

# COMO SÃO ESTABELECIDAS AS VERDADES MATEMÁTICAS?

Mini-guia sobre a estrutura lógica das construções matemáticas



Maria Luiza Ramos  
Marcella Feitosa

# **COMO SÃO ESTABELECIDAS AS VERDADES MATEMÁTICAS?**

**Mini-guia sobre a estrutura lógica das construções matemáticas**

**Maria Luiza Ramos  
Marcella Feitosa**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**

**Profa. Maria José de Sena**

Reitora da UFRPE

**Profa. Maria do Socorro de Lima Oliveira**

Vice-Reitora

**Edson Cordeiro do Nascimento**

Diretor do Sistema de Bibliotecas da UFRPE



**EDITORA UNIVERSITÁRIA - EDUFRPE**

**Antão Marcelo Freitas Athayde Cavalcanti**

Diretor da Editora da UFRPE

**José Abmael de Araújo**

Coordenador Administrativo da Editora da UFRPE

**Josuel Pereira de Souza**

Chefe de Produção Gráfica da Editora da UFRPE

Diagramação final

**Janilson Lemos de Araújo Silva**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ramos, Maria Luiza

Como são estabelecidas as verdades matemáticas? : mini-guia sobre a estrutura lógica das construções matemáticas / Maria Luiza Ramos, Marcella Feitosa. -- Recife, PE : Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2024.

Bibliografia.

ISBN (físico) 978-85-7946-390-7

ISBN (digital) 978-85-7946-389-1

1. Aprendizagem 2. Educação 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Lógica simbólica e matemática I. Feitosa, Marcella. II. Título.

24-214702

CDD-510.7

*Que a sua curiosidade para compreender os conhecimentos matemáticos seja uma busca constante.*

# Apresentação

Durante a jornada escolar é muito comum que estudantes apresentem dificuldades para aprender Matemática. Dependendo do contexto, essa situação pode ser mais acentuada. Nem todos possuem as mesmas possibilidades e chances igualitárias, tanto em relação a aprendizagem quanto em relação ao ensino.

Pra piorar, algumas pesquisas indicam que estudantes de escolas públicas, quando comparados a estudantes da rede privada, têm um nível de compreensão verbal e de codificação mais baixo, e consequentemente, dificuldades no rendimento na disciplina, (VESCO et al., 1998) e (ALVES, 2018).

Como reverter este cenário?

Como tornar a Matemática escolar mais interessante e ajudar estudantes a compreendê-la? Como seria possível incentivar estudantes a contemplar suas dinâmicas e elaborar significados para além de um sentido exclusivamente utilitário?

Este texto é uma ação que pretende contribuir com essa mudança. É evidente que outras iniciativas são necessárias, mas almejamos dialogar e ajudar quem principalmente sofre com os impactos dessas lacunas: você, estudante!

Na caminhada escolar existe um planejamento para o ensino, em que quase sempre é utilizado um conhecimento anterior para

construir um novo. Com a Matemática não é diferente, certo? No entanto, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico, sejam baseados em diferentes fundamentos, de modo que, a comunidade estudantil **compreenda a estrutura conceitual** bem como suas **relações interculturais e contextos históricos**.

Como alguns conhecimentos já no Ensino Fundamental são mais abstratos, desde muito cedo é possível vivenciar dificuldades na aprendizagem. Quando começamos a solucionar as equações, conhecer teoremas, calcular áreas de figuras ou utilizar fórmulas, é como se uma nova matemática nos fosse apresentada. Por isso é tão importante **saber pedir apoio e não acumular as dúvidas**.

Além disso, por diversos motivos nem sempre essa novidade é bem descrita, refletida ou justificada. Com a mudança para o Ensino Médio parece que a coisa “vai rolando de ladeira abaixo” e muita gente acaba enfrentando ainda mais dificuldades e se distancia de qualquer coisa relacionada a este campo do conhecimento.

Apresentar uma Matemática que seja **aberta, criativa, questionadora, multilinguagem e que faça sentido para a realidade** estudantil é um grande desafio, mas que são essenciais para uma aprendizagem significativa e efetiva participação no processo de aprendizagem (BOALER, 2017).

Assim, temos como principais objetivos:

1. Apresentar de maneira simples e objetiva os conceitos da Lógica Proposicional, pois é o que estrutura e fundamenta a construção dos conhecimentos da Matemática formal;
2. Divulgar como a lógica proposicional pode ajudar na compreensão da formalização dos conceitos matemáticos;

3. Oportunizar que estudantes de Ensino Médio desenvolvam-se plenamente em Matemática, ao ampliar sua capacidade de argumentação;
4. Estimular a escrita matemática, o uso de seus símbolos e terminologias de maneira adequadas.

# Conteúdo

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Afinal, o que é Matemática?</b>                               | <b>9</b>  |
| 1.1      | Reconhecimento de padrões                                        | 9         |
| 1.2      | Etnomatemática                                                   | 11        |
| 1.3      | Cotidiano e além                                                 | 12        |
| 1.4      | Reflexão                                                         | 15        |
| <b>2</b> | <b>Notações Matemáticas</b>                                      | <b>16</b> |
| 2.1      | O que é uma notação?                                             | 16        |
| <b>3</b> | <b>Proposições e quantificadores</b>                             | <b>20</b> |
| 3.1      | O que é uma sentença?                                            | 20        |
| 3.2      | Sentença simples                                                 | 24        |
| 3.3      | Sentenças compostas                                              | 26        |
| 3.4      | Conectivos lógicos e tabela-verdade                              | 27        |
| 3.4.1    | Conjunção                                                        | 28        |
| 3.4.2    | Disjunção                                                        | 30        |
| 3.4.3    | Disjunção Exclusiva                                              | 31        |
| 3.4.4    | Negação                                                          | 33        |
| 3.4.5    | Condicional                                                      | 35        |
| 3.5      | Implicações lógicas                                              | 37        |
| 3.6      | Sentenças abertas                                                | 39        |
| 3.7      | Quantificadores                                                  | 40        |
| 3.7.1    | Quantificadores universais                                       | 40        |
| 3.7.2    | Quantificadores existenciais                                     | 42        |
| <b>4</b> | <b>Definição, Teorema, Fórmula... O que, como e quando usar?</b> | <b>47</b> |
| 4.1      | O que é uma definição?                                           | 48        |
| 4.2      | O que é um teorema?                                              | 49        |
| 4.3      | O que é uma fórmula?                                             | 52        |
| 4.4      | O poder de um contraexemplo                                      | 55        |
| 4.5      | Redução ao Absurdo                                               | 57        |
| <b>5</b> | <b>Modelo axiomático e conjecturas</b>                           | <b>60</b> |
| 5.1      | Conjecturas                                                      | 62        |
| 5.2      | Paradoxos                                                        | 63        |
| 5.3      | Cuidado com os Sofismas!                                         | 64        |
| <b>6</b> | <b>Aprendizagem significativa e Pensamento Computacional</b>     | <b>67</b> |
| 6.1      | Aprendizagem Significativa                                       | 67        |
| 6.2      | Pensamento Computacional                                         | 68        |
| 6.3      | Desafio                                                          | 72        |
|          | <b>Sobre as autoras</b>                                          | <b>73</b> |



# CAPÍTULO 1

## Afinal, o que é Matemática?

Para muitas pessoas o contato com a Matemática se dá nas aulas da escola e raramente é um encontro agradável. Seja pela maneira apressada, mecânica e repetitiva como os conhecimentos são vivenciados, seja pelo pouco incentivo para encontrar beleza, exercitar a criatividade ou ter liberdade para estabelecer as próprias compreensões sobre os temas.

Com você tem sido assim?

Você já pensou no que significa Matemática?

É possível melhorar a sua aprendizagem entendendo como as relações matemáticas são construídas?

Neste capítulo te convidamos a (re)pensar sobre estas e outras questões.

