Qual das Frações a seguir é maior?

A $\frac{1}{2}$ OU B $\frac{3}{8}$



A Kahoot! quiz slide with a classroom background. At the top, a question asks 'Qual das Frações a seguir é maior?'. Below the question, two options are presented: 'A' with a red box containing the fraction $\frac{1}{2}$, and 'B' with a blue box containing the fraction $\frac{3}{8}$. The word 'OU' is between the two boxes. At the bottom, there are two horizontal bars: a red one on the left and a blue one on the right, each with a small white triangle pointing right.

Qual dos números a seguir é maior?

A 0,3 OU B $\frac{3}{5}$

A Kahoot! quiz slide with a classroom background. At the top, a question asks 'Qual dos números a seguir é maior?'. Below the question, two options are presented: 'A' with a red box containing the decimal '0,3', and 'B' with a blue box containing the fraction $\frac{3}{5}$. The word 'OU' is between the two boxes. At the bottom, there are two horizontal bars: a red one on the left and a blue one on the right, each with a small white triangle pointing right.

Qual dos desenhos a seguir, representa o maior número?

A  OU B 

A Kahoot! quiz slide with a classroom background. At the top, a question asks 'Qual dos desenhos a seguir, representa o maior número?'. Below the question, two options are presented: 'A' with a red box containing a circle divided into four equal quadrants, with the bottom two quadrants shaded orange; and 'B' with a blue box containing a circle divided into five equal sectors, with three sectors shaded purple. The word 'OU' is between the two boxes. At the bottom, there are two horizontal bars: a red one on the left and a blue one on the right, each with a small white triangle pointing right.

C.Jogo Batalha das Frações

JOGO *Batalha das Frações*

Regras do Jogo :

- O jogo é formado por 18 cartas, cada uma contendo uma fração diferente.
- Pode ser jogado em duplas ou em grupos de quatro jogadores, sendo dois contra dois.
- Cada jogador (ou dupla) recebe 9 cartas, que devem permanecer viradas para baixo , formando um monte.

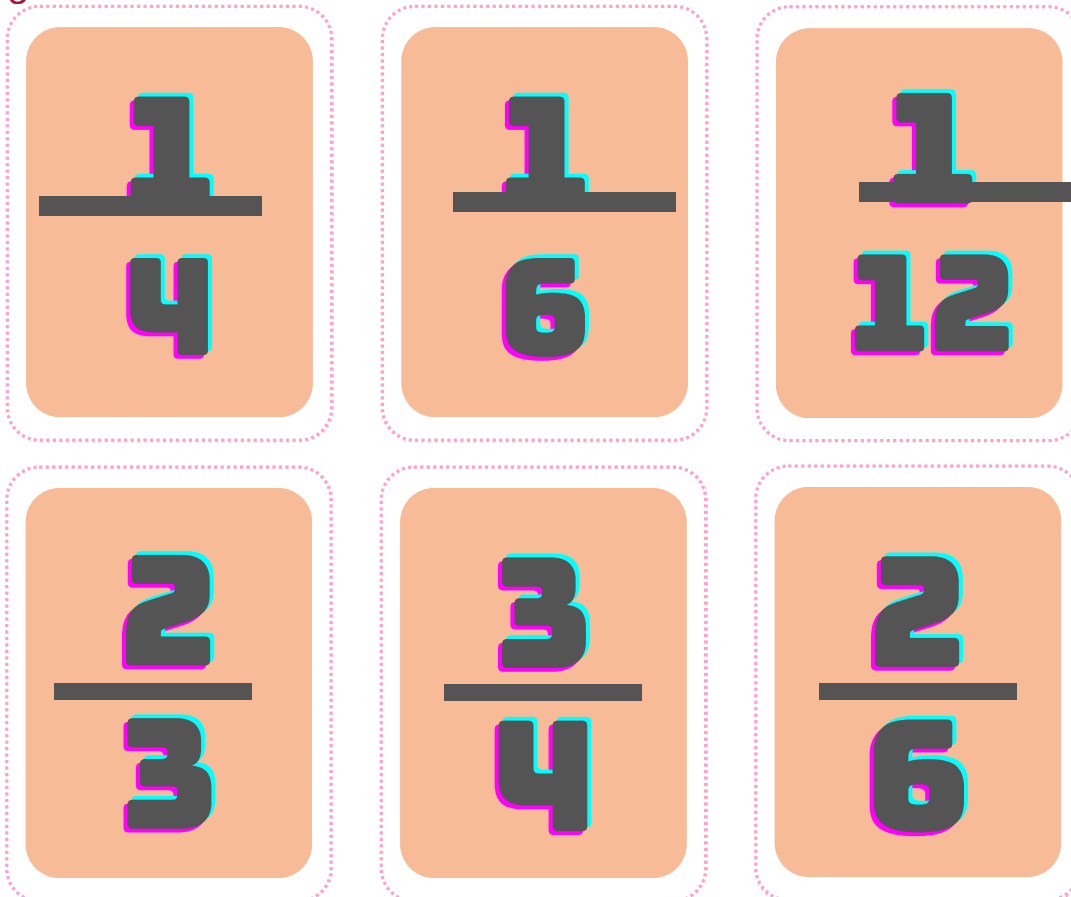
Dinâmica da rodada

- Todos os jogadores viram, ao mesmo tempo, a carta do topo do seu monte.
- Compara-se as frações apresentadas.
- O jogador (ou grupo) que tiver a maior fração leva todas as cartas viradas naquela rodada.

Critério de vitória

- O jogo segue até que todas as cartas tenham sido jogadas.
- Vence o jogador (ou grupo) que, ao final da última rodada, tiver acumulado o maior número de cartas.

 recorte as cartas





$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{12}$$

$$\frac{3}{12}$$

$$\frac{5}{12}$$

$$\frac{11}{12}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{8}{12}$$

$$\frac{4}{4}$$

$$\frac{10}{12}$$

JOGO Batalha das Frações

D.Jogo Memória Racional

JOGO *Memória Racional*

Regras do Jogo :

- O jogo pode ser jogado por 2 a 4 participantes.
- Todas as cartas (frações e decimais) devem ser embaralhadas e dispostas viradas para baixo sobre a mesa.
- Cada jogador, em sua vez, pode virar duas cartas.
- Se as cartas formarem um par equivalente (uma fração e seu número decimal correspondente), o jogador fica com o par e joga novamente.
- Se as cartas não formarem par, deve virá-las novamente para baixo, no mesmo lugar, passando a vez ao próximo jogador.

Dinâmica da rodada

- O jogo continua até que todos os pares tenham sido encontrados.
- Durante a partida, os jogadores devem tentar memorizar a posição das cartas para aumentar suas chances de acerto.

Critério de vitória

- Vence o jogador que tiver mais pares de cartas equivalentes ao final do jogo.
- Em caso de empate, vence quem tiver feito o último acerto.



$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{4}$
$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{15}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{1}{10}$

E. Atividade Varal dos Racionais

ATIVIDADE *Varal dos Racionais*

Dinâmica da atividade

- Os estudantes devem analisar as 6 cartas e colocá-las em ordem crescente, comparando as diferentes representações numéricas.

The image displays 14 cards with mathematical expressions, arranged in a grid. The cards are orange with rounded corners and a dashed border. The expressions are:

- Row 1: $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{3}$, 1 , $\frac{3}{2}$
- Row 2: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, 1 , $\frac{2}{3}$
- Row 3: $\frac{5}{0}$, $\frac{52}{0}$
- Row 4: $0,5$, $0,25$

Arrows labeled "dobre" point from the $\frac{5}{0}$ cards to the $0,5$ and $0,25$ cards, indicating a doubling operation.

F.Atividade Porcentagem em partes

ATIVIDADE *Porcentagem em partes*

Dinâmica da atividade

- Os estudantes receberão as 4 tabelas.
- Na tabela dividida em 4 partes, já está indicado que cada parte vale 25%.
- Os alunos devem completar as demais tabelas, descobrindo quanto vale cada parte em porcentagem.
- Depois, eles utilizam as tabelas para representar diferentes frações em porcentagem.

25%	25%
25%	25%

%	%	%	%	%
---	---	---	---	---

ATIVIDADE *Porcentagem em partes*

%	%	%	%	%
%	%	%	%	%

%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
%									
%									
%									
%									
%									
%									
%									
%									
%									

G.Jogo Baralho das Representações

JOGO *Baralho das Representações*

Regras do Jogo :

- O jogo é formado por 56 cartas, cada uma contendo uma fração diferente.
- Pode ser jogado de 2 a 5 participantes.
- Cada jogador recebe 6 cartas, o restante forma o monte (virado para baixo) e a primeira carta é colocada virada ao lado, iniciando a pilha de descarte.

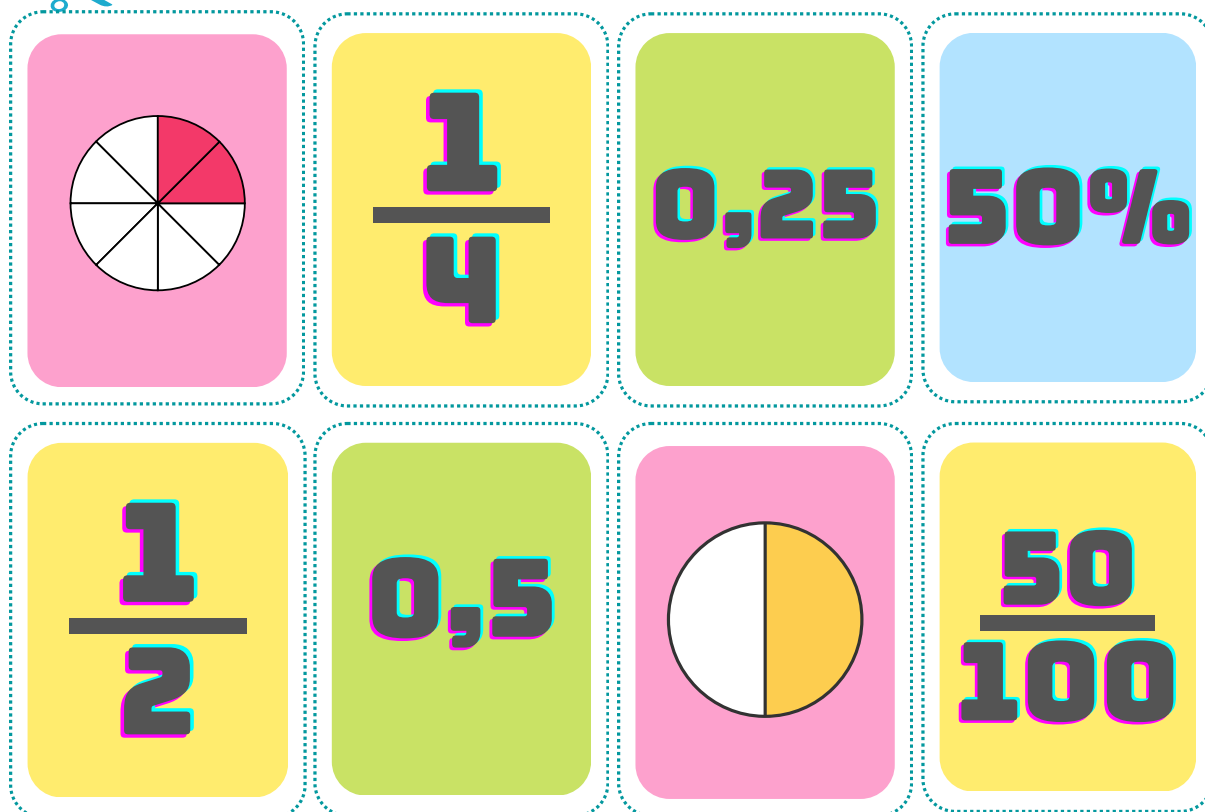
Dinâmica da rodada

- Na sua vez, o jogador deve:
 - Comprar 1 carta (do monte ou da pilha de descarte);
 - Em seguida, descartar 1 carta na pilha de descarte.
 - O objetivo é formar trios de cartas equivalentes (mesmo número racional representado em fração, decimal, porcentagem, ou pictórica).
 - Ao formar um trio, o jogador deve baixar as cartas na mesa, deixando-as visíveis.
 - O jogo segue em rodadas, com todos comprando e descartando até alguém completar o objetivo final

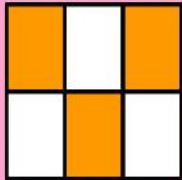
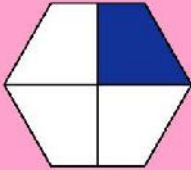
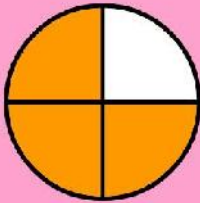
Critério de vitória

- Caso o monte acabe e nenhum jogador tenha vencido, embaralha a pilha de descarte e reabastece o monte.
- Vence o jogador que primeiro conseguir baixar dois trios (6 cartas no total).

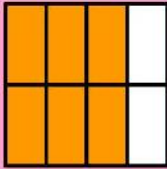

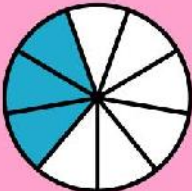
 recorte as cartas




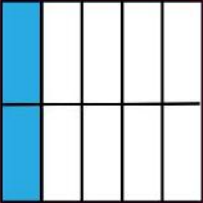
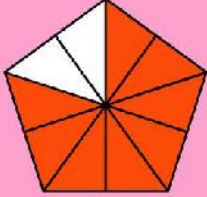
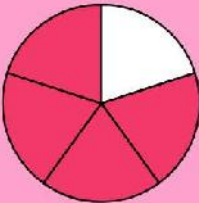
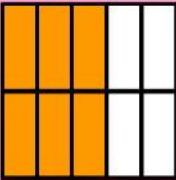
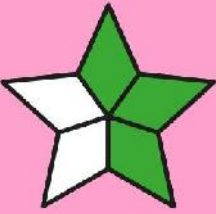
 recorte as cartas

	$\frac{2}{8}$	0,75	25%
	$\frac{3}{4}$		75%

JOGO *Baralho das Representações*

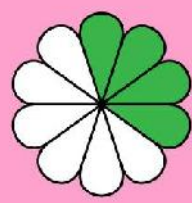
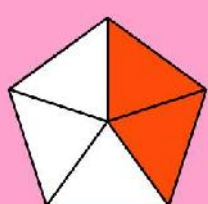
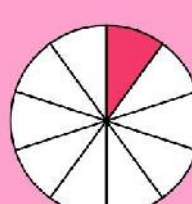
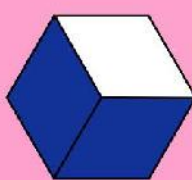
	$\frac{75}{100}$		0,8
$\frac{1}{3}$		80%	0,33...

 recorte as cartas

$\frac{1}{5}$		20%	0,2
$\frac{2}{10}$		0,6	
	$\frac{4}{5}$	60%	0,4
$\frac{30}{50}$			$\frac{3}{5}$

JOGO *Baralho das Representações*

 recorte as cartas

$\frac{80}{100}$	10%		$\frac{2}{5}$
$\frac{40}{100}$		40%	$\frac{1}{10}$
0,1	$\frac{10}{100}$		$\frac{2}{3}$
0,66...	$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{6}$

JOGO *Baralho das Representações*

Uma proposta didática para uma abordagem mais intuitiva de problemas de contagem no ENEM.

Robson Fernandes Araújo de Oliveira¹

Fabiano Barbosa Mendes da Silva²

Esta Sequência Didática tem como objetivo desenvolver uma abordagem para o ensino de análise combinatória voltada a estudantes do ensino médio da rede pública de Pernambuco, com foco em um aprendizado mais intuitivo e menos pragmático. A proposta visa ainda preparar os estudantes para as questões de combinatória do ENEM.

Este produto foi elaborado pelo mestrando Robson Fernandes Araújo de Oliveira para obtenção do título de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Seu principal objetivo é fornecer aos docentes uma sequência didática aplicável a alunos do ensino médio, abordando problemas de combinatória. Além disso, busca contribuir para a prática pedagógica dos professores, posto que a variedade de problemas nesse campo pode gerar insegurança até para os docentes, e esta sequência didática visa diminuir algumas das barreiras no processo de ensino-aprendizagem.

7.1 A PROPOSTA DIDÁTICA

7.1.1 INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

¹EREM Padre Machado, robsonfernandes90@gmail.com

²UFRPE, fabiano.msilva@ufrpe.br.

CAPÍTULO 7

7.1.2 CONTEÚDOS ABORDADOS

- Princípio multiplicativo e aditivo.
- Permutação simples.
- Combinação simples.
- Permutação com repetição.
- Combinação completa.
- Fatorial de um número.

7.1.3 TEMA

A resolução de problemas de análise combinatória presentes no ENEM.

7.1.4 JUSTIFICATIVA

Uma das dificuldades dos estudantes do ensino médio no estudo de análise combinatória é a tendência de tentar encaixar o problema em uma fórmula específica para chegar à solução. No entanto, a falta de interpretação adequada do texto e a ausência de prática suficiente com diferentes tipos de questões dificultam esse processo. Isso torna o estudo mecanizado e diminui o interesse dos alunos por essa área. Este trabalho visa desenvolver o estudo da análise combinatória de forma mais natural e intuitiva, como ensinam lima1997 e lima2005 temas, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo. Nesse sentido, o foco central reside na resolução de problemas do ENEM dos mais variados tipos de complexidade sem a utilização a princípio de fórmulas.

7.1.5 COMPETÊNCIAS

- Agrupamentos de elementos que dependam da ordem ou não (com repetição ou não).
- Princípio multiplicativo e aditivo.
- Análise Combinatória: permutação, arranjo e combinação

7.1.6 HABILIDADES

Matriz de Referência do SAEPE do Ensino Médio:

- (Descritor 31) Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.(CAEd, 2023).

BNCC e Currículo de Pernambuco:

- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021).
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.(Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021).

CAPÍTULO 7

- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (Brasil, 2018) e (Pernambuco, 2021).

7.1.7 OBJETIVOS

- Aplicar o jogo senha.
- Definir formalmente os princípios multiplicativo e aditivo. Comentar sobre o jogo senha, após a apresentação dos princípios. Resolver problemas de diferentes níveis, principalmente questões do ENEM.
- Definir o fatorial de um número e apresentar o conceito de permutação.
- Desenvolver o conceito de permutação com repetição.
- Desenvolver a ideia de combinação a partir do princípio multiplicativo.
- Desenvolver o conceito de combinação completa e resolver problemas sobre esse tema.

7.1.8 PÚBLICO-ALVO

Estudantes do Ensino Médio da Rede Estadual de Pernambuco, na faixa etária de 16 a 19 anos.

7.1.9 PERFIL DAS TURMAS

Turmas compostas de 35 a 40 alunos do Ensino Fundamental, da Rede Pública.

7.1.10 RECURSOS

Quadro-branco, marcadores para quadro-branco, computador, calculadora, projetores digitais, provas do ENEM de anos anteriores, livro didático e fichas de exercícios impressas.

7.1.11 AVALIAÇÃO

O processo de avaliação e acompanhamento ocorrerá durante o andamento das atividades propostas, considerando os conhecimentos prévios dos alunos, seu progresso nas tarefas, dedicação, desempenho e desenvolvimento. Também serão feitas avaliações pontuais durante as aulas, além de um teste final.

7.2 ATIVIDADE I

- **Conteúdos abordados:** Conceito de permutação durante a aplicação do jogo senha.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

Apresentação do jogo senha: O jogo Senha, também conhecido como Mastermind, é um jogo de estratégia criado na década de 70, envolvendo permutação, ideal para estimular o pensamento dedutivo. Ele pode ser jogado por duas ou mais pessoas: um jogador assume o papel de criador da senha e os de decifradores.

CAPÍTULO 7

Objetivo do jogo: O decifrador deve descobrir a senha secreta definida pelo criador, com base em uma sequência de cores ou números (dependendo da versão do jogo), em um número limitado de tentativas.

Regras básicas:

1. **Preparação da Senha:** O criador escolhe uma combinação secreta de 4 cores (ou números) e a esconde do outro jogador. A senha não pode conter cores ou números repetidos (dependendo da variante do jogo).
2. **Tentativas de Adivinhação:** O decifrador tenta descobrir a senha fazendo diferentes combinações de peças coloridas (ou números). A cada tentativa, o criador fornece pistas, indicando:
 - Peças estão na cor correta ou o número está correto e na posição correta.
 - Quais cores ou números estão corretos, mas na posição errada.
3. **Limite de Tentativas:** O decifrador tem um número pré-definido de tentativas para adivinhar a senha correta.
4. **Feedback:** Para cada tentativa, o criador utiliza peças menores (ou marcas) para fornecer feedback:
 - Peças pretas indicam que a cor ou o número está correto e na posição certa.
 - Peças brancas indicam que a cor ou o número pertence a senha, mas está na posição errada.

Para contornar a ausência de tabuleiros do jogo Mastermind, o professor pode utilizar a imagem a seguir para aplicar a atividade com seus alunos.

Descrição das atividades

Separar a turma em alguns grupos. Explicar as regras do jogo para a turma toda. Entregar um jogo senha para cada grupo e deixar um tempo para eles jogarem sem mencionar conceitos de análise combinatória. Após esse primeiro momento, realizar um diálogo com a turma sobre alguns problemas de contagem envolvendo as regras do jogo e debater sobre algumas variações possíveis nas regras, como a repetição ou não das cores na senha.

7.3 ATVIDADE 2

- **Conteúdos abordados:** Princípios multiplicativo e aditivo.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

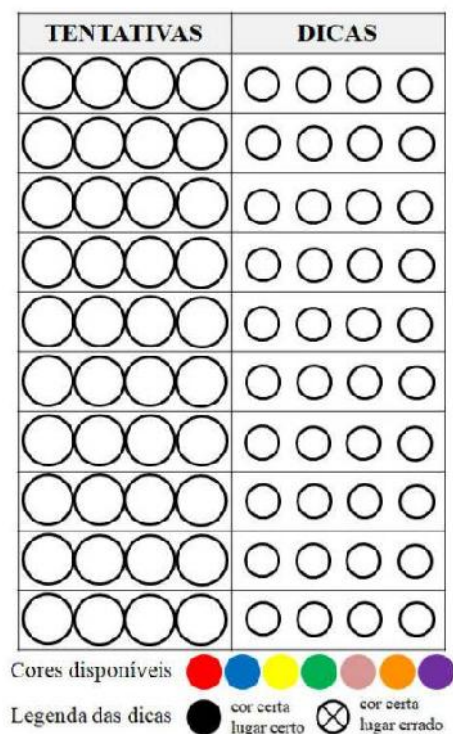
Apresentação dos princípios multiplicativo e aditivo

Objetivos: Definir formalmente os princípios multiplicativo e aditivo. Comentar sobre o jogo senha, após a apresentação dos princípios. Resolver alguns problemas introdutórios e posteriormente avaliar questões do ENEM.

Descrição das atividades

CAPÍTULO 7

Figura 7.1: Jogo senha



Fonte:(Fluminense, 2021)

Apresentar os princípios multiplicativo e aditivo utilizando exemplos clássicos e simples para ilustrar o tema. Em seguida, analisar questões do ENEM que envolvem a aplicação desses princípios. Promover uma discussão sobre as diferentes variações e possíveis respostas para cada problema, avaliando os conhecimentos utilizados para resolvê-los. Depois, dividir a turma em grupos de quatro estudantes e entregar uma ficha de exercícios para cada grupo, permitindo que discutam e reflitam sobre as questões. Após um período de trabalho em grupo, realizar uma discussão com toda a turma sobre as soluções encontradas.

Exercícios introdutórios

- 1 Miguel possui 5 camisas, 3 calças e 2 pares de tênis. Considerando que ele usará uma camisa, uma calça e um par de tênis, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Resolução: Primeiro deixar o aluno pensar sobre o problema sem qualquer interferência. Posteriormente orientar a turma para a criação de uma diagrama de árvore e contar quantas possibilidades de vestimentas Miguel tem. Posteriormente, resolver a questão utilizando o princípio multiplicativo.

- 2 Giovanna vai a um restaurante que oferece 3 opções de entrada, 5 opções de prato principal e 2 tipos de sobremesa. Ao escolher uma entrada, um prato principal e uma sobremesa, de quantas maneiras diferentes Giovanna pode compor seu jantar?

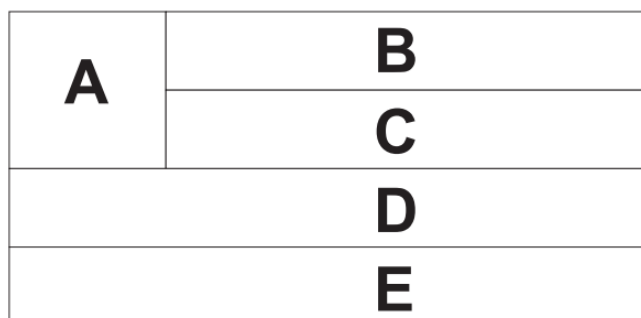
Resolução: Como Giovanna deve tomar 3 decisões sucessivas e independentes, pode-se aplicar o princípio multiplicativo. Portanto tem-se $3 \times 5 \times 2 = 30$ possíveis jantares.

CAPÍTULO 7

Problemas do ENEM

1) (Enem 2015 PPL)

A bandeira de um estado é formada por cinco faixas: A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

- A) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$
- B) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$
- C) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$
- D) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$
- E) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Resolução: Como ensina morgado1991 análise, devemos começar a atacar o problema pela maior restrição e, a partir daí, desenvolver o restante da solução. Assim sendo, para pintar a região A existem 3 cores disponíveis, para pintar a região B há 2 cores e para pintar a região C resta apenas uma cor, pois esta última não pode ser igual à cor da região A e nem da região B. Para pintar a região D tem apenas uma opção, pois ela faz fronteira com as regiões C e A, e para pintar a região E existem 2 cores disponíveis, pois ela só faz divisa com a região D. Agora, basta multiplicar as quantidades de opções disponíveis de pintar cada região.

Dessa forma, o número de maneiras diferentes de pintar essa bandeira é $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.

Resposta B.

Observações. Nesse tipo de questão, o início da resolução é fundamental, pois deve-se sempre analisar primeiro a maior restrição ou o ponto mais crítico do problema a fim de evitar situações mais complexas desnecessárias durante o desenvolvimento da solução.

- 2) (Enem 2014 PPL) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas. Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

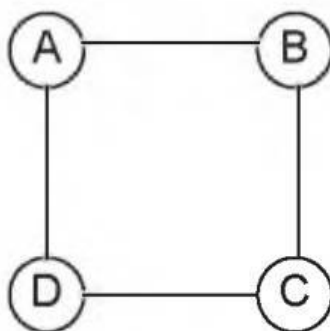
CAPÍTULO 7

- A) 100
- B) 90
- C) 80
- D) 25
- E) 20

Resolução: Devemos introduzir dois novos caracteres na senha, para cada caracter temos 10 possibilidades de escolha e como são dois, aplicando o princípio multiplicativo o número de senhas ficará multiplicado por $10 \times 10 = 100$. Essa questão é uma aplicação direta do princípio multiplicativo da contagem.

Resposta A.

- 3) **(Enem 2016)** Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.



De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

- A) 6
- B) 12
- C) 18
- D) 24
- E) 72

Resolução: Como pontua lima2005temas, devemos sempre que possível nos colocar no lugar da pessoa que vai realizar a atividade descrita no problema. Nesse caso, a ação é pintar o objeto com as restrições apresentadas. Primeiro devemos escolher uma cor entre as 3 para pintar o círculo A (note que a escolha de outro círculo não mudaria a nossa solução), feito isso devemos escolher qual das duas cores vamos usar para pintar o círculo com B (a escolha do círculo D nessa fase não muda nada na solução, mas caso o círculo C for escolhido vamos ter outro tipo de solução). vamos agora pintar o terceiro círculo , escolhendo o círculo D vamos ter duas opções para realizar a pintura, primeira opção: podemos repetir a cor do círculo B e com isso vamos ter uma opção para o círculo D e duas opções para o círculo C. Segunda opção: podemos escolher a cor do círculo A e com isso

CAPÍTULO 7

vamos ter uma opção para pintar o círculo C. Portanto, vamos ter: $3 \times 2 \times 1 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 18$ possibilidades de pintura. Note que usamos os princípios multiplicativo e aditivo nesse problema.

Resposta C.

Em nenhum dos três problemas do ENEM foi necessário o conhecimento de algum tipo de fórmula; foram apenas usados os princípios multiplicativo e aditivo, além de uma boa análise de cada questão.

7.4 ATIVIDADE 3

- **Conteúdos abordados:** Fatorial de um número, permutação simples e com repetição.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

Objetivos: Definir o fatorial de um número e apresentar os conteúdos de permutação simples e composta.

Descrição das atividades

No início da aula, apresentar os conceitos de fatorial de um número, permutação simples e permutação com repetição. Em seguida, dividir a turma em grupos de quatro estudantes e distribuir uma lista de exercícios introdutórios, incluindo problemas retirados do ENEM. Após um tempo para que os alunos possam pensar sobre as questões, promover uma discussão conjunta sobre as soluções encontradas. Avaliar, com a participação da turma, as respostas de cada grupo, analisando o raciocínio utilizado e os passos seguidos para chegar às soluções. Aproveitar o momento para debater quais conhecimentos foram essenciais para resolver os problemas.

Exercícios introdutórios

- 1) Numa brincadeira, 6 crianças fizeram uma fila indiana. A quantidade de maneiras que elas podem ficar na fila é:
 - A) 30 maneiras.
 - B) 12 maneiras.
 - C) 36 maneiras.
 - D) 100 maneiras.
 - E) 720 maneiras.

Resolução: Essa questão é um clássico problema de permutação. Para a posição 1 da fila podemos escolher seis crianças, para a posição 2 da fila 5 crianças, e assim por diante, até restar apenas uma criança para ocupar a última posição na fila. Aplicando o princípio multiplicativo, vamos ter $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneiras de organizar essa fila, ou seja, permutação de 6 elementos distintos.

CAPÍTULO 7

2) Quantas senhas podem ser criadas com 6 algarismos sem repetição?

Resolução: Para escolher o primeiro dígito da senha temos 10 possibilidades, para escolha do segundo temos 9, para o terceiro 8 opções, e assim por diante, até a escolha do sexto dígito com 5 possibilidades. Aplicando o princípio multiplicativo, vamos ter: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ senhas possíveis.

3) Quantos números com 4 algarismos existem?

Resolução: Como ensina (Lima *et al.*, 2005), devemos começar a resolver um problema de contagem pela pior restrição e nesse caso é a escolha do primeiro algarismo que não pode ser o 0, sendo assim, temos 9 possibilidades para o primeiro algarismo, 10 para o segundo, 10 para o terceiro e 10 para o quarto, portanto existem $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números.

Problemas do ENEM

1) **(Enem 2016)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

- A) $10^2 \cdot 26^2$
- B) $10^2 \cdot 52^2$
- C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$
- D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$
- E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Resolução: Primeiro, vamos escolher os algarismos. Como temos 10 opções para cada um dos dois algarismos, há $10 \times 10 = 10^2$ maneiras de fazer essa escolha. Para a escolha das letras temos $52 \times 52 = 52^2$. Como a ordem dos caracteres importa, pois se trata de uma senha, precisamos permutar esses 4 elementos (dois números e duas letras). Assim, o número total de senhas possíveis é dado por: $10^2 \times 26^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}$.

Resposta E.

2) **(Enem 2017 PPL)** Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

CAPÍTULO 7

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a

- A) $26^3 + 9^4$
- B) $26^3 \times 9^4$
- C) $26^3(10^4 - 1)$
- D) $(26^3 + 10^4) - 1$
- E) $(26^3 \times 10^4) - 1$

Resolução: Nesta questão vamos usar a ideia dos princípios multiplicativo e aditivo. Para escolher os três primeiros caracteres, vamos ter $26 \times 26 \times 26 = 26^3$ possibilidades, e para escolher os quatro últimos, vamos ter $10 \times 10 \times 10 - 1 = 10^3 - 1$ possibilidades. Portanto, no total, vamos ter $26^3(10^4 - 1)$ possibilidades de placas.

Resposta C.

7.5 ATIVIDADE 4.

- **Conteúdos abordados:** Combinação simples e com repetição.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

Objetivos: Desenvolver a ideia de combinação simples e com repetição a partir do princípio multiplicativo. Resolver questões introdutórias e problemas do enem sobre o tema sem a utilização das fórmulas.

Descrição das atividades

Apresentar o conceito de combinações por meio do princípio multiplicativo. Em seguida, dividir a turma em grupos e distribuir uma lista de exercícios. Após essa etapa, discutir com a turma a abordagem de cada questão, permitindo que os grupos reflitam e desenvolvam suas próprias ideias. Depois de um tempo para essa reflexão, retomar a discussão com a classe, convidando os grupos a apresentar suas soluções e estratégias para o restante da turma.

Exercícios introdutórios

- 1) Em um grupo com quatro pessoas de quantas maneiras podemos escolher duas para representar o grupo em um evento?

Resolução: Para escolher a primeira pessoa temos quatro opções, para escolher a segunda pessoa temos 3 opções. Usando o princípio multiplicativo $4 \times 3 = 12$ possibilidades, mas contamos casos demais, pois não existe hierarquia entre as pessoas, ou seja, a ordem não importa. Devemos dividir a quantidade encontrada por $2!$. Portanto vamos ter $\frac{4 \times 3}{2!} = 6$ possibilidades de escolha.

- 2) Paulo possui 10 barras de ouro e deseja doá-las a 3 ONGs, garantindo que cada ONG receba ao menos uma barra. De quantas formas diferentes ele pode fazer essa distribuição?

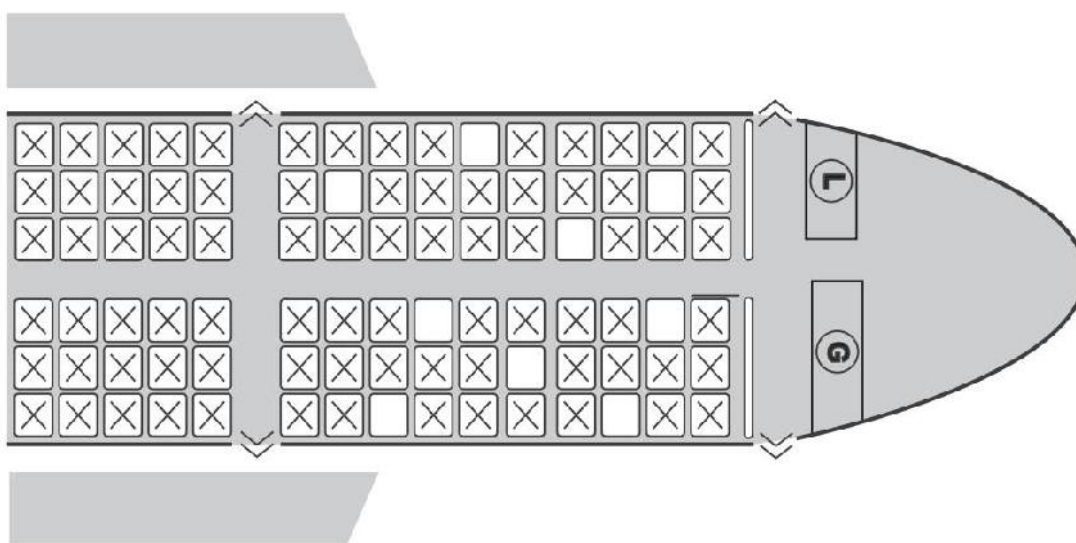
Resolução: Como cada ONG vai ganhar pelo menos uma barra, vão sobrar 7 barras para distribuir entre as três ONGs, ou seja, vamos ter uma combinação com repetição. A quantidade de maneiras de

CAPÍTULO 7

fazer isso usando as ideias de combinação completa é: $\frac{9!}{2! \times 7!} = 36$. Recomenda-se ao professor usar as ideias presentes no livro (Lima *et al.*, 1997) que apresenta de forma mais natural os conceitos de combinação completa.

Problemas do ENEM

- 1) **(Enem 2015)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- A) $\frac{9!}{2!}$
- B) $\frac{9!}{7! \times 2!}$
- C) $7!$
- D) $\frac{5!}{2!} \times 4!$
- E) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Resolução: Existem 9 poltronas vagas no avião para acomodar as sete pessoas da família. Vamos dividir o problema em partes. Primeiro temos 9 lugares para acomodar a primeira pessoa no avião, em seguida vamos ter 8 lugares para a segunda pessoa se sentar, depois 7 para a terceira pessoa e assim sucessivamente até restar 3 cadeiras para a sétima pessoa se sentar. Portanto vamos ter: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 181440$ possibilidades.

Note que: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{9!}{2!}$.

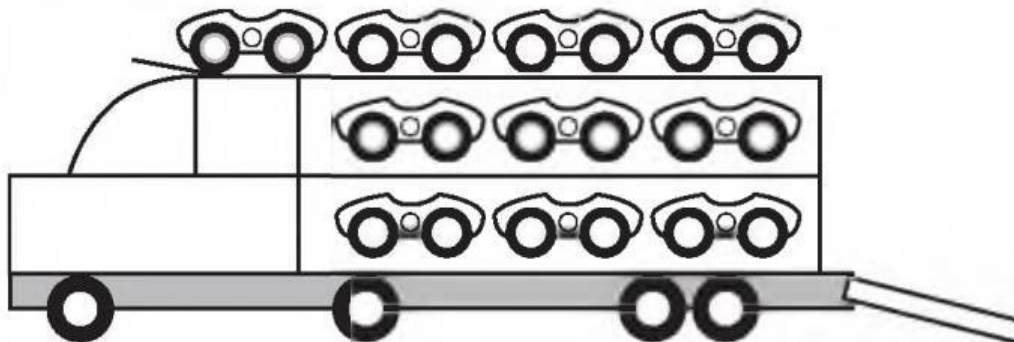
Resposta A.

Observações: Geralmente os estudantes são incentivados a “encaixar” as questões desse tipo em um dos temas da análise combinatória e aplicar a devida fórmula. Essa é uma típica questão de

CAPÍTULO 7

combinação, mas usando apenas o pfc é possível chegar a solução sem a necessidade de aplicação da fórmula.

- 2) (Enem 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- A) $C_{6,4}$ B) $C_{9,3}$ C) $C_{10,4}$ D) 6^4 E) 4^6

Resolução: Como teremos quatro carrinhos fixos, um de cada cor, restarão 6 carrinhos para completar o caminhão. Como as cores podem se repetir, teremos uma combinação com repetição. Aplicando os princípios da combinação com repetição presente em (Lima *et al.*, 1997), chegaremos à solução: $\frac{9!}{3! \times 6!}$.

Resposta B.

7.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho baseia-se nas obras de (Lima *et al.*, 1997) e (Lima *et al.*, 2005), que apresentam abordagens mais naturais e intuitivas para o ensino de análise combinatória. Nelas, o desenvolvimento dos conteúdos se dá por meio de estratégias variadas e técnicas de resolução de problemas, sem priorizar o uso de fórmulas. Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem torna-se mais atrativo para os alunos e mais instigante também para os professores.

CAPÍTULO 7

7.6 REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s. n.], 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

CAED. **Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, 2023. Disponível em: <https://avaliacaoemmonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/colecões>.