### 1.1 RECONHECIMENTO DE PADRÕES

A busca por uma melhor compreensão de padrões que existem na natureza conduziu a humanidade a organizar estas ideias, cabendo à Matemática contribuir na organização e comunicação formal destes achados (MENTALIDADESMATEMÁTICAS, 2021).

Podemos entender por **padrão** algo que se repete de uma mesma forma. É comum estudarmos nas aulas de Matemática, padrões e propriedades de sequências essencialmente numéricas como as progressões aritméticas e progressões geométricas. Porém há diversos padrões matemáticos na natureza e com um modo de vida mais atento, você pode encontrá-los!



Figura 1.1: Exemplos de identificação de padrões na natureza (MENTALIDADESMATEMÁTICAS, 2021).

Cada folha de uma samambaia é composta por várias folhas menores. Se você observar essas folhinhas, vai notar que elas são miniaturas das versões maiores e a ideia se repete sucessivamente. Esse padrão de repetição faz parte das propriedades dos fractais, objetos estudados pela geometria.

Já os cactos têm um topo arredondado, coberto de protuberâncias e sobre cada uma estão os espinhos. Se observarmos o cacto a partir do seu centro, a conexão até os espinhos vizinhos formam uma espiral. A superfície da planta ainda parece conter triângulos de lados curvos.

Ao tecer sua teia, uma aranha também pode seguir um padrão, sendo o mais comum o de espiral. Na primeira parte do trabalho ela faz a forma de estrela no meio dos suportes. Em seguida, trabalha em um padrão circular em espiral, com fios interconectados.

Curioso, não?

O reconhecimento de padrões também é um dos pilares do que atualmente é chamado **Pensamento Computacional**, um conjunto de estratégias para resolver problemas com eficiência a partir de ferramentas comuns na Computação. O desenvolvimento destas habilidades permite identificar problemas e encontrar soluções de maneira criativa, crítica e estratégica.

Assim podemos entender que um dos papéis da Matemática (e também a Computação) é o de reconhecer padrões. Logo, desenvolver maneiras de descrever, organizar e divulgar propriedades destes padrões também são atividades matemáticas. Para isso acontecer de maneira consistente são necessários símbolos e linguagem específica, conforme será apresentado nos próximos capítulos.

## 1.2 ETNOMATEMÁTICA

---

Segundo segundo o professor Ubiratan D’Ambrósio, que inaugurou no Brasil um campo de estudo denominado “Etnomatemática”. Sua principal mensagem é que podemos pensar no(s) significado(s) de Matemática(s) a partir de sua origens culturais, históricas, sociais e políticas. Literalmente a palavra significa “uma maneira, arte ou habilidade para lidar, explicar, entender, conhecer o mundo”. Você sabia disso?



Figura 1.2: Reprodução do esquema apresentado por Ubiratan D'Ambrosio.

Assim, cada povo em diferentes momentos da história (por isso o “etno”), realizou atividades que podemos considerar como Matemática(s). O que estudamos na escola (e em algumas profissões como Computação e Engenharias) nada mais é que a escolha por um tipo de saber matemático formalizado, dito universal.

## 1.3 COTIDIANO E ALÉM

Outra forma de perceber a Matemática e lhe dar um significado é quando precisamos fazer feira, receber um troco na farmácia ou planejar a compra de um celular novo. As movimentações financeiras, traduzidas nas operações com números, nos dão uma ideia de que fazer Matemática se trata de fazer contas.

Na escola, o foco é dado à Matemática formal, ou seja acessamos saberes matemáticos específicos que foram organizados e sistematizados ao longo do desenvolvimento humano. Quando estudamos temas pouco relacionados ao cotidiano, também podemos

pensar na Matemática como uma Ciência, que estuda seus próprios fenômenos e não teria qualquer conexão com a realidade. Você já se perguntou, por exemplo, porque deve aprender sobre áreas e unidades de medida como o metro quadrado ( $m^2$ )?

Imagine que sua família deseja colocar piso de cerâmica em toda a casa ou deseja pintar as paredes de um cômodo. Se você tiver uma boa compreensão de qual área precisa ser coberta, poderá ajudar sua família a não ter problemas nesse planejamento. Tanto para evitar faltar material e ter o inconveniente de precisar comprar o que falta, quanto para evitar comprar em excesso e acabar desperdiçando (perda financeira).

Vale notar que o saber matemático vai além dos números e operações, pois estudamos também formas e medidas na **Geometria**, elaboramos estratégias para contar agrupamentos de objetos com a **Análise Combinatória**, temos interesse em saber quais as chances de um determinado evento acontecer a partir do estudo de **Probabilidade**, podemos observar o comportamento de uma variável (como um investimento) ao longo do tempo utilizando **Funções**, podemos compreender e organizar informações sobre questões de saúde pública, como aconteceu com a COVID-19 utilizando a **Estatística**. Perceba que há muitos outros exemplos em que estamos utilizando conceitos e ideias relacionados à Matemática, mas não estamos fazendo apenas contas!

Assim, é importante entendermos que há saberes matemáticos que não são imediatamente aplicados à nossa vida particular, inclusive, é possível que nunca sejam! Mas aprender sobre cada um desses temas nos levará a uma compreensão mais ampla do mundo, inclusive para que possamos livremente decidir quais caminhos queremos seguir, quais serão nossas referências para obter informações e quais elementos pautarão nossas decisões.

Vivemos num mundo hiperconectado, cheio de informações, com intensa produção de dados, porém nem tudo que parece é! Saber filtrar e acessar informações de credibilidade e baseado em fatos, tem sido um grande desafio. Assim, cada vez que você precisa tomar uma decisão é importante ter boa capacidade de observação e interpretação do que acessa. Que tal uma reflexão utilizando outro exemplo mais “polêmico”?

Há um grande burburinho sobre a necessidade da existência das cotas raciais<sup>1</sup> para acesso ao Ensino Superior e Institutos Federais. Você entende como a lei funciona? Já se questionou de onde veio sua opinião sobre o tema? Para formar uma opinião fundamentada, com base em argumentos, seria importante, por exemplo:

- Conhecer a finalidade da lei, pois ela é fruto de um processo histórico para atingir um determinado objetivo;
- Compreender o seu funcionamento, pois são calculadas proporções em relação às vagas ofertadas com base em trajetória escolar, renda e etnia;
- Entender como ela tem sido implementada, verificando se os indicadores atestam ou não os objetivos previstos.

Assim, para fundamentar sua opinião seria importante acessar o texto da lei, ter conhecimentos sobre porcentagens, acessar informações estatísticas do IBGE, compreender evolução de dados no tempo, dentre outros aspectos.

---

<sup>1</sup>Lei Nº 12.711/2012. Disponível em <[https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2011-2014/2012/lei/l12711.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12711.htm)>.

## 1.4 REFLEXÃO

---

Apesar deste livro almejar contribuir para uma melhor compreensão dos resultados estabelecidos e estudados na Matemática que acessamos na escola, defendemos que é importante não ter uma visão limitadora e anacrônica. Entendemos que toda a sociedade perde quando os saberes matemáticos são apresentados de forma superficial, autoritária ou inacessível.

O convite aqui realizado é o de aprimorar nossa leitura e compreensão desse saber sistematizado, isto é, como esse saber formal é estruturado, organizado, demonstrado, questionado e refutado. Também desejamos contribuir para a travessia dessas fronteiras, refletindo coletivamente como pode esses saberes podem ser utilizados como recurso para melhorar o nosso modo de estar e interagir com o mundo.

Acreditamos que é papel da escola, das aulas e das obras relacionadas à Matemática fornecer com qualidade e responsabilidade todas as ferramentas para que estudantes sejam capazes de construir livremente suas opiniões, com base em fatos e argumentos.