FLUMINENSE, Universidade Federal. **Catálogo do Jogo Senha**. [S. l.: s. n.], 2021. Acessado em: 25 out. 2024. Disponível em: <https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2021/04/Catalogo-Senha.pdf>.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. [S. l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1.

LIMA, Elon Lages *et al.* **Temas e problemas elementares**. [S. l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental**. Recife: [s. n.], 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-fundamental-anos-finais/>.

Teorema de Marden: uma proposta didática para o Ensino Médio

Rogério Lima do Nascimento¹

Rodrigo Genuino Clemente²

A presente proposta consiste em uma sequência didática direcionada a estudantes do 3º ano do Ensino Médio, organizada para favorecer a compreensão do Teorema de Marden a partir de conexões entre números complexos, polinômios e geometria. Ela se vale de abordagens algébricas e geométricas no plano complexo para tornar mais evidentes as relações entre as raízes de polinômios cúbicos, as raízes da derivada e a configuração geométrica delas decorrente, contribuindo para o desenvolvimento da visualização, da formulação de conjecturas e da argumentação matemática. A justificativa apoia-se na importância de promover aprendizagens que envolvam raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática, especialmente em contextos nos quais diferentes conceitos possam ser articulados de forma significativa. A sequência contempla diferentes formas de representação, como a linguagem matemática, a interpretação geométrica e a visualização no plano complexo, além de prever momentos de exploração, discussão e análise de estratégias, sem exigir de início um tratamento formal rigoroso, mas preservando a precisão conceitual adequada ao nível de escolaridade dos estudantes.

O trabalho está organizado de modo progressivo. As atividades I e II não recorrem à tecnologia, pois se destinam à retomada e à consolidação de conhecimentos prévios indispensáveis à compreensão do Teorema de Marden, como números complexos, polinômios, derivada e interpretação geométrica no plano, bem como anunciá-lo. Essa escolha parte do entendimento de que a aprendizagem matemática se fortalece quando o estudante consegue atribuir sentido ao que estuda. Nessa direção, Brum, Viera e Ferreira afirmam que

A aprendizagem com significado só será significativa quando novos conhecimentos passam a expressar algo para o aluno, sendo ele é capaz de explicar com as suas próprias palavras, associar e resolver

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), rogeriolima2t@gmail.com

²Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), rodrigo.clemente@ufrpe.br

CAPÍTULO 8

novos problemas. [...] Nesse processo do ensino o professor tem um papel fundamental de mediador atuando de maneira intencional (Campos Moraes Brum; Viera; Ferreira, 2023).

No caso desta proposta, a tecnologia não constitui ponto de partida, mas etapa de aprofundamento. A atividade III, com o uso do GeoGebra, surge quando os estudantes já dispõem de uma base conceitual mínima para interpretar as construções realizadas e perceber, com maior clareza, as relações entre as raízes de um polinômio cúbico, as raízes de sua derivada e a configuração geométrica associada ao Teorema de Marden. Sob essa perspectiva, a visualização não aparece como mero recurso ilustrativo, mas como elemento de compreensão. Como observam Souza e Mattos,

A visualização se apresenta como uma ferramenta potente para atenuar as dificuldades encontradas pelos estudantes na assimilação e reconhecimentos das propriedades. Isto ocorre, pois a visualização é um dos principais canais de percepção e se transforma num dos pilares na aprendizagem dos conceitos geométricos (Souza; Mattos, 2024).

Essa articulação entre consolidação conceitual e exploração dinâmica também se relaciona à formação do professor que ensina Matemática, na medida em que exige planejamento intencional, seleção criteriosa de tarefas e compreensão do lugar que cada recurso ocupa no processo de ensino. Nesse sentido, (Paiva; Sousa; Campos, 2023) indicam, que processos formativos vinculados à investigação de conceitos contribuem para movimentos de ressignificação e ampliação dos saberes mobilizados para o ensino. Do mesmo modo, o uso pedagógico das tecnologias digitais precisa estar subordinado a finalidades matemáticas claras. Por isso, a presença do GeoGebra nesse momento justifica-se menos pelo apelo tecnológico em si e mais por sua capacidade de tornar visíveis relações que, sem esse suporte, tenderiam a permanecer excessivamente abstratas.

Sob esse enfoque, (Nascimento; Silva; Silva, 2025) concluem que “as tecnologias digitais não se restringem ao papel de instrumentos de apoio, pois configuram espaços que favorecem a produção coletiva de significados, o desenvolvimento de estratégias e a construção de autonomia intelectual.” Isso significa compreender o GeoGebra como recurso de exploração, comparação e formulação de conjecturas. Assim, as aulas iniciais cumprem o papel de consolidar os fundamentos conceituais indispensáveis ao desenvolvimento do trabalho, ao passo que a aula com o uso da tecnologia amplia as possibilidades de articulação entre álgebra e geometria. Com isso, o trabalho em sala passa a favorecer a investigação, o levantamento de hipóteses e o estabelecimento de relações matemáticas de modo mais significativo, em sintonia com os objetivos pedagógicos definidos.

8.1 INFORMAÇÃO AO PROFESSOR

Esta proposta didática foi elaborada com o objetivo de oferecer uma possibilidade de exploração do Teorema de Marden em uma perspectiva investigativa, tomando esse resultado como eixo para a articulação de diferentes ideias matemáticas. Mais do que apresentar um teorema em sua forma acabada, a intenção é propor um percurso de estudo no qual propriedades geométricas e algébricas possam ser observadas, relacionadas e discutidas de maneira gradual, valorizando a construção de significados ao longo do processo.

Ela parte da configuração formada pelas raízes de um polinômio cúbico no plano complexo e das relações que emergem entre o triângulo por elas determinado e a elipse associada a essa disposição. A partir dessa

CAPÍTULO 8

estrutura, tornam-se exploráveis não apenas noções ligadas aos números complexos, aos polinômios e à geometria do plano, mas também ideias como ponto médio, baricentro, derivada, interpretação geométrica de resultados algébricos, invariância por transformações geométricas e relações entre diferentes formas de representação matemática. Desse modo, o Teorema de Marden passa a ser compreendido menos como um resultado isolado e mais como uma possibilidade de organizar um campo rico de investigações. Ao longo da sequência, o foco não recai sobre a formalização imediata do teorema, mas sobre a observação de regularidades, a análise de construções e a interpretação das relações presentes em cada etapa do percurso. Isso permite a condução do trabalho de forma gradual, fazendo com que as propriedades envolvidas apareçam como resposta a questões construídas no próprio desenvolvimento das atividades. Nessa perspectiva, o valor pedagógico da proposta está justamente na possibilidade de promover um estudo em que a Matemática se revele como um sistema de relações, e não apenas como um conjunto de procedimentos independentes entre si.

Para favorecer esse percurso, o uso do GeoGebra pode contribuir de maneira significativa, sobretudo ao permitir que certas regularidades sejam observadas em tempo real.

A condução das atividades pode alternar momentos de exploração individual, discussão em pequenos grupos e socialização coletiva, de modo a favorecer tanto a elaboração pessoal das ideias quanto a circulação de estratégias e interpretações distintas. Sendo assim, cabe ao professor criar condições para que os estudantes descrevam o que observam, formulem conjecturas, testem possibilidades e reorganizem seus raciocínios à medida que novas relações vão sendo percebidas. Mais do que antecipar conclusões, interessa acompanhar a construção dessas compreensões e orientar o olhar dos estudantes para os elementos matemáticos mais relevantes da ação didática.

A avaliação pode ser desenvolvida de forma processual e contínua, considerando não apenas os resultados obtidos, mas também a qualidade dos registros produzidos, a coerência das justificativas apresentadas e a capacidade de relacionar aspectos geométricos e algébricos ao longo das atividades. Nesse contexto, eventuais erros ou hesitações não devem ser tomados apenas como falhas, mas como indícios do percurso de aprendizagem, oferecendo ao professor elementos importantes para compreender as dificuldades da turma e redimensionar suas intervenções.

Esta sequência didática surge como uma oportunidade instigante para o professor explorar o Teorema de Marden, sem se prender rigidamente a conteúdos curriculares pré-definidos. Ela convida a uma imersão em ideias matemáticas essenciais, bem entrelaçadas e cheias de potencial conceitual. Ao privilegiar a investigação ativa, a percepção visual natural e a análise das relações entre diferentes objetos matemáticos, pretende-se construir um percurso de aprendizagem que seja ao mesmo tempo cativante, integrado e significativo.

8.2 A PROPOSTA DIDÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

CAPÍTULO 8

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Números complexos.
- Funções polinomiais.
- Triângulos.
- Elipses.

TEMA

Teorema de Marden.

JUSTIFICATIVA

A articulação entre Álgebra e Geometria, no estudo do Teorema de Marden, permite explorar conceitos de números complexos, polinômios cúbicos, derivada e interpretação geométrica no plano. Tal abordagem favorece a visualização das relações entre raízes, triângulo, baricentro e elipse, podendo proporcionar ao estudante uma compreensão mais integrada dos conceitos matemáticos, além de estimular a formulação de conjecturas, a interpretação de representações e a argumentação. O uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, pode ampliar essas possibilidades de exploração e visualização.

COMPETÊNCIAS (BRASIL, 2018)

- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES

Habilidades (BRASIL, 2018) e Currículo de Pernambuco (Pernambuco. Secretaria de Educação, 2026a), (Pernambuco. Secretaria de Educação, 2026b), (Pernambuco. Secretaria de Educação, 2026e), (Pernambuco. Secretaria de Educação, 2026c) e (Pernambuco. Secretaria de Educação, 2026d)

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

CAPÍTULO 8

- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
- Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Habilidades consolidadas (BRASIL, 2018)

- (EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
- (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Possibilidades de articulação da proposta

- Em componentes de aprofundamento do Ensino Médio que favoreçam a exploração de relações entre Álgebra e Geometria.
- Em projetos integradores, especialmente quando a proposta de trabalho envolver investigação, modelagem, visualização e uso de tecnologias digitais.
- Pode também ser adaptada a turmas de cursos técnicos integrados cujos componentes curriculares de Matemática contemplem conteúdos afins, como números complexos, polinômios, equações polinomiais, funções e geometria analítica.
- Em especial, a proposta dialoga de modo mais evidente com percursos formativos em que haja estudo prévio de transformações geométricas, plano cartesiano, ponto médio, relações funcionais e interpretação geométrica de expressões algébricas.

CAPÍTULO 8

OBJETIVOS

- Compreender o Teorema de Marden como resultado que articula propriedades algébricas e geométricas no plano complexo.
- Relacionar as raízes de um polinômio cúbico e as raízes de sua derivada à configuração geométrica correspondente.
- Explorar a interpretação geométrica de conceitos como ponto médio, baricentro, transformações geométricas e elipse no contexto da proposta.
- Desenvolver a capacidade de observar regularidades, formular conjecturas e interpretar diferentes representações matemáticas.
- Utilizar construções geométricas, registros algébricos e recursos digitais, especialmente o GeoGebra, para investigar propriedades associadas ao Teorema de Marden.
- Favorecer a argumentação matemática e a comunicação de ideias a partir da análise de estratégias e resultados produzidos ao longo das atividades.

PÚBLICO-ALVO

Estudantes do 3º ano do Ensino Médio, em especial aqueles inseridos em componentes de aprofundamento, projetos integradores, atividades complementares ou turmas de cursos técnicos integrados cujos componentes curriculares contemplem, em alguma medida, números complexos, funções polinomiais, geometria analítica e recursos de visualização matemática.

PERFIL DAS TURMAS

Turma com conhecimentos prévios já consolidados ou em processo de consolidação em relação a

- plano cartesiano;
- números complexos;
- funções polinomiais;
- Derivada de funções polinomiais;
- fatoração algébrica;
- média aritmética;
- ponto médio de um segmento;
- mediana e baricentro de um triângulo;
- reflexão em relação a um ponto;
- elipse;
- leitura de representações numéricas, algébricas e gráficas.

CAPÍTULO 8

RECURSOS

Quadro; marcadores para Quadro branco ou gizes; apagador; papel sulfite, papel milimetrado ou quadriculado; régua; atividades impressas; laboratório de informática; computador com projetor; internet e software GeoGebra.

AVALIAÇÃO

A avaliação será desenvolvida de forma processual e formativa, acompanhando o percurso de aprendizagem construído ao longo da sequência. Serão considerados não apenas os resultados obtidos, mas também a participação dos estudantes nas discussões, a qualidade dos registros produzidos, a coerência das justificativas apresentadas, a capacidade de observar regularidades, formular conjecturas e articular aspectos algébricos e geométricos nas atividades propostas. Nesse processo, eventuais erros e hesitações não serão compreendidos apenas como falhas, mas como indícios do modo como os estudantes elaboram e reorganizam seus raciocínios, oferecendo subsídios para a mediação docente e para o redimensionamento das intervenções pedagógicas.

8.3 ATIVIDADE I

- **Conteúdos abordados:** Números complexos e Funções polinomiais (ou polinômios).
- **Quantidade de aula/tempo:** Duas aulas/1h 40 min.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: Representação geométrica de um número complexo e Raízes de uma função polinomial.

1. Represente geometricamente os números:
 - a) $2 + 2i$ e $-2 + 2i$.
 - b) $1 + i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$.
2. Qual número complexo está associado ao ponto $(3, -1)$?
3. Dois números complexos distintos podem representar o mesmo ponto no plano? Justifique.
4. Determine as raízes de
 - a) $p(z) = (z - 1)(z + 2)$.
 - b) $p(z) = (z - 3i)(z - 1)(z + 1)$
5. As raízes de uma função polinomial do 2º grau podem ser associadas a quantos pontos no plano complexo? E do 3º grau?

SITUAÇÃO-PROBLEMA

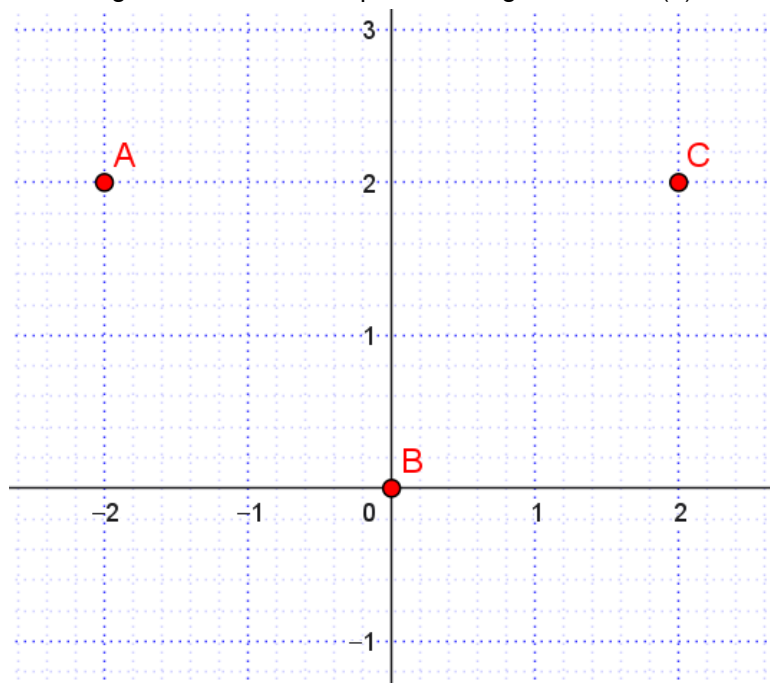
Figura 8.1: Pontos no plano de Argand-Gauss (a).

CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.2: Pontos no plano de Argand-Gauss (b).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A abordagem inicial da aula pode ser estruturada a partir da exibição de representações no plano de Argand–Gauss, tomando a imagem como elemento desencadeador da discussão. A intenção, nesse momento, é mobilizar a observação dos estudantes diante da disposição dos pontos e da figura geométrica que eles sugerem, incentivando a formulação de hipóteses e interpretações. Para isso, o professor pode conduzir a discussão com perguntas como: Que figura geométrica parece emergir da plotagem desses pontos? De que modo esses pontos se organizam no plano? E quais características geométricas podem ser identificadas a partir dessa representação? Tal encaminhamento contribui para que os estudantes estabeleçam, desde o início, uma articulação entre representação algébrica e interpretação geométrica.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Neste momento da aula, os estudantes poderão ser organizados em pequenos grupos, com o objetivo de observar, analisar e discutir as representações apresentadas no plano de Argand–Gauss. A

CAPÍTULO 8

partir da representação gráfica dos pontos, espera-se que cada grupo formule hipóteses sobre a figura geométrica obtida, bem como sobre possíveis relações entre a posição desses pontos e os conceitos matemáticos envolvidos. Durante esse processo, o professor atuará como mediador das discussões, incentivando a participação dos estudantes por meio de questionamentos, sem, contudo, antecipar respostas ou conclusões. Ao final da atividade, cada grupo poderá socializar com a turma suas percepções, destacando a figura identificada e os argumentos utilizados para justificar sua interpretação.

EXPLICAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO

Nesta etapa, cabe ao professor organizar e sistematizar os conceitos mobilizados ao longo da aula, retomando as discussões realizadas pelos estudantes acerca da representação de números complexos como pontos no plano de Argand-Gauss e da identificação das raízes de um polinômio a partir de sua forma fatorada. Nesse momento, o docente pode destacar os procedimentos utilizados pelos alunos para localizar essas raízes no plano e analisar a configuração geométrica determinada por esses pontos, incentivando a percepção de que tais representações não são aleatórias, mas podem revelar figuras e relações matemáticas relevantes. Além disso, é importante confrontar diferentes estratégias de resolução, esclarecer possíveis equívocos conceituais e consolidar a compreensão de que a escrita algébrica e a interpretação geométrica constituem formas complementares de observar um mesmo objeto matemático.

GENERALIZAÇÃO

Na sequência, o professor deverá explicitar que as raízes de uma função polinomial, além de serem compreendidas como soluções algébricas, também podem ser representadas como pontos no plano de Argand-Gauss. Assim, no caso de um polinômio do 2º grau com duas raízes distintas, esses pontos ficam alinhados, enquanto, no caso de um polinômio do 3º grau com três raízes distintas e não colineares, eles determinam um triângulo. Ao observar a posição desses pontos no plano, os estudantes poderão perceber que essa disposição não ocorre de forma aleatória, mas revela aspectos geométricos que merecem ser explorados.

Orientações ao professor:

Os momentos destinados à situação-problema, à busca de soluções, à explicação e consolidação, bem como à generalização, não devem ser compreendidos de forma isolada, mas como etapas articuladas de um mesmo processo didático. Por essa razão, convém que sejam conduzidos de modo coeso e equilibrado, preservando a unidade da atividade e favorecendo a construção gradual das ideias matemáticas.

No momento voltado à busca de soluções, podem ser exploradas as imagens apresentadas na situação-problema, assim como outros exemplos que se mostrem pertinentes ao desenvolvimento da aula. Já na etapa de explicação e consolidação, as questões da avaliação diagnóstica podem servir de apoio ao trabalho do professor, permitindo retomar, discutir e resolver cada uma delas junto aos estudantes. Por fim, a etapa de generalização destina-se à sistematização das observações realizadas ao longo da atividade, sintetizando os principais resultados construídos coletivamente. Após esse fechamento, proponha os exercícios a seguir com a finalidade de retomar e fortalecer os conhecimentos mobilizados.

CAPÍTULO 8

EXERCÍCIOS

Com o objetivo de retomar os conceitos trabalhados ao longo da aula, propõe-se a seguinte atividade de fechamento, centrada na identificação das raízes de polinômios escritos na forma fatorada, em sua representação no plano de Argand-Gauss e na observação da figura determinada por esses pontos. Nesse momento, torna-se necessário que os estudantes, organizados nos mesmos grupos formados anteriormente, respondam às questões propostas, registrando suas resoluções nos respectivos cadernos.