## CAPÍTULO 2

# Notações Matemáticas

No estudo da Matemática<sup>1</sup> é essencial o uso de terminologias e notações pois há preocupação garantir que uma ideia está bem apresentada, ou seja, que o conhecimento a ser partilhado seja compreendido (FILHO, 2012). O principal foco das terminologias é seleccionar, analisar e verificar os termos apresentados, fazendo com que se torne parte do vocabulário. O foco desse capítulo é falar das notações e de alguns símbolos que são importantes para compreensão da Matemática.

## 2.1 O QUE É UMA NOTAÇÃO?

Para estudarmos a Língua Portuguesa é importante ter acesso à Gramática, pois há um conjunto de símbolos e regras para estabelecer a norma culta. Essa escolha existe para padronizar e facilitar a compreensão textual. Na Matemática também temos a presença de símbolos e suas regras de uso. Nesse caso chamamos de **notação**, que pode ser um símbolo ou mais símbolos que estabelecem, comparam ou transmitem informações.

---

<sup>1</sup>Para evitar o uso excessivo do termo, daqui em diante utilizaremos apenas Matemática, para nos referir à Matemática formal.



**Exemplo 2.1** Podemos escrever:

dois mais três é igual a cinco

Ou simplesmente:

$$2 + 3 = 5$$

Daí podemos perceber uma verdadeira economia de caracteres! Não há nenhuma diferença no significado das frases, elas só foram expressadas em linguagens diferentes. Essa é uma das grandes vantagens que o uso da notação nos traz.

A máxima “A Matemática é uma linguagem universal.” está ancorada nessa questão, pois os símbolos utilizados no Brasil são os mesmos utilizados em outros países, o que permite uma circulação plena das ideias, mesmo que a parte textual esteja em diferentes idiomas.

A notação também serve para representar objetos evitando repetições de palavras. Alguns símbolos matemáticos conhecemos e escrevemos desde a infância, como os utilizados para números e operações, outros só nos são apresentados ou passamos a fazer mais uso no Ensino Médio como é o caso dos símbolos relacionados ao estudos dos conjuntos e das funções. Outros exemplos familiares são:

| Símbolo      | Significado                   |
|--------------|-------------------------------|
| $=$          | igual                         |
| $-$          | menos                         |
| $+$          | mais                          |
| $>$          | maior que                     |
| $<$          | menor que                     |
| $\in$        | pertence                      |
| $\notin$     | não pertence                  |
| $\mathbb{N}$ | conjunto dos números naturais |
| $\mathbb{R}$ | conjunto dos números reais    |

Tabela 2.1: Exemplos de símbolos matemáticos e seus significados.

Porém, o que a princípio é um grande ganho, também pode ser a fonte de bastante dificuldade nas aulas de Matemática. No Ensino Médio, ao serem estudados temas como intervalos de números reais e funções, as notações são massivamente utilizadas e estudantes que não possuem muita familiaridade, começam a ter dificuldade, tanto por não entenderem seus significados, ou ainda, fazendo confusão.

É bem comum misturar e confundir símbolos quando usar parênteses  $( )$ , chaves  $\{ \}$  ou colchetes  $[ ]$ . Antes de prosseguir, ao ler  $(3, 15)$  no que você pensa? Que informação matemática a notação está transmitindo?

- No contexto de intervalo real,  $(3, 15)$  é a notação de um intervalo numérico de números reais. Ou seja, trata-se de um conjunto que possui como elementos todos os números reais maiores que 3 e menores que 15. É importante se ligar que **não pertencem** ao intervalo números **menores que** 3 nem os números **maiores que** 15. Outra forma de escrever o intervalo utilizando a notação de conjunto é:  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 15\}$ .

- No contexto de estudo do plano cartesiano,  $(3, 15)$  é a notação utilizada para se referir ao ponto no plano cartesiano cuja coordenada no das abcissas (eixo  $x$ ) é 3 e a coordenada no eixo das ordenadas (eixo  $y$ ) é 15.
- No contexto das equações lineares,  $(3, 15)$  deve ser a notação utilizada para se referir a uma solução particular de uma equação linear com duas incógnitas. Como por exemplo da equação  $x + y = 18$ .
- No contexto dos sistemas de equações lineares,  $(3, 15)$  deve ser a notação utilizada para se referir a solução do sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas.

Como por exemplo: 
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 10x - y = 15 \end{cases}$$

Perceba que a notação é exatamente a mesma, porém o que elas significam é bastante diferente e requer alguma outra informação para que a mensagem seja compreendida. Logo, além dos símbolos para ler e escrever notações matemáticas, deve-se ter atenção ao contexto para entender o significado e o que ela expressa.

Atualmente para o estudo dos intervalos reais têm-se utilizado os colchetes de maneira diferente para simbolizar se as extremidades fazem parte ou não do conjunto. Ao invés de escrever  $(3, 15)$  tem-se optado por escrever  $]3, 15[$ .

Outra confusão comum em relação a notação de intervalos e conjuntos se dá quando deseja-se falar do conjunto  $\{3, 15\}$ . Trata-se de um conjunto que possui apenas dois elementos o 3 e o 15, já o conjunto  $]3, 15[$  possui infinitos elementos.

## Proposições e quantificadores

No estudo da Matemática é bem comum nos depararmos com afirmações que ao sabermos se são verdadeiras ou falsas nos ajudarão a concluir algum raciocínio. Por exemplo, saber que “10 é um número par” é uma afirmação verdadeira, nos permite dividir igualmente entre duas pessoas 10 bombons.

Neste capítulo compreenderemos um pouco mais sobre as sentenças, seu valor lógico e como as construções matemáticas estão relacionadas.

### 3.1 O QUE É UMA SENTENÇA?

É comum chamar de **frase** o conjunto de palavras (incluindo os sinais de acentuação e pontuação) ou símbolos matemáticos, que se relacionam para comunicar uma ideia. Já uma **sentença** (ou **proposição**) é toda frase ou expressão que se classifica como verdadeira (V) ou falsa (F) e que obedece aos três princípios:

1. Apresenta-se estruturada como uma oração, com sujeito e predicado, incluindo o verbo.
2. É afirmativa declarativa (não pode ser nem interrogativa, nem exclamativa e não pode ser uma sentença aberta).

3. Só pode ser falsa ou verdadeira. Isso significa que não pode ser falsa nem verdadeira ao mesmo tempo. Esta propriedade é conhecida como **Princípio da Não-contradição**.

**Exemplo 3.1** A frase “Maria Luiza escreveu um livro.” é uma sentença pois:

1. Possui sujeito (Maria Luiza), verbo (escreveu) e predicado (um livro).
2. É uma afirmação.
3. É uma afirmação que corresponde aos fatos, isto é, trata-se de uma afirmação verdadeira.

Cada sentença possui o seu valor lógico. Ele é dito verdadeiro quando a sentença é verdadeira e falso caso aconteça o contrário. Dizemos que a sentença é **válida** quando o valor lógico é verdadeiro e que ela **não é válida** quando o valor lógico é falso.

**Observação:** Para tentar diminuir a confusão de termos, optamos por utilizar a palavra proposição apenas nos exemplos matemáticos.

### **Exemplo 3.2**

$$4 - 1 > 1$$

Proposição válida. Pois a frase obedece aos três princípios e é verdade que  $4 - 1 > 1$ .

### Exemplo 3.3

$$91 < 19$$

Proposição não válida. Esta frase é uma sentença, pois obedece aos três princípios. Porém ela não é válida pois o 91 não é menor que o 19, ou ainda, por 91 ser maior que 19.

Parecem mas não são sentenças:

### Exemplo 3.4

Vamos estudar!

Não há elementos para caracterizar a frase como uma sentença: não há sujeito, não há predicado e a frase é exclamativa).

### Exemplo 3.5

A soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar?

Não pode ser considerada uma sentença pois uma sentença nunca será interrogativa.

### Exemplo 3.6

$x$  é um número inteiro.

Perceba que a estrutura da frase possui sujeito (valor desconhecido  $x$ ), verbo (é) e predicado (um número inteiro). A frase também é uma afirmação declarativa. A única coisa que está faltando pra ser uma sentença é sermos capazes de decidir sobre a veracidade da afirmação.

Em casos como o do **Exemplo 3.6** dizemos que estamos diante uma **sentença aberta**, pois não temos informações sobre o número, para então avaliar a veracidade (e atribuir um valor lógico ao que se tornará uma sentença).

É importante pontuarmos que enquanto a Lógica Formal estuda as relações entre as proposições, sem efetivamente preocupar-se com os valores lógicos, um dos objetivos da Matemática é formular e demonstrar sob que condições as proposições são verdadeiras ou falsas. Assim na Matemática são utilizadas as ferramentas da Lógica Proposicional com uma finalidade específica.

Agora é sua vez! Você saberia dizer qual das frases abaixo são sentenças?

- (a) O Brasil possui mais de 200 milhões de habitantes.
- (b) Estamos no verão?
- (c) 24 é o mesmo que 4!.
- (d) A raiz quadrada de 100 é igual 10.
- (e) Todo número primo maior ou igual a 3 é ímpar.
- (f)  $x + 2$
- (g)  $6 \leq 7 - 1$
- (h)  $x + 2 > 5$
- (i)  $x + 2 = 5$
- (j) Se  $x + 2 = 5$ , então  $x = -3$ .
- (k) Se  $x + y = 5$ , então  $x = 3$  e  $y = 2$ .

(I) Se  $x = 3$  e  $y = 2$ , então  $x + y = 5$ .

Note que o uso das sentenças é de extrema importância para estudarmos propriedades e conceitos matemáticos. Veremos adiante como é possível articular sentenças simples e para obter sentenças compostas, cujo valor lógico terá que ser analisado conforme foi realizada a ligação.

Lembrando que toda sentença precisa ser expressão de um pensamento completo (declaração), ter um sujeito, um verbo e um predicado e, atender ao princípio da não contradição.

## 3.2 SENTENÇA SIMPLES

Imagine as pessoas que moram perto da UFRPE - Campus Dois Irmãos e precisam apenas de um ônibus para se deslocar, por exemplo a linha *“524- Sítio dos Pintos”*.

É como se, para chegar no destino, existisse apenas uma etapa a ser realizada. Nesse caso seria apenas um ônibus e por isso essa sentença seria simples. Quando a pessoa afirma “Eu pego apenas um ônibus para ir até a universidade”, trata-se de uma sentença simples.

Já quem mora em São Lourenço da Mata, para chegar no mesmo destino precisa fazer o deslocamento com duas conduções, por exemplo usando as linhas *“2493 - Tiúma/TI Camaragibe”* e *“2490 - TI Camaragibe/TI Macaxeira”*. Essa outra pessoa poderia fazer a afirmação: “Pego um ônibus para chegar ao terminal de Camaragibe e pego outro ônibus para ir à universidade.”. Nesse caso há duas etapas a serem realizadas e assim a sentença é composta.



Você pode estar se perguntando do que a sentença é “composta”, e a resposta é bem simples e trivial, ela é composta por duas (ou mais) sentenças simples. Porém como essas sentenças simples são “conectadas” faz toda a diferença para sabermos o valor lógico da sentença composta, conforme estudaremos a seguir.

Observe alguns exemplos matemáticos de sentenças simples.

### **Exemplo 3.7**

$$7 - 10 > -4$$

Valor lógico verdadeiro.

### **Exemplo 3.8**

$$\frac{10}{3} = 10,3$$

Valor lógico falso.

### **Exemplo 3.9**

$$10^{2024} - 1 \text{ é divisível por } 9$$

Valor lógico verdadeiro.

### **Exemplo 3.10**

A função real seno assume valores no intervalo  $[-1, 1]$ .

Valor lógico verdadeiro.

Perceba que na formação de sentenças simples não há mais de uma sentença.

### 3.3 SENTENÇAS COMPOSTAS

Quando uma sentença é formada de uma combinação finita de pelo menos duas sentenças simples, dizemos que se trata de uma **sentença composta**.

Para formar uma sentença composta juntamos as sentenças simples com o auxílio de conectivos. Os mais comuns são “não”, “e”, “ou”, “ou ... ou” e o “se ... então”. O valor lógico da sentença composta depende da validade de cada sentença simples e do conectivo que as une.

vamos apresentar os símbolos que os representam.

| Conectivo           | Símbolo            | palavras associadas |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| Conjunção           | $\wedge$           | e                   |
| Disjunção           | $\vee$             | ou                  |
| Disjunção exclusiva | $\underline{\vee}$ | ou ... ou           |
| Negação             | $\neg$ ou $\sim$   | não                 |
| Condicional         | $\rightarrow$      | se ... então        |

Tabela 3.1: Conectivos lógicos mais comuns nas sentenças matemáticas compostas.

Antes de falar dos valores lógicos das sentenças compostas, observe os exemplos a seguir e mentalmente atribua o valor lógico de cada uma.

### Exemplo 3.11

- (a) 2 não é um número par.
- (b)  $-5 \geq -7$
- (c)  $10 + 3 > 7$  ou  $10 + 3 = 7$
- (d)  $3 < 1$  e  $3 = 1$
- (e)  $3 > 1$  e  $3 = 1$
- (f) Todo número real, exceto o zero, ou é positivo ou é negativo.
- (g) Se  $n \in \mathbb{N}$  é um número primo, então  $n$  é ímpar.
- (h) Se  $n \in \mathbb{N}$  é um número primo e é um número par, então  $n = 2$ .

## 3.4 CONECTIVOS LÓGICOS E TABELA-VERDADE

Para definir o valor lógico das sentenças compostas podemos utilizar a **tabela-verdade**. Ela é um recurso que nos ajuda a organizar todas as combinações de valores lógicos das sentenças simples para estabelecer o valor lógico da sentença composta, conforme conectivo utilizado.

Na tabela-verdade (e em outras situações onde o conteúdo da sentença não é relevante) as sentenças são representadas por letras minúsculas e para os conectivos são utilizados os símbolos conforme apresentamos na **Tabela 3.1**.

### 3.4.1 Conjunção

Acontece quando juntamos duas (ou mais) sentenças utilizando o conectivo “e”. Nesse caso há um sentido de que duas (ou mais) ações precisam acontecer simultaneamente pra que a sentença composta seja válida. Nesse caso, o valor lógico da sentença composta só é verdadeiro se cada uma das sentenças simples também for.

#### Exemplo 3.12

$p$  : 2 é um número par

O valor lógico de  $p$  é verdadeiro.

$q$  : 2 é um número primo

O valor lógico de  $q$  é verdadeiro.

$r$  : 2 é um número ímpar

O valor lógico de  $r$  é falso.

$p \wedge q$  : 2 é um número par e é um número primo

O valor lógico de  $p \wedge q$  é verdadeiro.

$p \wedge r$  : 2 é um número par e é um número ímpar

O valor lógico de  $p \wedge r$  é falso.

Na **Figura 3.1** apresentamos uma maneira visual pra lhe ajudar a compreender como a tabela-verdade de uma conjunção é estabelecida.