1. Considere a função polinomial $p(z) = (z - 2i)(z + i)$.
 - (a) Determine as raízes de $p(z)$.
 - (b) Represente essas raízes no plano de Argand-Gauss.
 - (c) Em qual eixo do plano esses pontos estão localizados?
 - (d) O que isso indica sobre essas raízes?
2. Considere a função polinomial $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)$.
 - (a) Determine as raízes de $p(z)$.
 - (b) Represente essas raízes no plano de Argand-Gauss.
 - (c) Ligue os pontos obtidos. Que figura é formada?
 - (d) Essa figura está inteiramente sobre uma mesma reta? Explique.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

A avaliação considerará a participação dos estudantes ao longo das atividades, especialmente seu envolvimento nas discussões e nas tarefas propostas. Também serão observadas as estratégias mobilizadas na resolução dos exercícios e a clareza dos registros realizados. Além disso, serão levados em conta os avanços apresentados pelos estudantes em relação ao diagnóstico inicial. Desse modo, busca-se acompanhar não apenas o resultado final, mas também o desenvolvimento da compreensão ao longo da aula.

8.4 ATIVIDADE II

- **Conteúdo abordado:** Derivada de funções polinomiais, Elipse de Steiner inscrita e o Teorema de Marden.
- **Quantidade de aula/tempo:** Duas aulas/1h 40 min.

CAPÍTULO 8

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: Grau da derivada de funções polinomiais, Coordenadas do baricentro de um triângulo e Elipse.

1. Considere um polinômio cúbico com três raízes distintas

$$p(z) = [z - (1 + i)][z - (3 + i)][z - (2 + 4i)].$$

Para este exercício,

$$p'(z) = 3z^2 - (12 + 12i)z + (9 + 24i)$$

e

$$p''(z) = 6z - (12 + 12i).$$

- a) Qual será o grau de $p'(z)$ e de $p''(z)$?
- b) Quantas raízes possuem $p'(z)$ e $p''(z)$?
2. As raízes de um polinômio cúbico são $(-4,0)$; $(2,-3)$ e $(2,3)$. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo determinado por elas.
3. Considere a elipse de equação reduzida

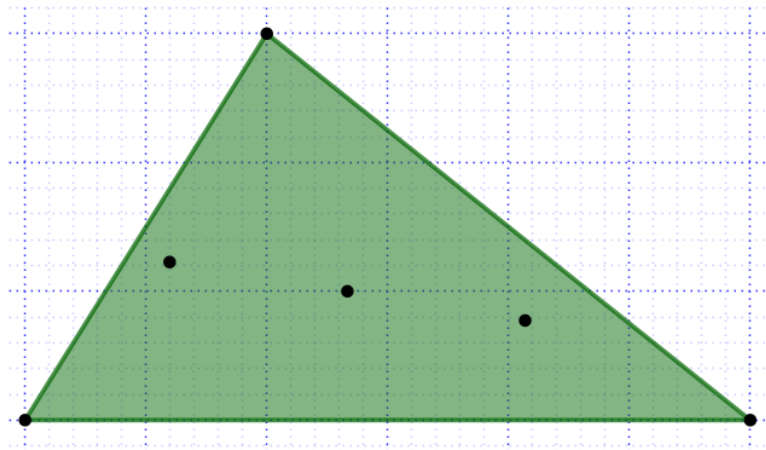
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Para essa elipse, determine:

- a) as coordenadas do seu centro;
- b) as coordenadas de seus focos.

SITUAÇÃO-PROBLEMA

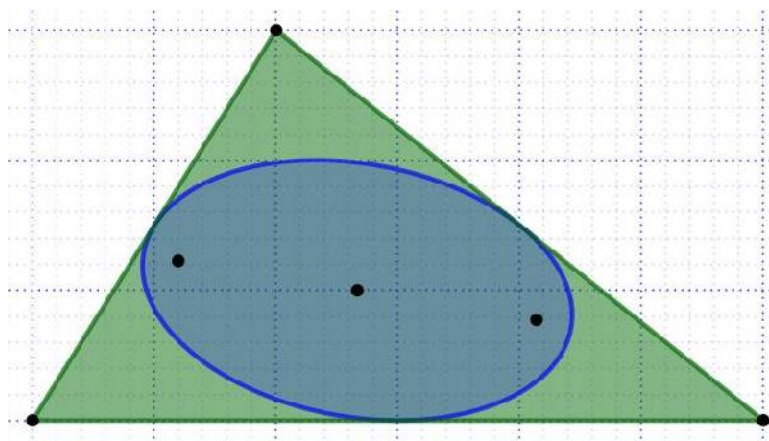
Figura 8.3: Teorema de Gauss - Lucas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.4: Elipse de Steiner inscrita.

CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.

A etapa inicial da aula pode ser organizada a partir da apresentação de uma ou mais figuras no plano de Argand–Gauss que evidencie a posição das raízes de um polinômio, das raízes de sua derivada e da elipse associada ao triângulo por elas determinado. Tomando essas representações como ponto de partida, busca-se despertar a atenção dos estudantes para a disposição geométrica desses elementos no plano e para as relações que podem ser estabelecidas entre eles. Nesse momento, o professor pode conduzir a discussão por meio de indagações como: Onde estão localizadas as raízes do polinômio? Em que região aparecem as raízes da derivada? Que figura geométrica é formada pelas raízes do polinômio? O que se pode observar em relação à elipse inscrita nesse triângulo? De que modo esses diferentes elementos parecem se relacionar no plano? Com esse encaminhamento, favorece-se uma leitura inicial de natureza investigativa, permitindo que os estudantes percebam, de forma gradual, a articulação entre propriedades algébricas e geométricas envolvidas nessa configuração.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nesta etapa, poderá ser mantida a organização dos estudantes em grupos, conforme estabelecido na atividade anterior. A mediação docente deverá orientar a discussão de modo a estimular a observação atenta da posição das raízes do polinômio e de sua derivada no plano de Argand–Gauss, bem como o reconhecimento da figura geométrica determinada por esses pontos. Paralelamente, a análise da elipse inscrita no triângulo poderá contribuir para a identificação de relações entre seus elementos notáveis e a configuração apresentada. Com esse encaminhamento, busca-se favorecer interpretações construídas a partir da própria observação, levando os estudantes a formular hipóteses sobre as articulações entre os aspectos algébricos e geométricos envolvidos.

EXPLICAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO

Neste momento, o professor poderá realizar com os estudantes uma construção manual, atribuindo-lhes um significado matemático mais preciso. A discussão pode ser conduzida a partir da ideia central do Teorema de Gauss–Lucas, destacando que as raízes da derivada de um polinômio se localizam no interior do fecho convexo determinado pelas raízes do polinômio original. No caso analisado, essa observação permite avançar para uma interpretação geométrica mais rica, mostrando que as raízes da primeira derivada estão associadas a elipse de Steiner inscrita. Além disso, o professor poderá evidenciar que a

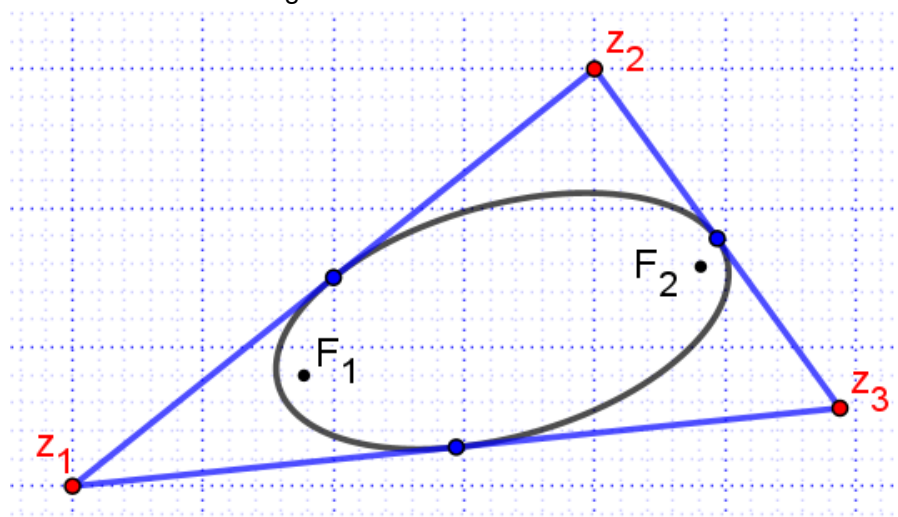
CAPÍTULO 8

raiz da segunda derivada coincide com o baricentro do triângulo, reforçando a relação entre derivação e interpretação geométrica. Ao final dessa sistematização, caberá ao professor enunciar o Teorema de Marden, de modo a formalizar as relações observadas e conferir maior precisão matemática às conclusões construídas ao longo da aula.

GENERALIZAÇÃO

Ao final, o professor poderá apresentar uma figura acompanhada do enunciado do Teorema de Marden, de modo a sintetizar as relações discutidas ao longo da aula. Esse recurso favorece a visualização da conexão entre as raízes do polinômio cúbico, as raízes de sua derivada e a elipse de Steiner inscrita. Assim, o resultado passa a ser compreendido não apenas em sua formulação teórica, mas também em sua interpretação geométrica.

Figura 8.5: Teorema de Marden.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Orientações ao professor:

Apresente, ao longo dos encaminhamentos da atividade, as imagens inicialmente mobilizadas na situação-problema, de modo que elas possam sustentar a discussão em cada momento da aula, desde a etapa de busca por soluções até a sistematização e a generalização. Em seguida, considere um exemplo simples de polinômio cúbico e represente suas raízes no plano de Argand-Gauss. A partir dessa construção, conduza, de forma articulada com os estudantes, a análise das raízes da derivada, interpretando-as como os focos da elipse de Steiner inscrita no triângulo determinado pelas raízes do polinômio. Nessa mesma discussão, destaque também o baricentro do triângulo, obtendo suas coordenadas tanto pela média dos vértices quanto pela média das raízes da derivada, ou ainda por meio da raiz da segunda derivada. Desse modo, favorece-se uma abordagem integrada, na qual os estudantes possam perceber, de maneira progressiva, as relações entre polinômios, derivadas e interpretação geométrica no plano complexo.

Exemplos de polinômios cúbicos que podem ser usados na atividade:

$$p(z) = [z - (-4)][(z - (2 + 3i))][z - (2 - 3i)]$$

$$p(z) = [(z - (-3 - 2i))][z - (4i)][z - (3 - 2i)]$$

$$p(z) = [z - (-2 - 2i)][z - (1 + 4i)][z - (4 - 2i)]$$

A seguir tem-se alguns resultados importantes, com bases nas referências (Kalman, 2008), (Bak; Newman, 2010), (Dante, 2007), (Silva Santos, 2014), (Santana, 2014) e (Volpato, 2016). **(Teorema de Marden)** Seja $p(z)$ um polinômio cúbico com coeficientes complexos, cujas raízes z_1, z_2, z_3 são pontos não colineares no plano complexo. Seja T o triângulo com vértices em z_1, z_2, z_3 . Então:

1. Existe uma única elipse inscrita em T que é tangente aos três lados em seus pontos médios.
2. Esta elipse é a elipse de maior área inscrita no triângulo T (elipse de Steiner inscrita).
3. Os focos desta elipse são as raízes da derivada $p'(z)$.

(Teorema de Gauss-Lucas) Ele estabelece que as raízes da derivada de um polinômio com coeficientes complexos se localizam no interior do fecho convexo determinado pelas raízes do polinômio original.

Seja $p(z)$ um polinômio quadrático. Então, a única raiz de $p'(z)$ coincide com a média aritmética das raízes de $p(z)$ e, geometricamente, situa-se no segmento que une essas raízes no plano de Argand-Gauss.

Já no caso em que $p(z)$ é um polinômio cúbico, as raízes de $p'(z)$ pertencem ao fecho convexo determinado pelas raízes de $p(z)$. Em particular, quando as raízes de $p(z)$ são não colineares, as raízes da derivada situam-se no interior do triângulo por elas formado ou sobre seus lados.

(Baricentro) Sejam z_1, z_2 e z_3 as raízes de um polinômio cúbico, não colineares no plano de Argand-Gauss, formando os vértices de um triângulo. Nesse caso, o baricentro G desse triângulo é dado por

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right),$$

em que $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$.

Em termos complexos, essa mesma expressão pode ser escrita como

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Se w_1 e w_2 são as raízes de $p'(z)$, então o baricentro também pode ser obtido pela média dessas raízes, isto é,

$$z_G = \frac{w_1 + w_2}{2}.$$

Além disso, como a segunda derivada $p''(z)$ possui uma única raiz, esse ponto coincide com o

CAPÍTULO 8

baricentro do triângulo, de modo que

$$p''(z_G) = 0.$$

Portanto, o baricentro pode ser determinado de três maneiras equivalentes: pela média dos vértices do triângulo, pela média das raízes da derivada ou, ainda, pela raiz da segunda derivada.

EXERCÍCIOS

Com o propósito de retomar e consolidar os conceitos discutidos ao longo da aula, propõe-se uma atividade de fechamento voltada à análise das raízes do polinômio, das raízes de sua derivada, do Teorema de Gauss–Lucas, da elipse de Steiner inscrita e do Teorema de Marden. Nesta etapa, os estudantes, organizados nos mesmos grupos formados anteriormente, deverão responder às questões propostas, registrando em seus cadernos as resoluções, observações e conclusões elaboradas a partir das discussões realizadas em sala.

1. Considere um polinômio cúbico cujas raízes são representadas, no plano de Argand–Gauss, por três pontos distintos que formam um triângulo. Sabendo que as raízes da derivada desse polinômio também podem ser representadas no mesmo plano, descreva onde elas devem estar localizadas em relação ao triângulo e explique por quê.
2. Na configuração associada ao Teorema de Marden, as raízes da primeira derivada de um polinômio cúbico estão relacionadas a uma elipse notável do triângulo determinado pelas raízes do polinômio. Identifique essa elipse e explique qual é a relação entre ela e as raízes da derivada.
3. Seja $p(z)$ um polinômio de 3º grau com três raízes distintas. Sabendo que a segunda derivada $p''(z)$ possui uma única raiz, explique qual é o significado geométrico desse ponto na configuração estudada e comente por que ele pode ser considerado um elemento importante na interpretação geométrica do polinômio.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Os procedimentos avaliativos serão desenvolvidos de forma contínua, considerando a participação dos estudantes nas discussões em grupo, o envolvimento na análise das construções apresentadas e a capacidade de estabelecer relações entre os aspectos algébricos e geométricos abordados na aula. Também serão levados em conta os registros produzidos nos cadernos, a coerência das respostas apresentadas e a compreensão das ideias relacionadas ao Teorema de Gauss–Lucas, ao Teorema de Marden, à elipse de Steiner inscrita e ao significado geométrico da segunda derivada.

8.5 ATIVIDADE III

- **Conteúdo abordado:** Explorando o Teorema de Marden com o GeoGebra.
- **Quantidade de aula/tempo:** Duas aulas/1h 40 min.

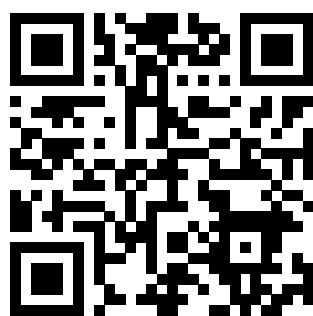
CAPÍTULO 8

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: Teorema de Marden.

1. Considere um triângulo e uma elipse inscrita, tangente aos lados em seus pontos médios. Que propriedade permite identificar essa curva como a elipse de Steiner do triângulo?
2. Se as raízes de um polinômio cúbico formam os vértices de um triângulo no plano, o que o Teorema de Marden afirma sobre as raízes da derivada desse polinômio?

SITUAÇÃO-PROBLEMA

Figura 8.6: Código QR de acesso à construção do Teorema de Marden no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor.

Inicialmente, apresenta-se, por meio do código QR exibido acima, a construção dinâmica elaborada no GeoGebra. A partir desse recurso, convém conduzir a observação da movimentação dos vértices do triângulo, retomando a ideia de que esses pontos representam as raízes de um polinômio cúbico. Nesse momento, é importante destacar também a elipse de Steiner inscrita, chamando atenção para o fato de que ela tangencia os lados nos pontos médios e de que seus focos coincidem com as raízes de $p'(z)$. É oportuno, ainda, retomar o baricentro do triângulo, sua relação com as raízes da derivada e com a raiz de $p''(z)$, além da interpretação geométrica fornecida pelo Teorema de Gauss-Lucas. Trata-se, portanto, de um momento voltado à visualização e à consolidação das ideias discutidas anteriormente, permitindo que os estudantes observem, comparem e atribuam significado aos elementos da construção dinâmica. Em seguida, propõe-se que reproduzam uma construção similar a essa no GeoGebra, de modo a retomar, na prática, as relações geométricas e algébricas exploradas ao longo das atividades.

Orientações ao professor:

Apresente o GeoGebra (GeoGebra, 2026) como um software dinâmico e educativo destinado ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Explique que ele permite a realização de cálculos aritméticos e algébricos, além de oferecer diversas formas de representação gráfica de elementos matemáticos. Informe que seus criadores possibilitam que ele seja baixado no site oficial (<https://www.geogebra.org/download>) e instalado em computadores ou em aparelhos móveis com diferentes sistemas operacionais.

Diga que a proposta desta atividade foi elaborada com base no GeoGebra Classic 5; no link disponibilizado acima, é possível fazer o download dessa versão ou utilizar a versão online do programa.

CAPÍTULO 8

Ao mostrar o GeoGebra aos estudantes, destaque que o foco estará em uma construção similar a apresentada anteriormente; assim, serão mostradas apenas as ferramentas necessárias para esse fim.

A partir desse momento, convém introduzir os recursos básicos do GeoGebra que serão utilizados na construção proposta, de modo a favorecer a familiarização dos estudantes com o ambiente do programa. Esse processo pode ocorrer no decorrer da própria aula, conjuntamente com a turma, à medida que as ferramentas necessárias forem sendo mobilizadas.

Refaça, antes da aula, as construções propostas no GeoGebra, retomando cada uma de suas etapas com atenção aos procedimentos envolvidos. Esse movimento contribui para maior segurança na condução da atividade, mesmo sem formação específica no software.

A seguir, será apresentada, em primeiro lugar, uma visão geral da interface do programa e, posteriormente, o passo a passo de uma construção, utilizando como referência (Calvoso, 2025).



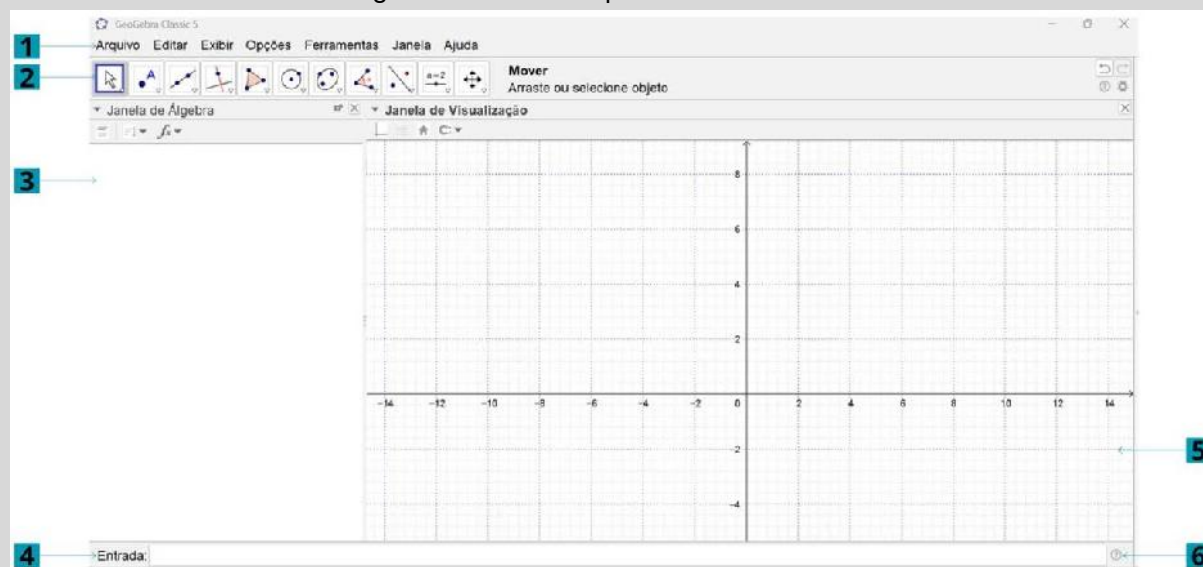
Com o geogebra instalado no computador, clique no atalho . Em seguida, será exibida a janela de carregamento do GeoGebra, , sinalizando a inicialização do programa, que será aberto logo depois. Quando carregado em um computador, o GeoGebra exibe, em sua configuração padrão, a seguinte interface:

Figura 8.7: Interface padrão do GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

1 Barra de Menus. Apresenta opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para ajustar configurações gerais do programa.