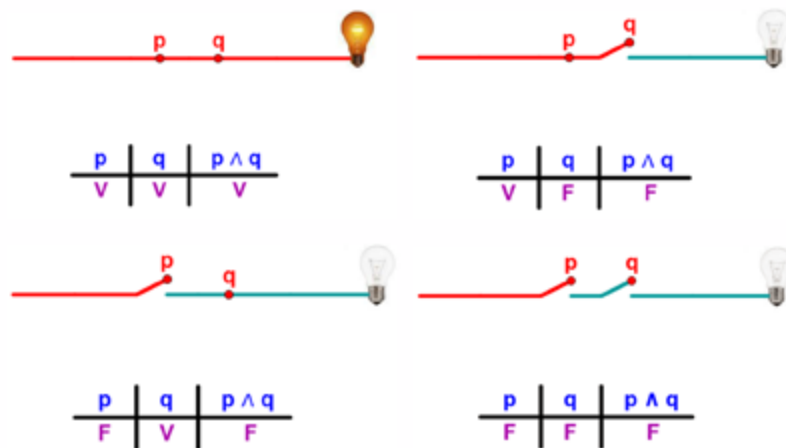


Figura 3.1: Analogia para obtenção da tabela-verdade de  $p \wedge q$ , (??).

A analogia é feita a partir da organização de dois interruptores que fazem o papel das sentenças simples, quando o interruptor é acionado significa que a sentença é verdadeira e quando não está acionado significa que a sentença é falsa. Já o resultado “acender a luz” nos diz que a sentença composta é verdadeira, enquanto o resultado “não acender a luz” nos diz que a sentença composta é falsa.

Observe a seguir como fica a tabela-verdade da conjunção de duas sentenças simples  $p$  e  $q$ .

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| V   | V   | V            |
| V   | F   | F            |
| F   | V   | F            |
| F   | F   | F            |

Tabela 3.2: Tabela-verdade da conjunção de duas sentenças simples.

### 3.4.2 Disjunção

Acontece quando juntamos duas (ou mais) sentenças utilizando o conectivo “ou”. Nesse caso há um sentido pelo menos uma das ações precisam acontecer pra que a sentença composta seja válida. Nesse caso, o valor lógico da sentença composta é verdadeiro se pelo menos uma das sentenças simples também for.

#### Exemplo 3.13

$p$  : 2 é um número par

O valor lógico de  $p$  é verdadeiro.

$q$  : 2 é um número primo

O valor lógico de  $q$  é verdadeiro.

$r$  : 2 é um número ímpar

O valor lógico de  $r$  é falso.

$p \vee q$  : 2 é um número par ou é um número primo

O valor lógico de  $p \vee q$  é verdadeiro.

$p \vee r$  : 2 é um número par ou é um número ímpar

O valor lógico de  $p \vee r$  é verdadeiro.

Na **Figura 3.2** apresentamos novamente uma maneira visual pra ajudar a compreender como a tabela-verdade de uma disjunção é estabelecida.

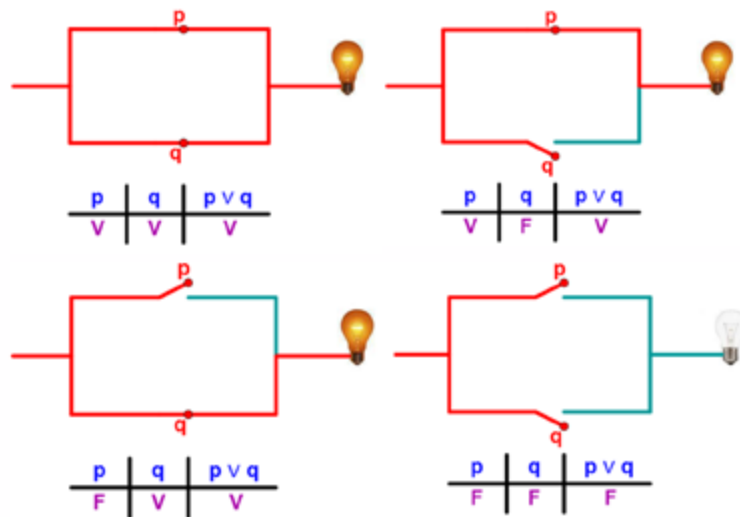


Figura 3.2: Analogia para obtenção da tabela-verdade de  $p \vee q$ , (??).

É como se na disjunção houvesse mais flexibilidade para o valor lógico da sentença composta ser verdadeira. Observe a seguir como fica a tabela-verdade da disjunção de duas sentenças simples  $p$  e  $q$ .

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | V          |
| F   | V   | V          |
| F   | F   | F          |

Tabela 3.3: Tabela-verdade da disjunção de duas sentenças simples.

### 3.4.3 Disjunção Exclusiva

Ocorre quando juntamos duas (ou mais) sentenças utilizando o conectivo “ou” antes de cada uma. Nesse caso há um sentido de que apenas uma das ações precisa acontecer pra que a sentença composta seja válida. Nesse caso, o valor lógico da sentença

composta é verdadeiro se pelo somente uma das sentenças simples também for.

### Exemplo 3.14

$p$  : 2 é um número par

O valor lógico de  $p$  é verdadeiro.

$q$  : 2 é um número primo

O valor lógico de  $q$  é verdadeiro.

$r$  : 2 é um número ímpar

O valor lógico de  $r$  é falso.

$p \vee q$  : ou 2 é um número par ou 2 é um número primo

O valor lógico de  $p \vee q$  é falso.

$p \vee r$  : ou 2 é um número par ou é um número ímpar

O valor lógico de  $p \vee r$  é verdadeiro.

Na disjunção exclusiva é como se houvesse uma única opção de verdade para que o valor lógico da sentença composta seja também verdadeiro. Observe a seguir como fica a tabela-verdade da disjunção exclusiva de duas sentenças simples  $p$  e  $q$ .

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | F          |
| V   | F   | V          |
| F   | V   | V          |
| F   | F   | F          |

Tabela 3.4: Tabela-verdade da disjunção exclusiva de duas sentenças simples.



### 3.4.4 Negação

Acontece quando queremos mudar o valor lógico de uma sentença.

#### Exemplo 3.15

$p$  : 2 é um número par

O valor lógico de  $p$  é verdadeiro.

$\sim p$  : 2 não é um número par

O valor lógico de  $\sim p$  é falso.

Saiba que  $\sim p$  também poderia ser “2 é um número ímpar”, pois ser ímpar significa literalmente não ser par. Observe a seguir como fica a tabela-verdade da negação de uma sentença simples  $p$ .

| $p$ | $\sim p$ |
|-----|----------|
| V   | F        |
| F   | V        |

Tabela 3.5: Tabela-verdade da negação de uma sentença simples.

Caso a sentença a ser negada seja composta, é necessário ter cuidado! Como você negaria por exemplo a sentença composta “Vou à praia e vou ao shopping.”? Lembre que ela só é válida quando ambas as sentenças simples são válidas.

Assim, a negação de uma conjunção muda cada um dos seus valores lógicos, conforme os valores das sentenças simples mudam. Observe a tabela-verdade a seguir.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|---------------------|
| V   | V   | V            | F                   |
| V   | F   | F            | V                   |
| F   | V   | F            | V                   |
| F   | F   | F            | V                   |

Tabela 3.6: Tabela-verdade da negação de uma conjunção.

Você pode ter pensado que concretamente negar que ‘Vou à praia e vou ao shopping.’ é negar a possibilidade de uma ou outra coisa não acontecer, percebe? De fato temos uma equivalência entre os valores lógicos de  $\sim (p \wedge q)$  e  $\sim p \vee \sim q$ , conforme mostra a tabela-verdade abaixo.

| $p$ | $q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ |
|-----|-----|---------------------|----------|----------|----------------------|
| V   | V   | F                   | F        | F        | F                    |
| V   | F   | V                   | F        | V        | V                    |
| F   | V   | V                   | V        | F        | V                    |
| F   | F   | V                   | V        | V        | V                    |

Tabela 3.7: Tabela-verdade mostrando equivalência entre a negação de uma conjunção e disjunção da negação.

### Exemplo 3.16

$p$  : Vou à praia.

$q$  : Vou ao shopping..

$p \wedge q$  : Vou à praia e vou ao shopping.

Portanto,  $\sim (p \wedge q)$  é equivalente a:

$\sim p \vee \sim q$  : Não Vou à praia ou não vou ao shopping.

Utilizando o raciocínio semelhante também é possível mostrar

que para duas sentenças simples  $p$  e  $q$  são equivalentes  $\sim (p \vee q)$  e  $\sim p \wedge \sim q$ , conforme mostra a tabela-verdade abaixo.

| $p$ | $q$ | $\sim (p \vee q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|-----|-----|-------------------|----------|----------|------------------------|
| V   | V   | F                 | F        | F        | F                      |
| V   | F   | F                 | F        | V        | F                      |
| F   | V   | F                 | V        | F        | F                      |
| F   | F   | V                 | V        | V        | V                      |

Tabela 3.8: Tabela-verdade mostrando equivalência entre a negação de uma disjunção e conjunção da negação.

### Exemplo 3.17

$p$  : Vou à praia.

$q$  : Vou ao shopping..

$p \vee q$  : Vou à praia ou vou ao shopping.

Portanto,  $\sim (p \vee q)$  é equivalente a:

$\sim p \wedge \sim q$  : Não Vou à praia e não vou ao shopping.

### 3.4.5 Condicional

É quando juntamos duas sentenças utilizando os conectivos “se ... então”. Nesse caso há um sentido de que uma ações está dependendo de outra. Para que a sentença composta seja verdadeira há a possibilidade de a condição inicial ser atendida e a contambém. Ou ainda quando a condição inicial não é atendida, daí não importa se a conse realizou ou não. Primeiro vamos analisar um exemplo não matemático:

### Exemplo 3.18

$p$  : Hoje é domingo

$q$  : Vou me exercitar

$p \rightarrow q$  : Se hoje é domingo, então vou me exercitar.

Quando é domingo e a pessoa vai se exercitar, o que ela falou é verdade. A condição ser domingo e a condesse fato, ir se exercitar, foram atendidos. Nesse caso a sentença composta “Se é domingo, então vou me exercitar” é verdadeira. Se é domingo e a pessoa não vai se exercitar, ela não atendeu à condição, percebe? Assim, a condição de ser domingo existiu, mas a pessoa desrespeitou. Nesse caso a sentença composta “Se é domingo, então vou me exercitar” é falsa.

E o que acontece quando não é domingo? A pessoa fica livre para ir ou não se exercitar, sem ferir a condição inicial. Assim, pelo princípio do terceiro excluído, o que não é falso obrigatoriamente é verdadeiro.

Quando  $p$  é verdade, para que a sentença condicional seja verdadeira é obrigatório que  $q$  também seja verdadeira. Nesse caso,  $q$  ser falsa torna a sentença condicional também falsa. Já quando  $p$  é falsa, independente do valor lógico de  $q$ , a sentença condicional será verdadeira.

### Exemplo 3.19

$p$  : 2 é um número par

O valor lógico de  $p$  é verdadeiro.

$q$  : 6 é um número primo

O valor lógico de  $q$  é falso.

$r$  : 2 é um número ímpar

O valor lógico de  $r$  é falso.

$p \rightarrow q$  : Se 2 é um número par, então 6 é um número primo

O valor lógico de  $p \rightarrow q$  é falso.

$q \rightarrow r$  : Se 6 é um número primo, então 2 é um número ímpar.

O valor lógico de  $q \rightarrow r$  é verdadeiro.

**Observação:** No contexto das proposições matemáticas e nos teoremas a sentença que acompanha o “Se...” é chamada **hipótese** e a sentença que acompanha o “então” é chamada de **tese**. Numa demonstração o que se deseja mostrar é que a tese é conduta hipótese.

### 3.5 IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Perceba que podemos ter uma sentença condicional verdadeira a partir de sentenças simples que são falsas. Esse fato é muito útil para demonstrar a validade ou para refutar resultados matemáticos que tem esse tipo de estrutura.

Na Matemática formal é muito comum lidar com uma estrutura bem parecida com a condicional, ela é chamada **implicação**. Na implicação só é admitido o caso em que as sentenças simples são verdadeiras. O símbolo da implicação é  $\Rightarrow$  e em termos de linguagem coloquial ela é bem similar à condicional.

As implicações são muito utilizadas em resultados matemáticos como as **Proposições** e **Teoremas**. Falaremos com mais deta-

lhes no próximo capítulo, mas adiantamos que a principal finalidade desse tipo de estrutura para a construção dos resultados matemáticos é que podemos obter novas propriedades a partir de demonstrações utilizando argumentos válidos e as características intrínsecas dos objetos.

### Exemplo 3.20

**Proposição 3.1** Se a soma dos algarismos de um número natural é um múltiplo de 3, então esse número natural é divisível por 3.

O **Exemplo 3.20** ilustra bem essa ideia. Provavelmente você já ouviu ou até mesmo utilizou a dica para saber se um determinado número natural era divisível por 3. Ela é conhecida como Critério de Divisibilidade por 3 e pode ter aparecido na sua vida de maneira “mágica”. Você pode se questionar, como garantir que as sentenças simples são simultaneamente verdadeiras para determinados números naturais? Isto é, que sempre é verdade que somar os algarismos nos dirá se um número natural é divisível por 3.

Esse tipo de conclusão é possível a partir de uma **demonstração**. Nela são utilizados argumentos válidos que permitem concluir a veracidade (ou não) da afirmação. Além do valor lógico da sentença simples também podem ser necessários outros conhecimentos para proceder com uma demonstração. Nesse caso por exemplo é necessário entender o significado de ser divisível e de algumas propriedades da divisão.

Em cada *QRcode* abaixo você pode acompanhar como utilizar o critério e qual a ideia geral para proceder com demonstração (à esquerda) e a demonstração formal (à direita).



Figura 3.3: Confira os vídeos sobre o uso do Critério de Divisibilidade por 3 do Portal do Saber da OBMEP e a demonstração dada pelo professor André Costa, da Universidade Federal do Ceará.

## 3.6 SENTENÇAS ABERTAS

Você deve ter respondido que a frase do item *(h)* não é uma sentença. No entanto é possível determinar seu valor lógico se acrescentarmos informações à variável  $x$ . Por exemplo, se  $x > 3$  a afirmação será verdadeira e  $x \leq 3$  será falsa.

Quando uma afirmação está associada a uma variável que fica livre, mas não conseguimos determinar o valor lógico dessa afirmação, estamos diante de uma **sentença aberta**. Nesse contexto, a variável pode assumir diferentes valores, tornando impossível determinar o valor lógico da sentença<sup>1</sup>. Quando esse impasse é superado, a afirmação passa a ser uma sentença e o valor lógico pode ser atribuído.

Note que estamos chamando “sentença aberta” uma afirmação que a rigor nem é sentença! Essa terminologia é usada na literatura com um propósito: tornar a afirmação “sentença aberta” em uma sentença, ao indicar elementos de um conjunto que gozam ou não da propriedade correspondente a cada variável da sentença aberta.

---

<sup>1</sup>Lembre-se que podemos falar em proposição ou sentença.

## 3.7 QUANTIFICADORES

As informações “que faltam” para que possamos determinar o valor lógico das sentenças abertas geralmente são preenchidas quando utilizamos os **quantificadores**. Eles podem ser **universais** ou **existenciais**. Com eles as afirmações passam a ser sentenças e então somos capazes de avaliar seus valores lógicos.

| Quantificador | Símbolo     | Leitura                                               |
|---------------|-------------|-------------------------------------------------------|
| Universal     | $\forall$   | Para todo; Qualquer que seja; Para cada.              |
| Existencial   | $\exists$   | Existe; Existe um; Existe pelo menos um.              |
| Existencial   | $\exists !$ | Existe um único; Existe um e apenas um; Existe só um. |

Tabela 3.9: Símbolos e leitura de quantificadores universal e existenciais.

### 3.7.1 Quantificadores universais

São utilizados quando desejamos falar de todos os elementos de um determinado conjunto. Na linguagem coloquial são utilizadas palavras como “Para todo”, “Todos os elementos” e similares.