2 Barra de Ferramentas (ou de Ícones). Reúne as principais ferramentas usadas para construir pontos, retas, figuras geométricas, bem como para obter medidas dos objetos construídos, entre outras funções. Cada ícone dessa barra pode ocultar outros ícones, que são acessados clicando com o botão direito do mouse no canto inferior direito do próprio ícone.

3 Janela de Álgebra. Espaço em que são apresentadas as coordenadas, equações, medidas e demais atributos dos objetos construídos no ambiente.

CAPÍTULO 8

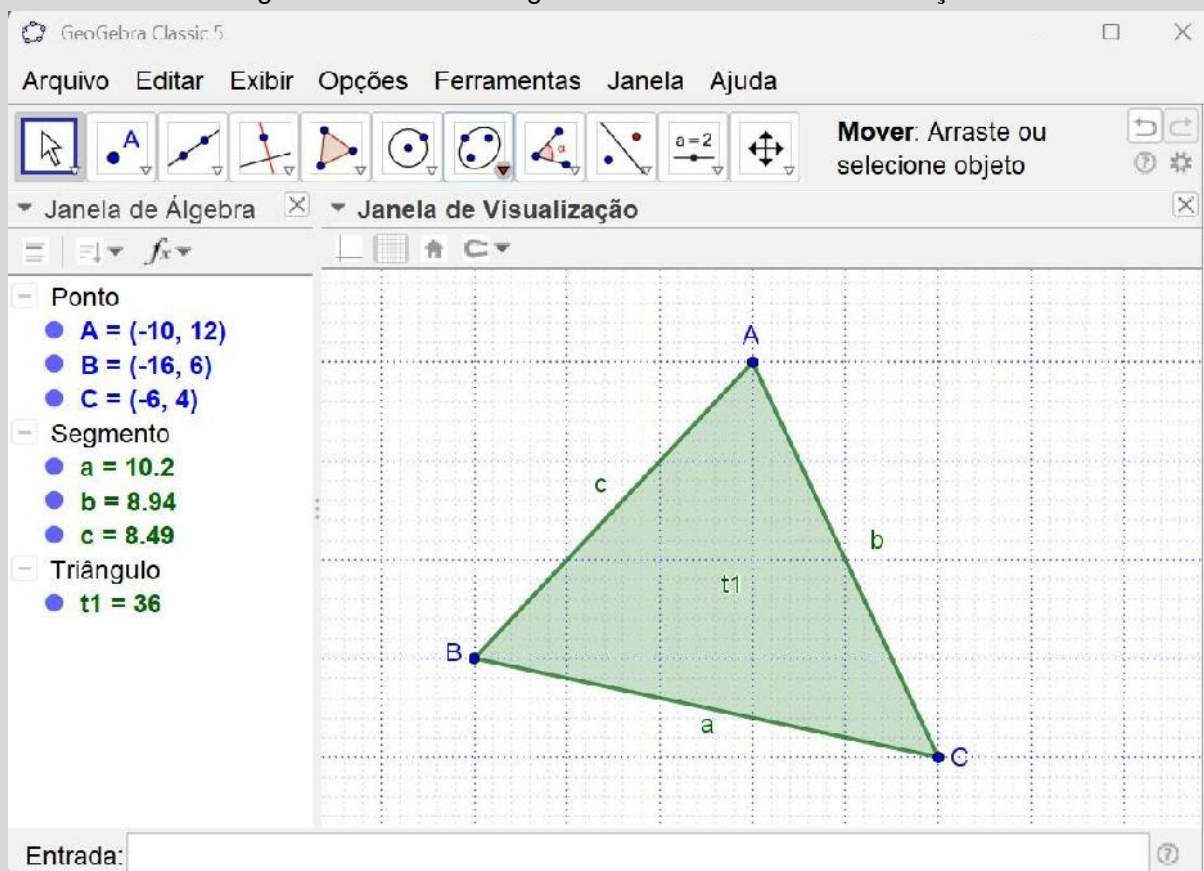
4 Entrada. Campo de texto destinado à digitação de comandos.

5 Janela de Visualização. Área em que são exibidas, de forma gráfica, as figuras e objetos com representação geométrica, que podem ser desenhados com o mouse após a seleção dos ícones na barra de ferramentas.

6 Lista de Comandos. Relação de comandos já definidos no programa. Entre eles, há comandos diretamente relacionados aos ícones da barra de ferramentas.

Observe, na janela de visualização ilustrada na figura a seguir, um triângulo construído em um plano cartesiano.

Figura 8.8: Janela de Álgebra Versus Janela de Visualização.



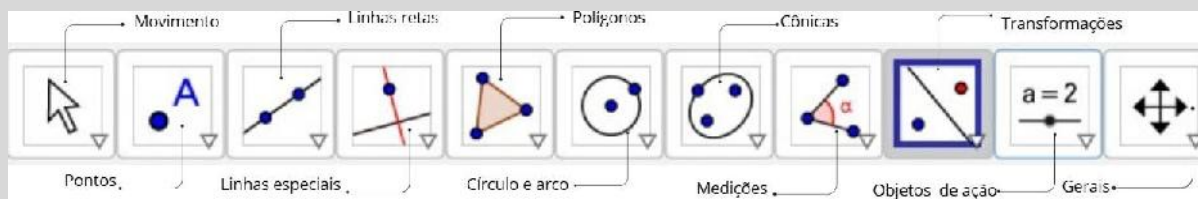
Fonte: Elaborado pelo autor.

Perceba que, na Janela de Visualização, aparece a representação geométrica de um triângulo com vértices A, B e C e lados indicados por a, b e c. Note ainda que, no lado esquerdo da tela, na Janela de Álgebra, são mostradas as coordenadas de cada vértice, as medidas dos lados a, b e c, em cm, e a área do triângulo (30 cm²), o qual foi automaticamente nomeado pelo GeoGebra como t1.

A barra de ferramentas é formada por 11 grupos de ícones, que reúnem os recursos de que o usuário precisa para construir objetos, movimentá-los, obter medidas e ajustar seus atributos. Na figura a seguir, é possível visualizar esses grupos e identificar o nome de cada conjunto de ícones.

Figura 8.9: Barra de ferramentas.

CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.


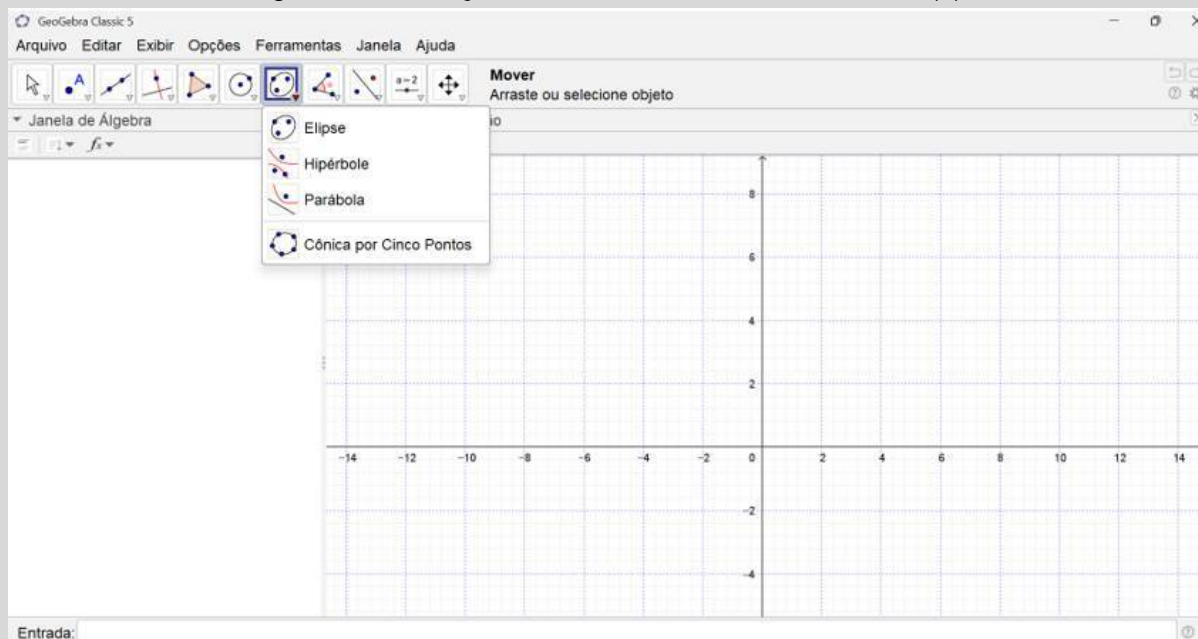
Clicando com o botão esquerdo do mouse em , seção cônica, o contorno desse ícone fica realçado em azul, indicando que a ferramenta correspondente está ativa. Para acessar as demais ferramentas ocultas, clique com o botão esquerdo do mouse no canto inferior esquerdo do ícone selecionado; em seguida, as opções ocultas serão exibidas. Ao escolher uma delas, essa nova ferramenta passará a ficar ativa.

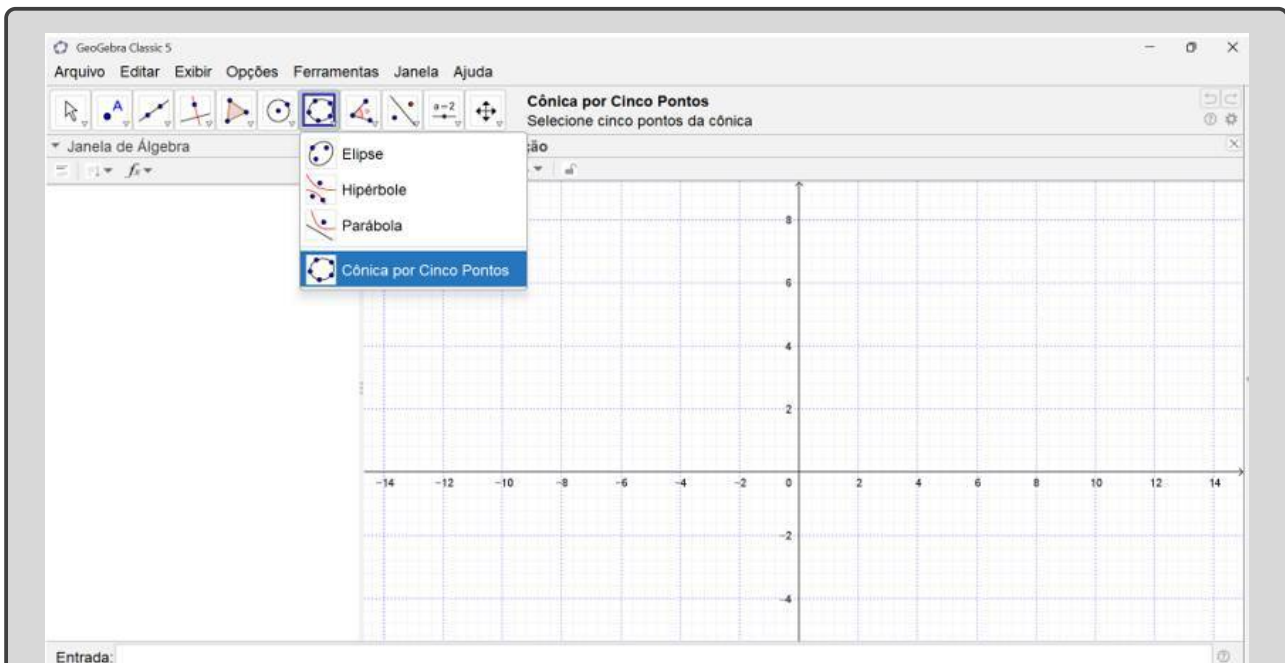
Figura 8.10: Seleção de ícone na barra de ferramentas (a).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.11: Seleção de ícone na barra de ferramentas (b).

CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos à construção dita no início da atividade.

Proponha e faça com os estudantes, o seguinte problema:

Construir o triângulo T , cujos vértices são as raízes do polinômio $p(z) = (z + 3)(z - 3)(z - 6i)$, e determinar a elipse de Steiner inscrita em T . Em seguida, mostrar que os focos dessa elipse coincidem com as raízes da derivada $p'(z)$ e que as coordenadas do baricentro é $(0,2)$.

Solução.

- As raízes de $p(z)$ são

$$z_1 = (-3, 0), \quad z_2 = (3, 0) \quad \text{e} \quad z_3 = (0, 6).$$

- As raízes de $p'(z)$ são

$$F_1 = (0, 1)$$

e

$$F_2 = (0, 3)$$

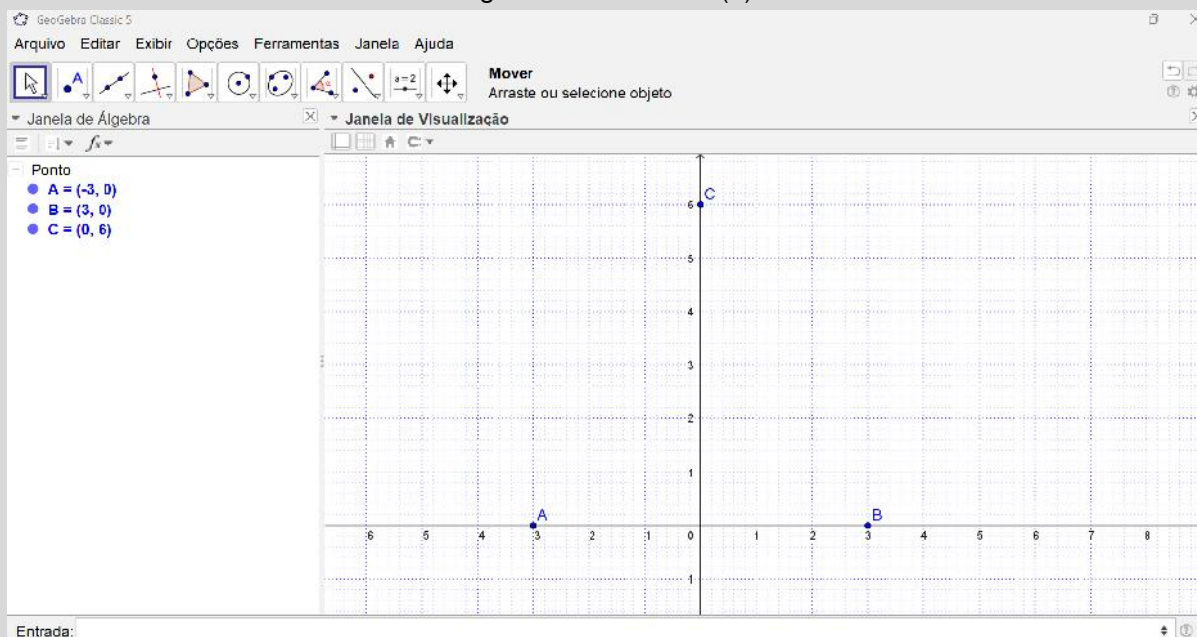
- A raiz de $p''(z)$ é $(0, 2)$.

Passo 1. Abra o GeoGebra. Em seguida, digite no campo Entrada: os pares ordenados correspondentes às raízes de $p(z)$. Para isso, pressione as teclas *Shift* + 9 (superior do teclado) para abrir o parêntese, digite o primeiro número, depois a vírgula e, em seguida, o segundo número. Teclle *Enter* para confirmar o ponto no plano. Repita esse procedimento para cada um dos três pares ordenados. Ao clicar em qualquer região da área da janela de visualização, dê zoom para observar melhor os três pontos: basta rolar a barra de rolagem do mouse para cima. Também é

CAPÍTULO 8

possível reposicionar o plano cartesiano na janela de visualização. Para isso, clique e segure o botão esquerdo do mouse, arraste o plano até a posição desejada e solte. Note que, na janela de álgebra, aparecem as coordenadas dos pontos, enquanto na janela de visualização surgem suas representações geométricas correspondentes.

Figura 8.12: Passo 1 (a).

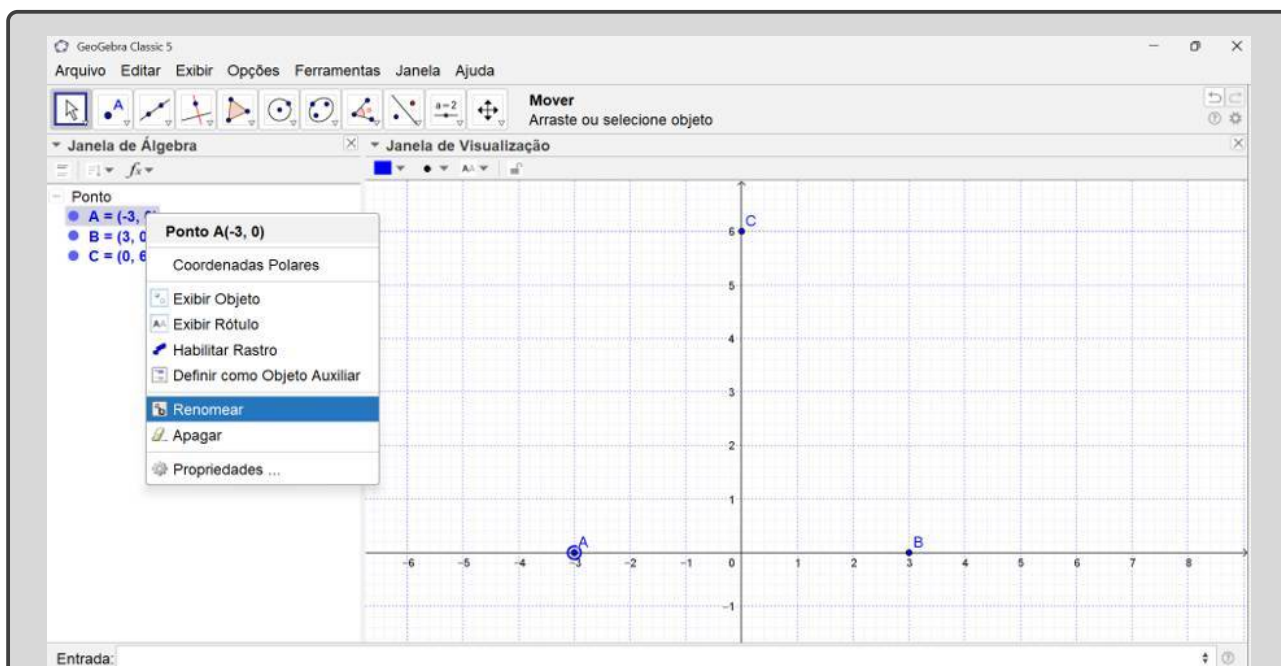


Fonte: Elaborado pelo autor.