**Exemplo 3.21** Já sabemos que a afirmação

$n$  é um número positivo

Não se trata de uma sentença. Se adicionarmos a informação de que  $x \in \mathbb{N}$ , a afirmação

Todo número natural é um número positivo.

Trata-se de uma sentença cujo valor lógico é verdadeiro. Esta sentença também poderia ser escrita utilizando um quantificador universal:

$$\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$$

**Exemplo 3.22**

Todo número inteiro é um número positivo.

Utilizando um quantificador universal, poderíamos reescrevê-la como:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0$$

Seja como for, a sentença é inválida, isto é, seu valor lógico é falso. Afinal há números inteiros que não são positivos.

**Exemplo 3.23**

Todo número primo é um número ímpar.

Sentença inválida, pois o número 2 é um número primo que também é número é par.

### **Exemplo 3.24**

Todos os números ímpares são números primos.

Sentença inválida, pois existem números ímpares que não são primos (como o 15, por exemplo).

## **3.7.2 Quantificadores existenciais**

São utilizados quando desejamos falar de algum ou alguns elementos de um determinado conjunto. Ou seja, desejamos falar de característica que está presente em algum (ou alguns) elementos do conjunto. São utilizadas palavras como “Há (pelo menos um)”, “Existe(m)”, “Alguns” e similares.

### **Exemplo 3.25**

Há números naturais ímpares que também são números primos.

Sentença válida. Pois há números que atendem à ambas as condições, como o 7 e o 13, que são números ímpares e também são números primos.

### **Exemplo 3.26**

Existe um único número natural par que também é número primo.

Sentença válida. Pois há um único número que atende à ambas as condições, o número 2.

### Exemplo 3.27

Existem números naturais pares que também são números primos.

Sentença inválida. Apenas o número 2 atende ao critério de ser um número primo (ter como divisores apenas o 1 e o próprio número). Todos os números pares, exceto o 2 tem, no mínimo, como divisores 1, 2 e o próprio número. Esse fato caracteriza e nos informa que todos os demais números pares não tenham a característica “ser um número primo”.

Perceba que a sentença afirma que “Existem” e isso é um plural, pra que ela seja válida seria necessário apresentar no mínimo dois números pares que também fossem primos, percebe? Como estes números não existem, ela necessariamente é falsa.

### Exemplo 3.28

Alguns números naturais são positivos.

A sentença válida. Apesar de todos os números naturais atenderem a sentença e ela parecer trivial, note que ela ainda assim, é verdadeira e pode ser escrita como:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x > 0$$

Percebeu que conforme uso do quantificador podemos obter valores lógicos bem diferentes? Reflita sobre a “sentença aberta”  $x + 2 = 5$  e uso de cada quantificador no **Exemplo 3.29**.

### Exemplo 3.29

(a) Utilizando o quantificador existencial:

Existe um número real  $x$ , tal que  $x + 2 = 5$ .

Ou ainda,

$$\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$$

Que é uma sentença válida, pois  $x = 3$  torna a igualdade verdadeira e  $3 \in \mathbb{R}$ .

(b) Utilizando o quantificador universal:

Para todo número real  $x$ , temos que  $x + 2 = 5$ .

Ou ainda,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$$

Que é uma sentença inválida. Por exemplo, se tomarmos  $x = 1$ ,  $1 \in \mathbb{R}$ , no entanto,  $1 + 2 = 3 \neq 5$ .

Perceba que cada quantificador tem a sua finalidade e uso devido. A ordem na qual os quantificadores de naturezas distintas aparecem numa sentença pode modificar inteiramente seu sentido e valor lógico, conforme apresentado no **Exemplo 3.31**.

1. O **quantificador universal** é usado para definir propriedades que valem para todos os elementos de um conjunto. Nesse caso, notação utilizada é o  $\forall$ .
2. O **quantificador existencial** é usado para definir propriedades que valem para, pelo menos, um elemento de um conjunto, cuja

notação é  $\exists$ . No caso de existir um *único elemento*<sup>2</sup> a linguagem deve ser explícita e a notação utilizada é  $\exists!$ .

**Exemplo 3.30** Você consegue identificar qual quantificador está presente em cada sentença abaixo?

- (a) Todas as pessoas que leram esse livro são estudiosas.
- (b) Algumas pessoas que leram esse livro gostam de estudar Matemática.
- (c) Há pessoas que leram esse livro tem dificuldade para estudar Matemática.
- (d) Esse livro possui apenas uma autora.

### Exemplo 3.31

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } y^2 = n$$

Ao trocar os quantificadores de ordem, teremos:

$$\exists y \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que } y^2 = n$$

A primeira sentença é válida. Todo número inteiro quando elevado ao quadrado resulta em algum número natural<sup>3</sup>, ou seja, existe essa condição.

---

<sup>2</sup>Esse tipo de sentença é bastante comum em Teoremas de Unicidade, que garantem que, se existir algum objeto que possua determinada propriedade, então ele será o único.

Já a segunda sentença é inválida. É falso que todo número natural é igual ao quadrado de algum número inteiro. O número 6, por exemplo, é um número natural e não existe um número inteiro que elevado ao quadrado seja igual a 6.

Cada explicação dada para atestar a validade ou não das sentenças utilizando os quantificadores são exemplos de como devemos realizar uma demonstração matemática. Nos próximos capítulos essa temática será retomada e novos exemplos serão apresentados.

# Definição, Teorema, Fórmula... O que, como e quando usar?

É possível que você já tenha se confundido com cada uma das palavras que nomeiam esse Capítulo. Saber a diferença entre elas pode te ajudar a compreender com mais facilidade a estrutura da Matemática formal e como utilizá-la de maneira mais esperta!

De forma resumida e informal uma definição é uma escolha teórica e não pode ser modificada, enquanto um teorema requer uma demonstração para ser validado. Já uma fórmula é uma ferramenta que pode ser fruto de uma definição ou de um teorema.

A grande vantagem de saber essas diferenças é que ao conhecer as definições entendemos melhor o que estamos estudando, como as principais características e propriedades. Ao entender os teoremas entendemos como as propriedades intrínsecas dos objetos podem gerar propriedades adicionais. A rigor, todo problema que é solucionado utilizando uma fórmula pode ser solucionado sem ela. A principal finalidade de uma fórmula é poupar tempo e energia, procedendo de maneira mais mecânica.

## 4.1 O QUE É UMA DEFINIÇÃO?

**Definir** significa dar nome aos objetos e trata-se de uma escolha conveniente. Logo, não pode haver contradição. Uma definição bem descrita ajuda a compreender sobre tal assunto, pois ela é a certeza do ponto de partida. Grande parte dos objetos a serem estudados na Matemática precisam ser definidos, para que todas as pessoas que acessam esse conhecimento estejam lidando com a mesma coisa, sem confusão, sem dualidades e, principalmente, sem contradições.

Se é necessário falar dos números naturais é importante saber quais são as características destes números, ou seja, é necessário estabelecer uma condição para que um número seja considerado natural. Assim, é preciso estabelecer a definição dos números naturais para então ser possível caracterizar os elementos do conjunto, fazendo com que seja possível identificá-los e estudar propriedades, tanto dos elementos quanto do conjuntos. Outra coisa importante dos conjuntos numéricos é que existem símbolos que os representam, para os números naturais utilizamos o símbolo  $\mathbb{N}$ .

A definição não é uma demonstração! Se, por exemplo, desejamos falar sobre números inteiros, é necessário definir o que são estes números, isto é, qual a característica comum a cada um dos elementos do conjunto. O conjunto dos números inteiros (representado pela letra  $\mathbb{Z}$ ), surgiu a partir da necessidade de calcular e registrar de maneira única e consistente uma perda.