Selecione com o botão direito do mouse o ponto A (pode ser tanto na janela de álgebra quanto na de visualização). Em seguida, será aberta uma janela exibindo as opções disponíveis para esse ponto.

Figura 8.13: Passo 1 (b).

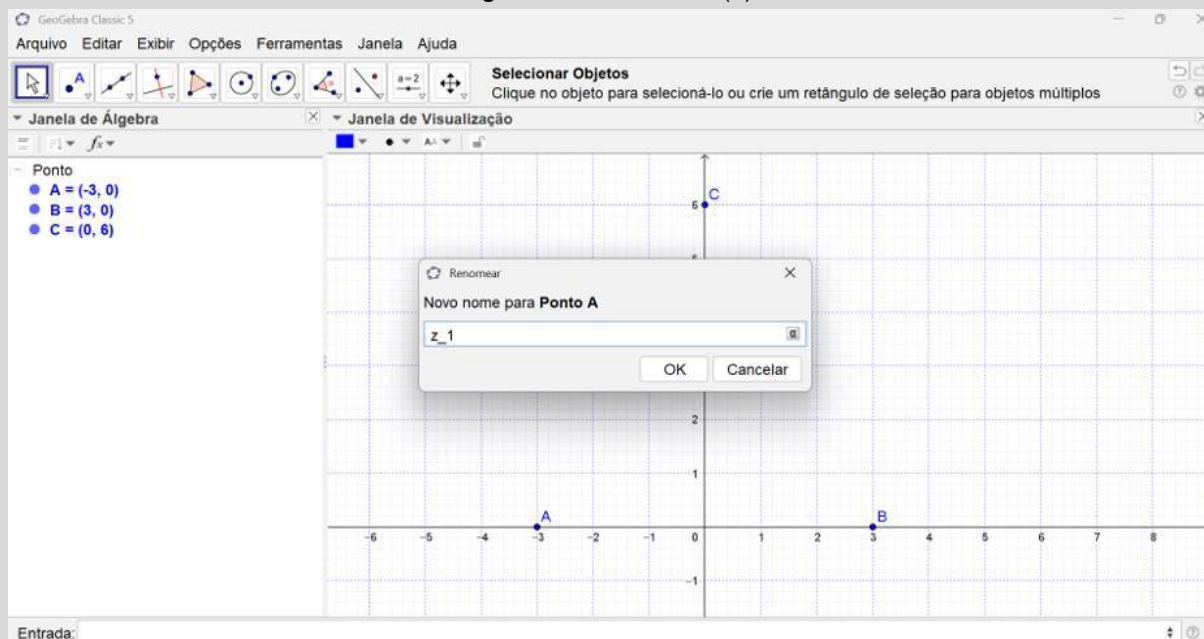
CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.

Escolha a opção Renomear, insira z_1 e confirme em OK.

Figura 8.14: Passo 1 (c).

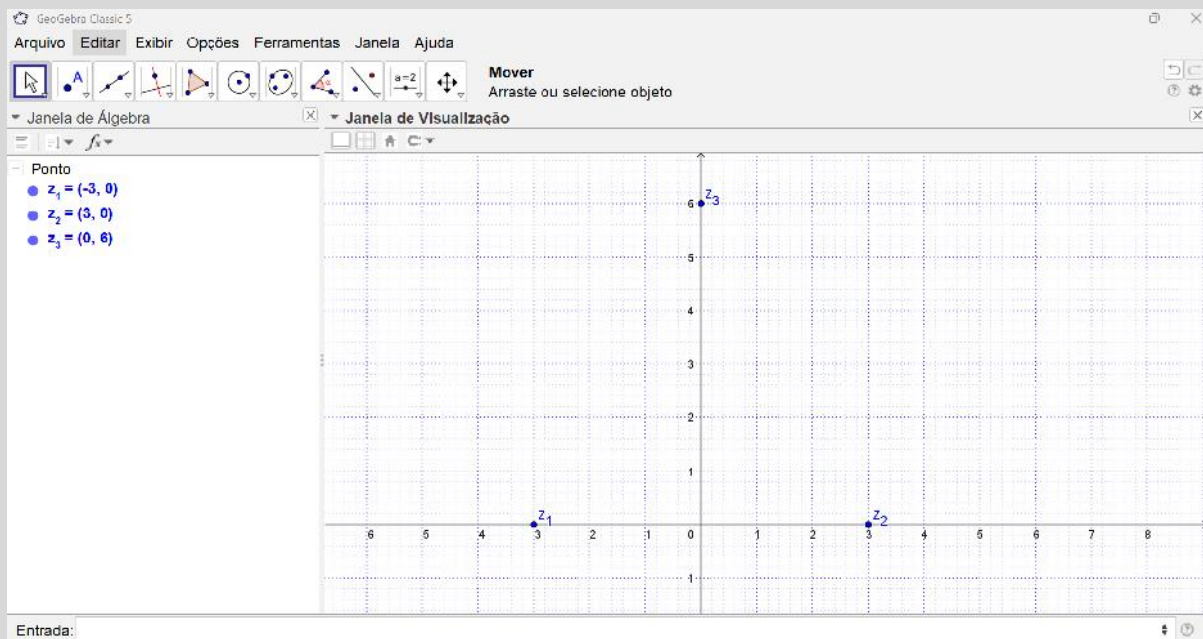


Fonte: Elaborado pelo autor.

Repita o processo para os outros dois pontos.

Figura 8.15: Passo 1 (d).

CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.


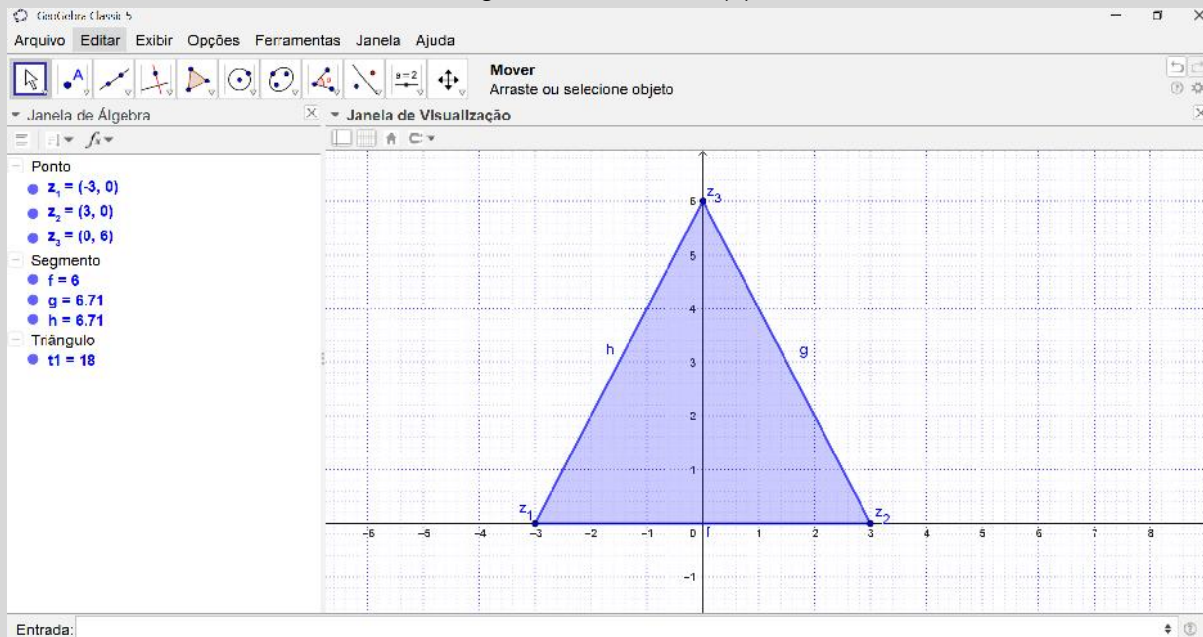
Passo 2. Na barra de ferramentas selecione . Na sequência, clique com o botão esquerdo do mouse nos pontos z_1 , z_2 , z_3 e, por fim, z_1 , para fechar o triângulo na janela de visualização. Aperte a tecla *Esc* do teclado.

Figura 8.16: Passo 2 (a).

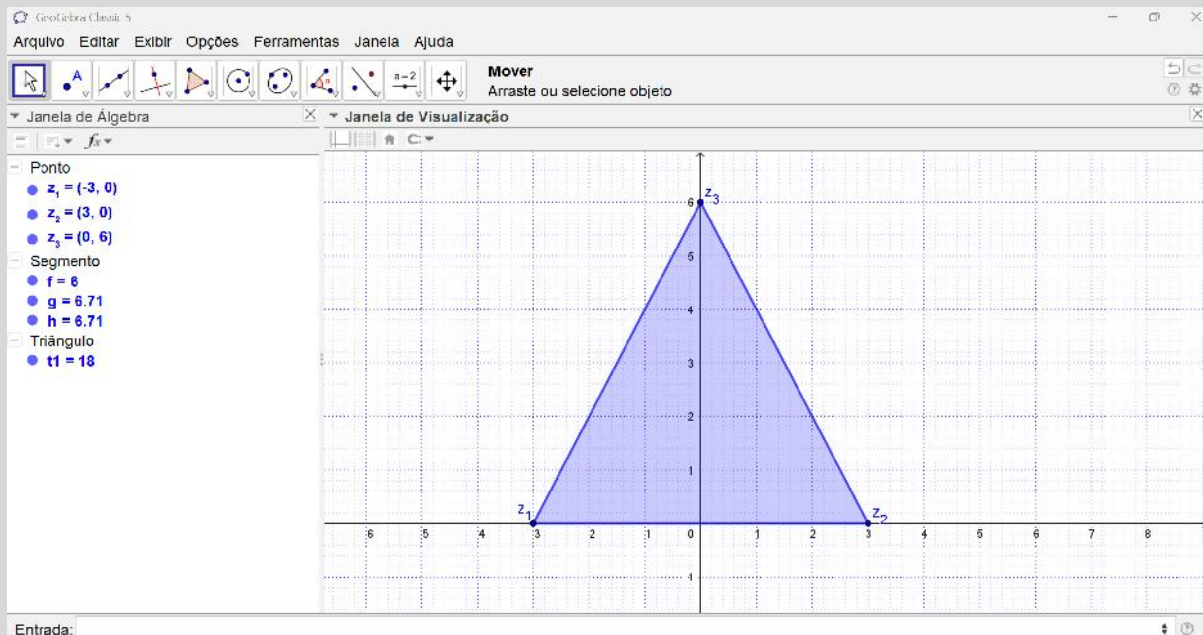


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para ocultar as identificações dos segmentos, clique com o botão direito sobre h e selecione a opção *Exibir Rótulo*. Basta repetir esse processo nos outros dois lados.

CAPÍTULO 8

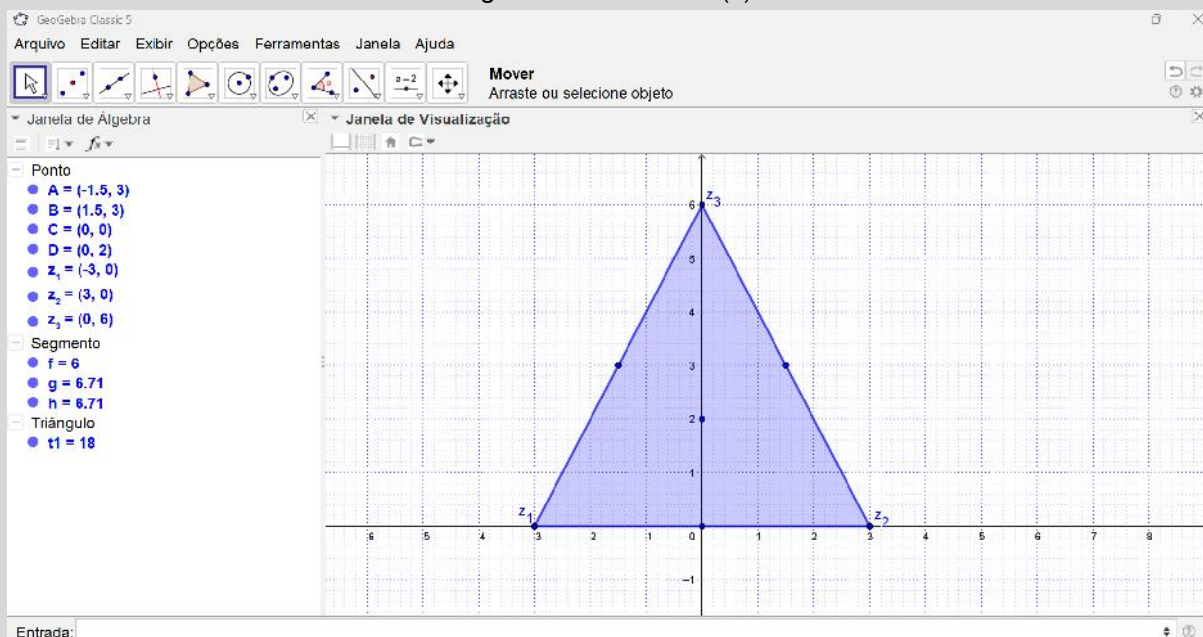
Figura 8.17: Passo 2 (b).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas ferramentas de Pontos, localizada no segundo grupo da barra de ferramentas, acesse os ícones ocultos e selecione a opção **Ponto Médio ou Centro**. Agora, clique sobre cada um dos lados e na região interna do triângulo. Note que temos os pontos médios de cada lado e o baricentro do triângulo. O GeoGebra atribuiu a esses pontos os nomes A , B , C e D ; oculte esses rótulos.

Figura 8.18: Passo 2 (c).



Fonte: Elaborado pelo autor.

CAPÍTULO 8


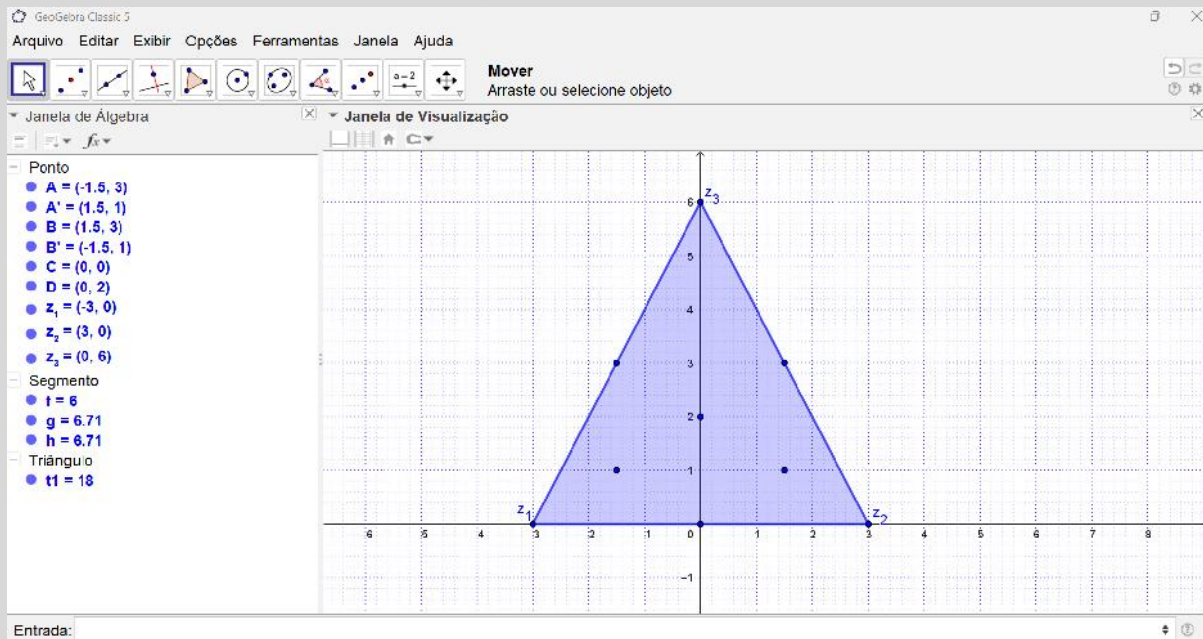
Na nona seção da barra de ícones, correspondente às ferramentas de objetos de ação, selecione . Clique com o botão esquerdo do mouse no ponto médio de um dos lados e, logo em seguida, no baricentro do triângulo. Repita o procedimento para um dos outros dois lados. Aperte *Esc*.

Figura 8.19: Passo 2 (d).



Fonte: Elaborado pelo autor.

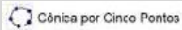
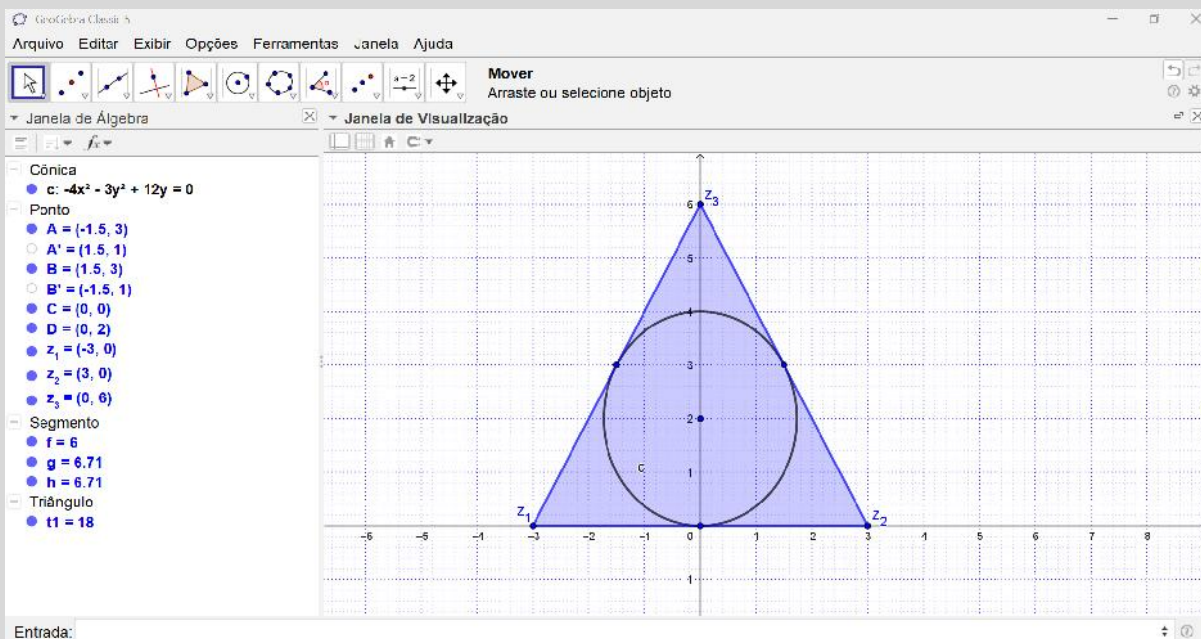
Passo 3. Selecione a ferramenta . Em seguida, clique em cada um dos pontos médios dos lados do triângulo e, depois, nos dois pontos construídos ao final do passo 2. Com isso, será criada a elipse de Steiner inscrita no triângulo, que o GeoGebra nomeia como *c*. Na sequência, pressione a tecla *Esc*. Por fim, oculte os pontos obtidos por reflexão: para isso, clique com o botão direito do mouse sobre cada um deles e, em seguida, na opção Exibir Objeto.

Figura 8.20: Passo 3 (a).

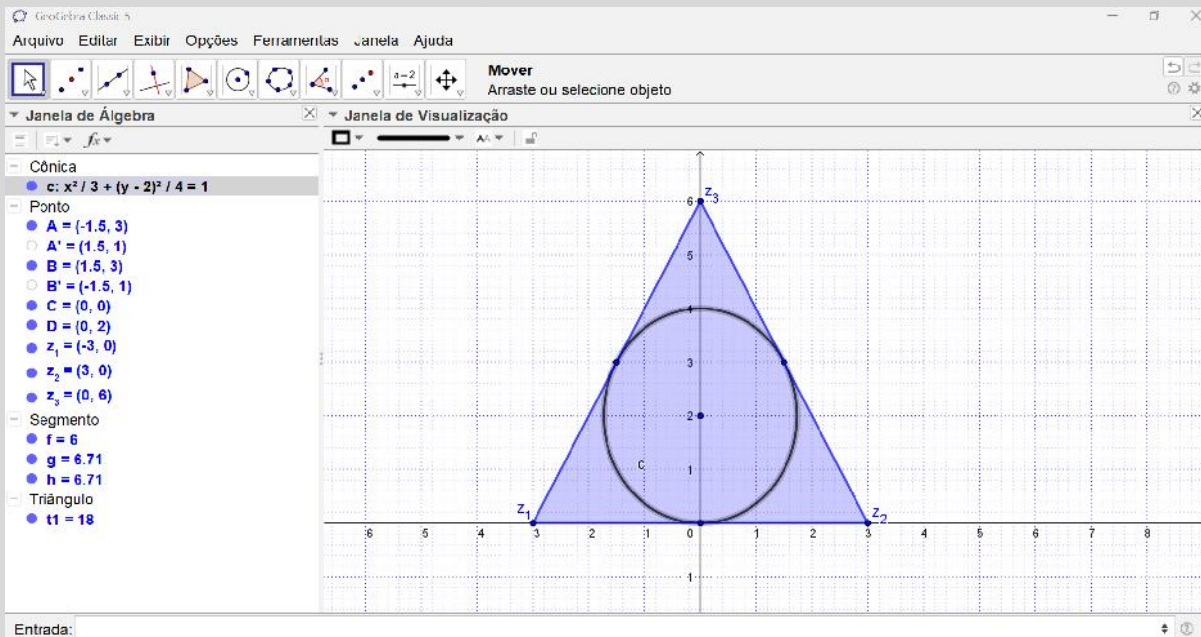
CAPÍTULO 8



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que a elipse c e sua equação geral estão listadas na janela de álgebra. Dê um clique com o botão direito do mouse sobre ela e, no menu que surgir, clique na opção Equação. Note que o software passará a exibir o formato da equação reduzida logo ao lado.

Figura 8.21: Passo 3 (b).



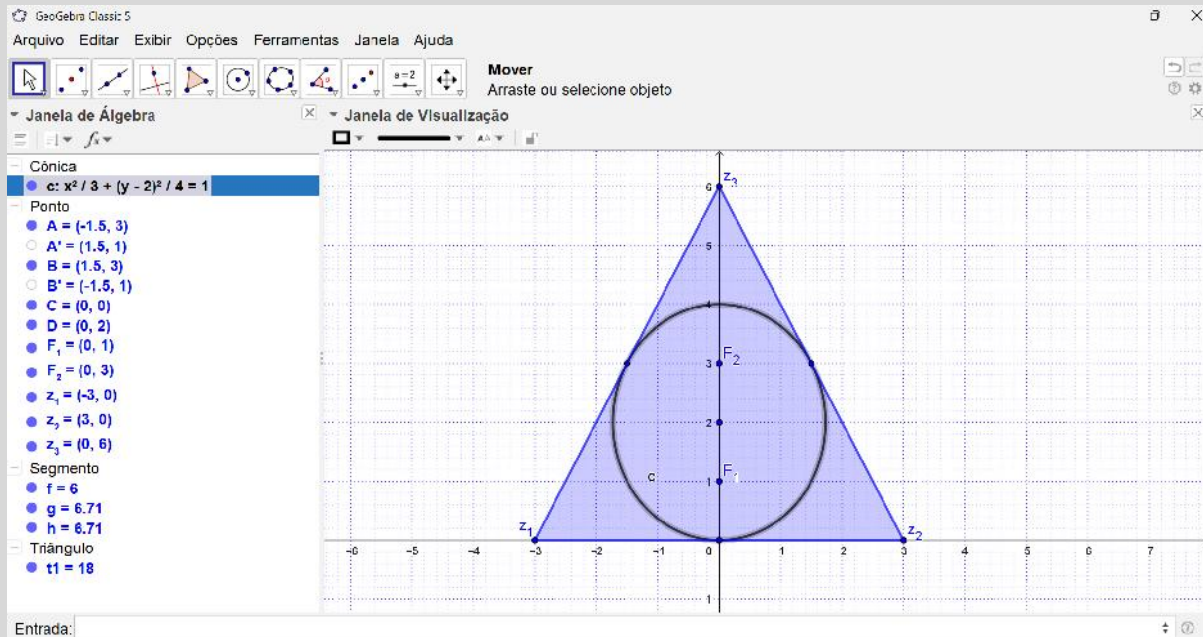
Fonte: Elaborado pelo autor.

No campo de Entrada, digite Foco(c) e pressione a tecla *Enter*. O GeoGebra criará automaticamente os pontos E e F , correspondentes aos focos da elipse. Em seguida, renomeie esses pontos como

CAPÍTULO 8

F_1 e F_2 , e ajuste o zoom da janela de visualização para melhor observá-los. Note que, na janela de álgebra, aparecem as coordenadas dos focos, as quais coincidem exatamente com aquelas apresentadas no início da solução do problema.

Figura 8.22: Passo 3 (c).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que a construção permite uma leitura do Teorema de Gauss-Lucas, uma vez que as raízes da primeira derivada se localizam no interior do triângulo T . Além disso, essas raízes coincidem com os focos da elipse de Steiner inscrita, enquanto a raiz da segunda derivada corresponde ao centro dessa elipse, isto é, ao baricentro do triângulo T . Assim, ela permite compreender de forma mais clara o Teorema de Marden.

EM BUSCA DE SOLUÇÕES

Nessa etapa, os estudantes podem ser organizados individualmente ou em duplas, conforme a disponibilidade de computadores no laboratório de informática. A condução da atividade deve favorecer a participação de todos e acompanhar, de modo atento, a construção realizada no GeoGebra, de modo que cada etapa seja compreendida em sua relação com os conceitos discutidos nas aulas anteriores. Assim, procura-se articular a visualização dinâmica proporcionada pelo software com os conhecimentos já trabalhados ao longo da sequência. Tal organização contribui para que a construção no GeoGebra não se reduza a uma execução técnica, mas se constitua como um momento de retomada, articulação e compreensão dos conceitos trabalhados.

CAPÍTULO 8

EXPLICAÇÃO E CONSOLIDAÇÃO

Neste momento, terá início, com os estudantes, a reprodução guiada da construção do problema proposto. O professor poderá retomar, com o auxílio do GeoGebra, as construções realizadas ao longo da atividade, buscando atribuir-lhes um significado matemático mais claro. A exploração dinâmica do software permite destacar, de forma visual, a posição das raízes do polinômio, das raízes de sua derivada e da elipse associada ao triângulo definido por esses pontos. A partir dessa observação, o professor poderá conduzir a discussão de modo a levar os estudantes a perceberem que os pontos correspondentes às raízes da derivada se relacionam diretamente com a elipse de Steiner inscrita. Além disso, a construção também possibilita evidenciar que a raiz da segunda derivada coincide com o baricentro do triângulo, reforçando a articulação entre propriedades algébricas e interpretações geométricas. Ao final dessa etapa, caberá ao professor sistematizar os resultados observados na construção dinâmica e apresentar o Teorema de Marden como síntese das relações investigadas ao longo da aula.

GENERALIZAÇÃO

Neste momento, o professor poderá incentivar os estudantes a modificar, no GeoGebra, a posição dos vértices do triângulo inicialmente construído, de modo a observar se as relações identificadas anteriormente permanecem válidas em novas situações. Essa exploração permite ampliar a atividade para além de um caso específico, favorecendo a percepção de que a posição das raízes da derivada, a presença da elipse de Steiner inscrita e a coincidência entre a raiz da segunda derivada e o baricentro do triângulo não constituem fatos isolados, mas propriedades que se repetem em diferentes configurações. Com essa abordagem, o uso do software deixa de cumprir apenas uma função ilustrativa e passa a contribuir para a formulação de conjecturas e para a construção de uma compreensão mais abrangente do objeto estudado. Ao final, caberá ao professor sistematizar essas observações, destacando que a regularidade percebida nas diferentes construções encontra sua formalização no Teorema de Marden.

EXERCÍCIOS

Para aprofundar a exploração dinâmica, os estudantes manipulam a própria construção no GeoGebra.

1. Considere o polinômio $p(z) = (z - 6)(z - 3i)(z + 3i)$. Substitua os vértices do triângulo pelas raízes desse polinômio e determine, em seguida, as coordenadas dos focos da elipse de Steiner inscrita ao triângulo obtido.
2. Tome o polinômio $p(z) = [z - (-10)][z - (2 + 6i)][z - (2 - 6i)]$. Modifique os vértices do triângulo para que correspondam às raízes desse polinômio e, em seguida, descreva a conclusão a que se pode chegar sobre o triângulo formado e sobre a elipse de Steiner inscrita.

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS

Os procedimentos avaliativos serão desenvolvidos de forma contínua, considerando a participação dos estudantes nas discussões, o envolvimento na construção no GeoGebra, os registros produzidos ao longo da atividade e a capacidade de interpretar, com clareza, as relações entre as raízes do polinômio, as raízes da derivada, a elipse de Steiner e o baricentro do triângulo. A avaliação buscará observar não apenas

CAPÍTULO 8

o resultado final, mas também o processo de construção e compreensão mobilizado pelos estudantes durante a aula.

8.6 ATIVIDADE AVALIATIVA

- **Quantidade de aula/tempo:** Uma aula/50 min.

PROPOSTA DE AVALIAÇÃO

Considere o polinômio $p(z) = [z - (-5)][z - (1 + 3i)][z - (1 - 3i)]$.

1. Construir o triângulo T, cujos vértices são as raízes de $p(z)$.
 2. Determinar a elipse de Steiner inscrita em T, bem como obter sua equação reduzida.
 3. Mostrar que os focos dessa elipse coincidem com as raízes de $p'(z) = 3z^2 + 6z$.
 4. Determinar as coordenadas do baricentro de T.
 5. Verificar que as coordenadas do centro da elipse coincide com as coordenadas do baricentro de T.
- Dados: $(-2,0)$ e $(0,0)$ são as raízes de $p'(z)$.

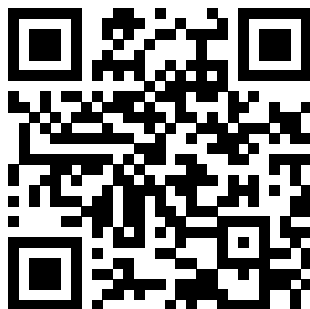
Roteiro de solução.

- Determinar as raízes de $p(z)$;
- Fazer a construção no GeoGebra.

8.7 ATIVIDADE INTERATIVA DESENVOLVIDA NO GEOGEBRA

A seguir, apresenta-se uma atividade interativa no GeoGebra que permite visualizar, de maneira dinâmica, as relações geométricas associadas ao Teorema de Marden. Basta alterar as raízes do polinômio cúbico para observar as mudanças produzidas na construção.

Figura 8.23: Das raízes à elipse: uma construção dinâmica do Teorema de Marden.



Fonte: Elaboração do autor.

CAPÍTULO 8

8.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática elaborada em torno do Teorema de Marden mostra-se uma possibilidade pertinente para o trabalho com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, especialmente por favorecer a articulação entre conteúdos algébricos e geométricos em uma perspectiva investigativa. Ao longo da proposta, busca-se construir um percurso em que a compreensão dos conceitos fosse desenvolvida de modo gradual, valorizando a interpretação, a visualização e a formulação de conjecturas.

Os encaminhamentos adotados evidenciam que o estudo desse teorema, quando transposto adequadamente para o contexto escolar, pode contribuir para ampliar o repertório matemático dos estudantes e para tornar mais significativas as relações entre diferentes representações. Nesse processo, a mediação do professor e o uso intencional de recursos como o GeoGebra assumem papel importante, na medida em que favorecem a observação de regularidades, a discussão de ideias e a sistematização dos conceitos envolvidos.

Também se observa que a proposta dialoga com orientações curriculares da Educação Básica, ao promover habilidades relacionadas à investigação, à argumentação e à análise de propriedades matemáticas. Assim, mais do que introduzir um resultado específico, a sequência procura evidenciar possibilidades de abordagem da Matemática escolar de forma articulada, exploratória e conceitualmente consistente.

É importante reconhecer, por outro lado, que a aplicação da proposta pode exigir adaptações conforme as condições concretas de cada contexto escolar, sobretudo no que se refere ao acesso a recursos tecnológicos. Ainda assim, tais limitações não impedem seu desenvolvimento, mas apontam para a necessidade de adequações metodológicas que preservem os objetivos centrais da sequência.

Em síntese, entende-se que a proposta apresentada constitui uma contribuição possível para o ensino de Matemática no Ensino Médio, ao inserir o Teorema de Marden em uma abordagem que valoriza conexões, significados e processos de construção do conhecimento. Desse modo, seu desenvolvimento poderá servir não apenas como alternativa didática para o estudo de temas pouco explorados na escola, mas também como ponto de partida para novas experiências pedagógicas e aprofundamentos futuros.

CAPÍTULO 8

8.8 REFERÊNCIAS

BAK, Joseph; NEWMAN, Donald J. **Complex Analysis**. 3. ed. New York: Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-7287-3. DOI: 10.1007/978-1-4419-7288-0.

BRASIL. **Ministério da educação. Base nacional comum curricular**. [S. l.]: Brasília: MEC, 2018.

CALVOSO, Júlio César. **GeoGebra - Tópicos Fundamentais**. Campo Grande: IFMS, 2025.

CAMPOS MORAES BRUM, Elciete de; VIERA, Mauricio Aires; FERREIRA, Ruhena Kelber Abrão. Aprendizagem significativa em matemática por meio da utilização de materiais concretos no ensino médio: um ensaio em construção. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 9, n. 3, p. 365–380, 2023. ISSN 2675-3375. DOI: 10.51891/reaase.v9i3.8794.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2007. v. 3. Ensino Médio. ISBN 978-85-08-11303-3.

GEOGEBRA. **GeoGebra Apps**: Downloads gratuitos. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 31 mar. 2026.

KALMAN, Dan. An Elementary Proof of Marden's Theorem. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 115, n. 4, p. 330–338, 2008. DOI: 10.1080/00029890.2008.11920532.

NASCIMENTO, Leila Maria do; SILVA, Mírian Salvador da; SILVA, José Fernandes da. O uso das tecnologias digitais de comunicação e informação para o ensino de Matemática na Educação Básica com ênfase em resolução de problemas: uma revisão. **Revista de Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 1–15, 2025. ISSN 1981-6979. DOI: 10.18391/rem.v13i2.3792.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; SOUSA, Tatiana Bonomo de; CAMPOS, Ayandara Pozzi de Moraes. Formação de Professores: Matemática para o Ensino na Investigação de Conceito. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 17, e6231098, p. 1–21, 2023. ISSN 1982-7199. DOI: 10.14244/198271996231.

PERNAMBUCO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Ensino Médio Integral 2026: Atividades Complementares – 35h**. Recife, PE: [s. n.], 2026.

PERNAMBUCO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Ensino Médio Integral 2026: Atividades Complementares – 45h**. Recife, PE: [s. n.], 2026.

PERNAMBUCO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Itinerários Formativos de Aprofundamento (IFA): Matriz Anexo 1 – Ensino Médio – 1º Ano / 2º Ano / 3º Ano**. Recife, PE: [s. n.], 2026.

PERNAMBUCO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Itinerários Formativos de Aprofundamento (IFA): Matriz Anexo 2 – Ensino Médio – 1º Ano / 2º Ano / 3º Ano**. Recife, PE: [s. n.], 2026.

PERNAMBUCO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Organizador Curricular: Formação Geral Básica (FGB) – Matemática – Ensino Médio – 1º Ano / 2º Ano / 3º Ano**. Recife, PE: [s. n.], 2026.

CAPÍTULO 8

SANTANA, Gleisson Rodrigues. **Elipse de Steiner**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia.

SILVA SANTOS, Mario Jonas da. **Teorema de Marden**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia.

SOUZA, Danielle Santos de; MATTOS, Francisco Roberto Pinto. A importância da visualização no ensino de geometria, 2024. DOI: 10.12957/e-mosaicos.2024.74262.

VOLPATO, Pollyana Gomes. **O Teorema de Marden e uma Generalização**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia.

CAPÍTULO 8

APÊNDICE - ATIVIDADE I

Atividade Diagnóstica: Representação geométrica de um número complexo e Raízes de uma função polinomial (ou polinômios).

- (Elaborado pelo autor)** Represente geometricamente os números:
 - $2 + 2i$ e $-2 + 2i$.
 - $1 + i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$.
- (Elaborado pelo autor)** Qual número complexo está associado ao ponto $(3, -1)$?
- (Elaborado pelo autor)** Dois números complexos distintos podem representar o mesmo ponto no plano? Justifique.
- (Elaborado pelo autor)** Determine as raízes de
 - $p(z) = (z - 1)(z + 2)$.
 - $p(z) = (z - i)(z - 1)(z + 1)$
- (Elaborado pelo autor)** As raízes de uma função polinomial do 2º grau podem ser associadas a quantos pontos no plano complexo? E do 3º grau?

Exercícios

- (Elaborado pelo autor)** Considere a função polinomial $p(z) = (z - 2i)(z + i)$.
 - Determine as raízes de $p(z)$.
 - Represente essas raízes no plano de Argand-Gauss.
 - Em qual eixo do plano esses pontos estão localizados?
 - O que isso indica sobre essas raízes?
- (Elaborado pelo autor)** Considere a função polinomial $p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)$.
 - Determine as raízes de $p(z)$.
 - Represente essas raízes no plano de Argand-Gauss.
 - Ligue os pontos obtidos. Que figura é formada?
 - Essa figura está inteiramente sobre uma mesma reta? Explique.

APÊNDICE - ATIVIDADE II

Atividade Diagnóstica: Grau da derivada de funções polinomiais, Coordenadas do baricentro de um triângulo e Elipse.

- (Elaborado pelo autor)** Considere um polinômio cúbico com três raízes distintas:

$$p(z) = [z - (1 + i)][z - (3 + i)][z - (2 + 4i)].$$

CAPÍTULO 8

Para este exercício,

$$p'(z) = 3z^2 - (12 + 12i)z + (9 + 24i)$$

e

$$p''(z) = 6z - (12 + 12i).$$

- a) Qual será o grau de $p'(z)$ e de $p''(z)$?
 - b) Quantas raízes possuem $p'(z)$ e $p''(z)$?
2. **(Elaborado pelo autor)** As raízes de um polinômio cúbico são $(-4,0)$; $(2,-3)$ e $(2,3)$. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo determinado por elas.
3. **(Elaborado pelo autor)** Considere a elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Para essa elipse, determine:

- a) as coordenadas do seu centro;
- b) as coordenadas de seus focos.

Exercícios

1. **(Elaborado pelo autor)** Considere um polinômio cúbico cujas raízes são representadas, no plano de Argand–Gauss, por três pontos distintos que formam um triângulo. Sabendo que as raízes da derivada desse polinômio também podem ser representadas no mesmo plano, descreva onde elas devem estar localizadas em relação ao triângulo e explique por quê.
2. **(Elaborado pelo autor)** Na configuração associada ao Teorema de Marden, as raízes da primeira derivada de um polinômio cúbico estão relacionadas a uma elipse notável do triângulo determinado pelas raízes do polinômio. Identifique essa elipse e explique qual é a relação entre ela e as raízes da derivada.
3. **(Elaborado pelo autor)** Seja $p(z)$ um polinômio de terceiro grau com três raízes distintas. Sabendo que a segunda derivada $p''(z)$ possui uma única raiz, explique qual é o significado geométrico desse ponto na configuração estudada e comente por que ele pode ser considerado um elemento importante na interpretação geométrica do polinômio.

CAPÍTULO 8

APÊNDICE - ATIVIDADE III

Atividade Diagnóstica: Teorema de Marden.

1. **(Elaborado pelo autor)** Considere um triângulo e uma elipse inscrita, tangente aos lados em seus pontos médios. Que propriedade permite identificar essa curva como a elipse de Steiner do triângulo?
2. **(Elaborado pelo autor)** Se as raízes de um polinômio cúbico formam os vértices de um triângulo no plano, o que o Teorema de Marden afirma sobre as raízes da derivada desse polinômio?

Exercícios

1. **(Elaborado pelo autor)** Considere o polinômio $p(z) = (z - 6)(z - 3i)(z + 3i)$. Substitua os vértices do triângulo pelas raízes desse polinômio e determine, em seguida, as coordenadas dos focos da elipse de Steiner inscrita ao triângulo obtido.
2. **(Elaborado pelo autor)** Tome o polinômio $p(z) = [z - (-10)][z - (2 + 6i)][z - (2 - 6i)]$. Modifique os vértices do triângulo para que correspondam às raízes desse polinômio e, em seguida, descreva a conclusão a que se pode chegar sobre o triângulo formado e sobre a elipse de Steiner inscrita.

APÊNDICE - ATIVIDADE AVALIATIVA

Proposta de avaliação

(Elaborado pelo autor) Considere o polinômio $p(z) = [z - (-5)][z - (1 + 3i)][z - (1 - 3i)]$.

1. Construir o triângulo T, cujos vértices são as raízes de $p(z)$.
2. Determinar a elipse de Steiner inscrita em T, bem como obter sua equação reduzida.
3. Mostrar que os focos dessa elipse coincidem com as raízes de $p'(z) = 3z^2 + 6z$.
4. Determinar as coordenadas do baricentro de T.
5. Verificar que as coordenadas do centro da elipse coincide com as coordenadas do baricentro de T.
Dados: $(-2,0)$ e $(0,0)$ são as raízes de $p'(z)$.

Roteiro de solução

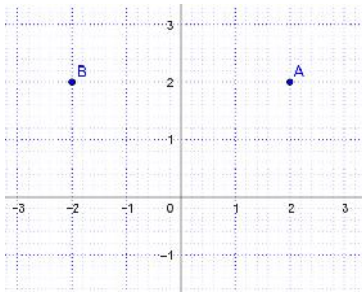
- Determinar as raízes de $p(z)$;
- Fazer a construção no GeoGebra.

APÊNDICE - SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

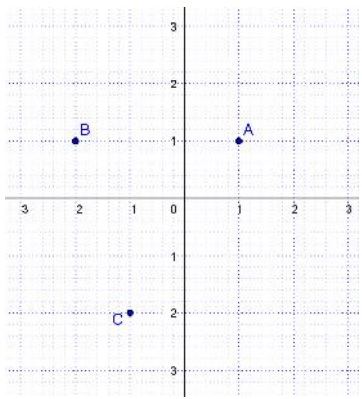
ATIVIDADE I

Avaliação Diagnóstica:

CAPÍTULO 8



1. a)



b)

2. Está associado ao número complexo $3 - i$.

3. Não. Cada número complexo corresponde a um único ponto no plano de Argand-Gauss. Portanto, dois números complexos distintos não podem representar o mesmo ponto.

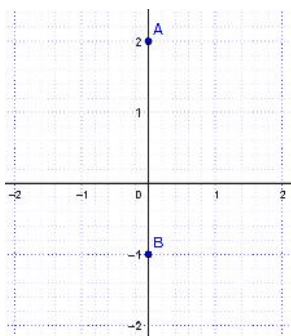
4. a) As raízes são $z_1 = 1$ e $z_2 = -2$.

b) As raízes são $z_1 = 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1$.

5. Uma função polinomial do 2º grau pode ter raízes associadas a até 2 pontos no plano complexo. Já uma função polinomial do 3º grau pode ter raízes associadas a até 3 pontos. Se houver repetição de raízes, o número de pontos distintos pode ser menor.

Exercícios

1. a) As raízes são $z_1 = 2i$ e $z_2 = -i$.



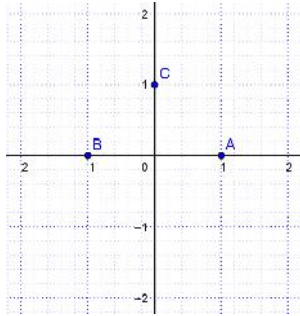
b)

c) Esses pontos estão localizados no eixo imaginário.

d) Isso indica que as raízes são números complexos puros imaginários, pois têm parte real igual a zero.

CAPÍTULO 8

2. a) As raízes são $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ e $z_3 = i$.



b)

c) Ligando esses pontos, forma-se um triângulo.

d) Não. Essa figura não está inteiramente sobre uma mesma reta, pois os três pontos não são colineares. Dois deles estão no eixo real e o outro está no eixo imaginário, o que mostra que não pertencem à mesma reta.

ATIVIDADE II

Avaliação Diagnóstica:

1. a) Como $p(z)$ é um polinômio cúbico, então: $p'(z)$ é de 2º grau e $p''(z)$ é de 1º grau.

b) Logo, $p'(z)$ possui duas raízes e $p''(z)$ possui uma raiz.

2. As raízes são os pontos $(-4, 0)$, $(2, -3)$ e $(2, 3)$. Portanto, o baricentro é

$$G = \left(\frac{-4 + 2 + 2}{3}, \frac{0 - 3 + 3}{3} \right) = (0, 0).$$

Assim, as coordenadas do baricentro são $(0, 0)$.

3. Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$, tem-se $a = 5$ e $b = 4$. Além disso,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3.$$

a) O centro da elipse é $(0, 0)$.

b) Como o eixo maior é horizontal, os focos são $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.

Exercícios

1. As raízes de $p'(z)$ devem estar localizadas no interior do triângulo, ou eventualmente sobre sua fronteira. Isso ocorre pelo Teorema de Gauss–Lucas, segundo o qual as raízes da derivada de um polinômio pertencem ao fecho convexo das raízes do polinômio original. Como as raízes de $p(z)$ formam um triângulo, as raízes de $p'(z)$ ficam nessa mesma região.

2. A elipse em questão é a elipse de Steiner inscrita no triângulo determinado pelas raízes de $p(z)$. Pelo Teorema de Marden, as raízes da primeira derivada $p'(z)$ coincidem com os focos dessa elipse. Portanto, há uma ligação direta entre derivação e geometria: os focos da elipse são exatamente as raízes da derivada.

CAPÍTULO 8

3. A única raiz de $p''(z)$ corresponde, geometricamente, ao baricentro do triângulo formado pelas raízes de $p(z)$. Esse ponto é importante porque funciona como centro da configuração (baricentro do triângulo e centro da elipse), organizando a leitura geométrica do problema. Além disso, ele ajuda a evidenciar que a relação entre o polinômio e suas derivadas não é apenas algébrica, mas também geométrica.

ATIVIDADE III

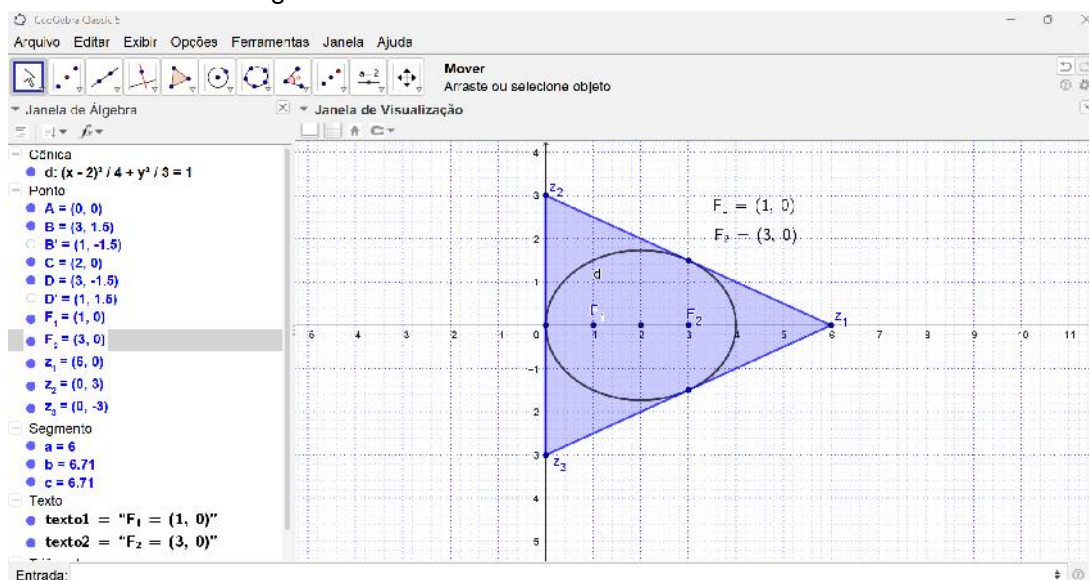
Avaliação Diagnóstica:

1. A propriedade que caracteriza essa curva como a elipse de Steiner é o fato de ela ser uma elipse inscrita no triângulo e tangenciar os três lados exatamente em seus pontos médios. Essa é a propriedade geométrica que a identifica.
2. O Teorema de Marden afirma que, se as raízes de um polinômio cúbico formam os vértices de um triângulo, então as raízes da derivada desse polinômio coincidem com os focos da elipse de Steiner inscrita nesse triângulo.

Exercícios

1. Os focos são $(1, 0)$ e $(3, 0)$.

Figura 8.24: Atividade III - Exercícios - Questão 1.



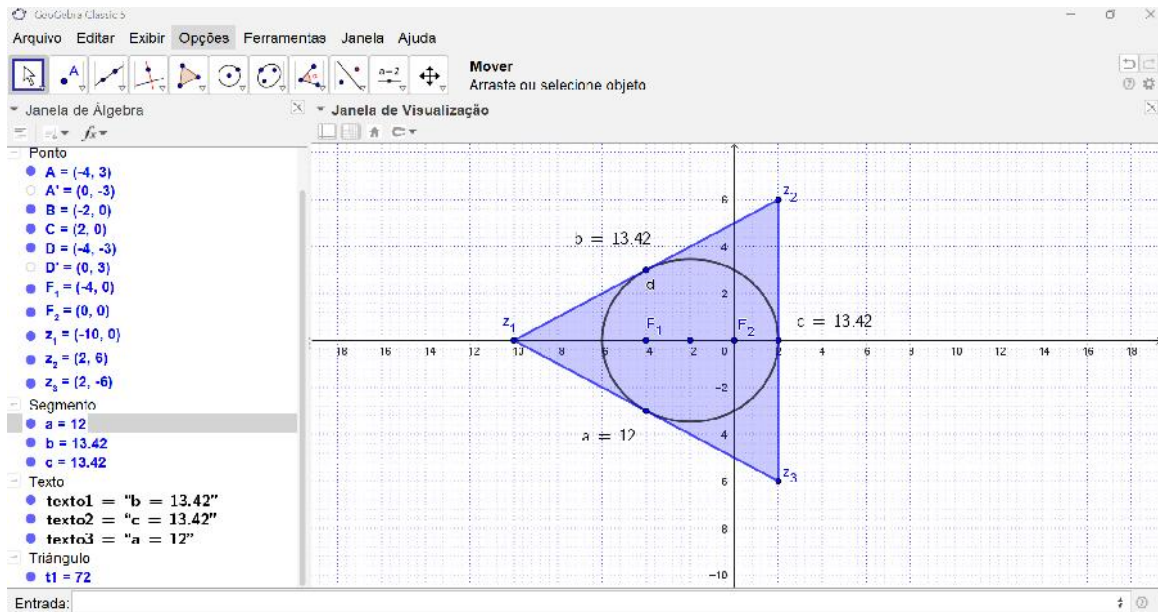
Fonte: Elaborado pelo autor.

2. As raízes correspondem aos pontos $(-10, 0)$, $(2, 6)$ e $(2, -6)$. Esses pontos formam um triângulo isósceles, simétrico em relação ao eixo real. Como as raízes de $p'(z)$ são -4 e 0 , os focos da elipse de Steiner inscrita são $(0, 0)$ e $(-4, 0)$.

A conclusão é que o triângulo formado é isósceles e seu baricentro é o ponto $(-2, 0)$ e a elipse de Steiner inscrita possui eixo maior na horizontal e centro no ponto $(-2, 0)$.

CAPÍTULO 8

Figura 8.25: Atividade III - Exercícios - Questão 2.

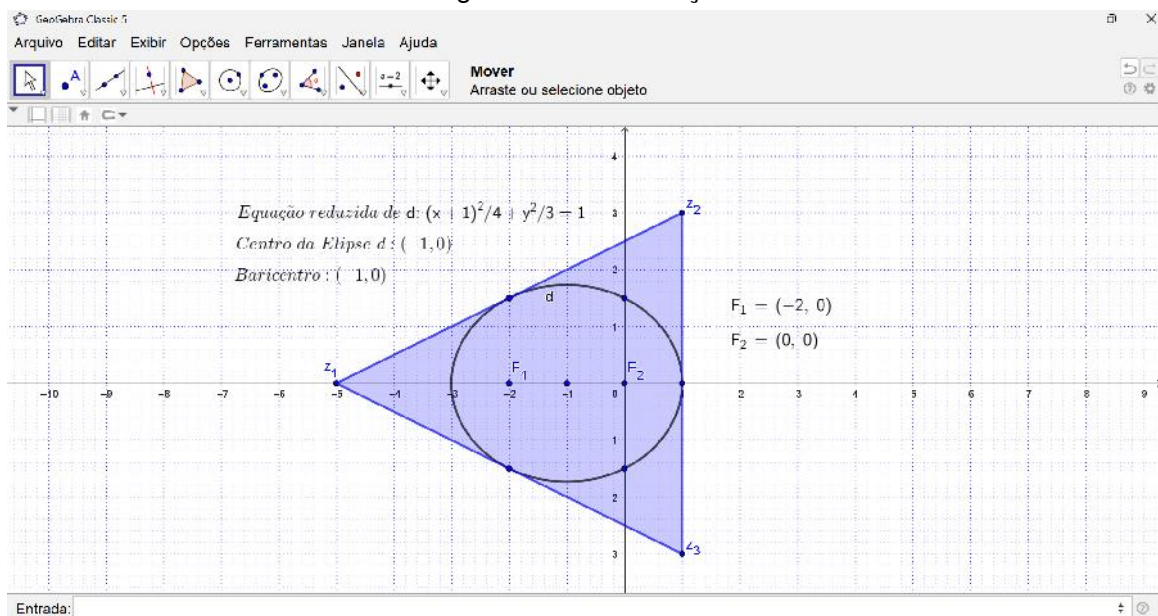


Fonte: Elaborado pelo autor.

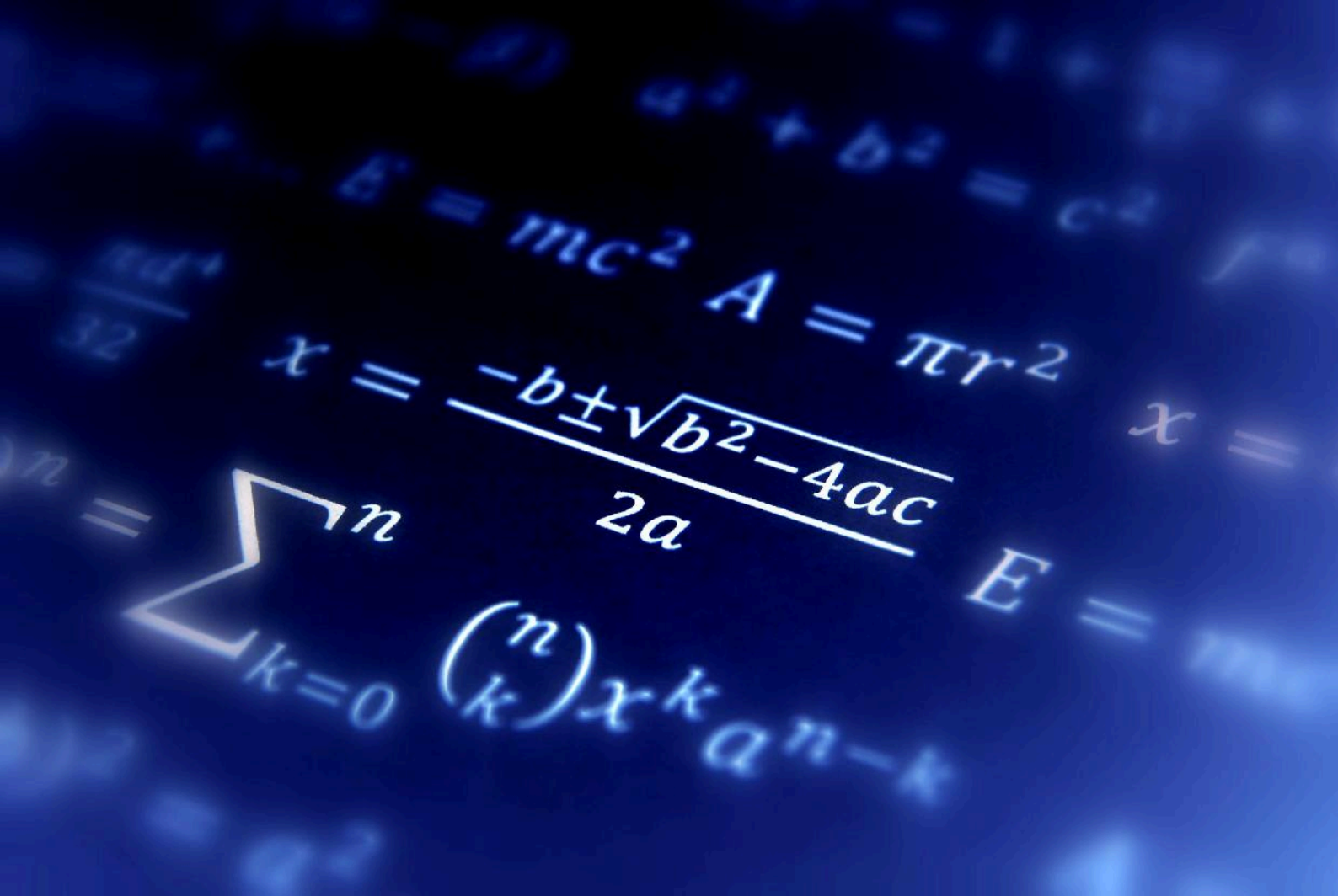
ATIVIDADE AVALIATIVA

As raízes são os pontos $(-5, 0)$, $(1, 3)$ e $(1, -3)$.

Figura 8.26: Construção.



Fonte: Elaborado pelo autor.



O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) constitui um programa de pós-graduação stricto sensu de excelência, com o objetivo primordial de elevar a formação científica e pedagógica de professores que atuam na Educação Básica.

Este volume apresenta uma coletânea de propostas didáticas, frutos diretos da produção acadêmica da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Os textos aqui reunidos refletem as discussões e a jornada acadêmica dos mestrandos nas disciplinas de Tópicos de Matemática e de Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC).

Ao disponibilizar estas contribuições, a UFRPE reafirma seu compromisso com a escola pública e com a formação continuada, oferecendo aos educadores um material que une o rigor matemático a estratégias metodológicas viáveis para a sala de aula. Esta obra é, portanto, um registro do impacto positivo do PROFMAT na transformação do ensino de Matemática na região e no país.



ISBN DIGITAL nº 978-85-7946-564-2



9 788579 465642