Por exemplo, se quero comprar uma coxinha que custa 5 reais e eu tenho apenas 2 reais, ficarei devendo 2 reais. Em símbolos essa quantidade de dívida é representada por -3 reais, que em termos de quantidade é o que falta (3 reais). Para simbolizar essa falta é



fundamental utilizar o sinal de menos “-” antes da quantidade 3 reais.

Lidar com o entendimento dos números inteiros e outros conjuntos numéricos que possuem essa característica de “números negativos” pode ser mais simples quando entendemos qual a finalidade desse sinal, que é basicamente avisar que o número é menor que 0. Afinal, a nível de saúde financeira é bem melhor ter 0 reais do que uma dívida de 3 reais. Isso nos ajuda a entender o motivo de 0 ser maior que -3, ou ainda, que -1 é maior que -3.

## 4.2 O QUE É UM TEOREMA?

No geral, um **Teorema** é uma proposição que permite estabelecer propriedades úteis e poderosas que não são direta ou facilmente comprovadas, mas que por meio da argumentação lógica nos conduz à sua prova (demonstração).

Diferente de uma definição, o Teorema é uma verdade estabelecida por meio de uma demonstração utilizando argumentos válidos. O teorema e a demonstração sempre caminham juntos. Reflita sobre a uma proposição a seguir que utiliza um quantificador existencial.

### Exemplo 4.1

Existem quatro números primos entre 1 e 9.

Uma possível estratégia para dizer o valor lógico dessa proposição é mostrar que para cada número entre 1 e 9 os únicos que são primos<sup>1</sup> são os números 2, 3, 5 e 7. Perceba que como a quantidade

---

<sup>1</sup>Tem como conjunto dos divisores apenas o 1 e o próprio número

de números para verificar é pequena, é relativamente fácil concluir que o valor lógico é verdadeiro. Agora pense um pouco a respeito da seguinte proposição:

### Exemplo 4.2

Existem infinitos números primos.

Você diria que ela é verdadeira ou é falsa? Nessa proposição, perceba que se ela for falsa, significa que existe o conjunto dos números primos é finito, ou seja, teria um “último” elemento, que seria maior que todos os outros. Sua missão poderia ser então encontrar esse número, argumentar que não existe outro número primo maior que ele e então estaria mostrando que a afirmação é falsa.

Porém, você já deve ter conhecimento ou pode ter tido a intuição<sup>2</sup> de que se tratava de uma proposição verdadeira. Como você procederia com a demonstração? Como essa proposição nos fornece um fato muito importante ela é geralmente chamada por Teorema nos livros de Matemática. Há uma famosa demonstração atribuída a Euclides utilizando a técnica chamada de **redução ao absurdo**, deixaremos uma indicação de leitura ao apresentarmos o tema.

Na Matemática, quando nos deparamos com esse tipo de situação precisamos demonstrar que a proposição (ou Teorema) ou é verdadeira ou que é falsa. Para ambos os casos existem diferentes técnicas, pois Teoremas nem sempre são sobre números, eles podem estar relacionados a quaisquer objetos matemáticos como conjuntos, funções, triângulos, retas, dentre outros.

---

<sup>2</sup>Nome bonito para “Eu acho que...”, mas muito útil para pensarmos numa estratégia para validar ou não um Teorema

### Exemplo 4.3

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Este é um dos teoremas mais utilizados na vida escolar é o que ficou conhecido mundialmente por “Teorema de Pitágoras”, porém já se sabe que muito antes dele surgir na história da Matemática povos africanos e da já faziam uso desse resultado.

Você consegue perceber o quão potente é essa proposição? Já conseguiu realizar a demonstração? O fato dela ser verdadeira nos diz que para qualquer triângulo retângulo existe uma relação prevista entre as medidas da hipotenusa e as medidas dos catetos.

Observe na **Figura 4.1** a reconstrução de parte da demonstração presente no livro “Os Elementos” de Euclides elaborada com apoio do *software* Geogebra, (MOLINER, 2017).

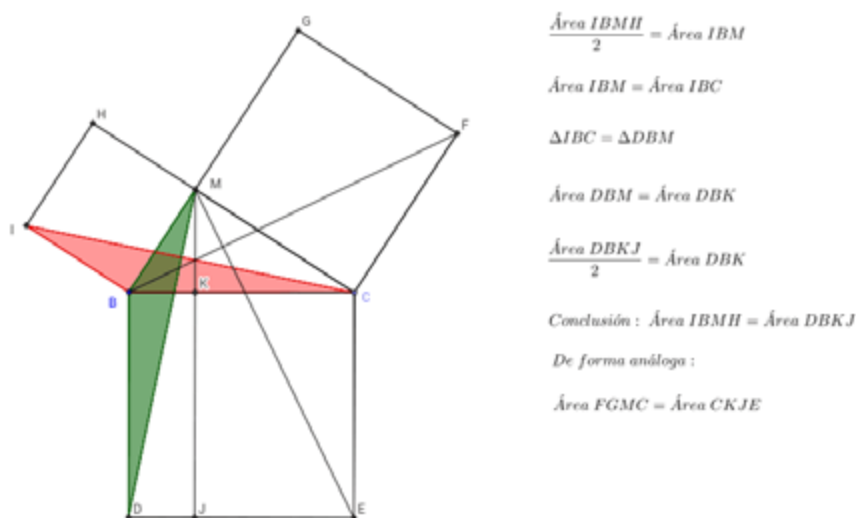


Figura 4.1: Ilustração da demonstração do “Teorema de Pitágoras”.

Essa relação é bastante útil quando dispomos de duas medidas conhecidas em um triângulo retângulo e desejamos saber o valor

da medida desconhecida. Sua existência vai muito mais além, pois a partir dessa relação foi e é possível realizar medições indiretas (como alturas) e estabelecer muitas outras relações numa área de estudo conhecida como Trigonometria.

Num sentido Moderno, essa relação que inicialmente foi demonstrada geometricamente, ganhou uma “cara” de fórmula, pois novas maneiras de representar os objetos matemáticos e suas relações foram surgindo e se consolidando ao longo da história.

Em qualquer triângulo retângulo se  $a$  é a medida do segmento de reta da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) e  $b$  e  $c$  são medidas dos segmento de reta de cada um dos catetos o teorema se pode ser resumido na relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Infelizmente, para uma quantidade imensa de estudantes esse importante e útil resultado é a causa de muita dor de cabeça! Além de não ficar evidente a que se refere o teorema, qual seu significado, ou ainda, como e porque ele é verdadeiro, há ainda a necessidade de “decorar” uma fórmula e porventura precisar trabalhar com números irracionais.

## 4.3 O QUE É UMA FÓRMULA?

As **fórmulas** são resultados de experiências que surgirão de acordo com a necessidade de registrar alguma relação fixa estabelecida a partir de uma lógica.

Para que uma expressão venha a ser considerada uma fórmula pode ser necessário uma demonstração para provar sua veraci-

dade. Elas também costumam resumir um certo número de dados, enunciar uma regra e também pode ser uma síntese do desenvolvimento de um raciocínio. Esse último caso é o que acontece com as “fórmulas” presentes no estudo de temas relacionados à Análise Combinatória como Permutações, Arranjos e Combinação Simples.

No cotidiano escolar há fórmulas muito conhecidas, já foi mencionada a fórmula do Teorema “de Pitágoras”, no **Exemplo 4.4** deixamos lembradas a fórmula para solucionar equações do 2º grau (que no Brasil é mais conhecida como “fórmula de Bhaskara”), fórmula da combinação simples e relação de Euler para poliedros convexos.

#### Exemplo 4.4

(a) Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ . Se  $ax^2 + bx + c = 0$ , então

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(b) A combinação simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  é dada por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(c) Em todo poliedro convexo, se  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, então

$$V - A + F = 2$$

Note que cada fórmula exprime coisas diferentes:

(a) Uma de passos que permite exibir as raízes de uma equação quadrática a partir de seus coeficientes;

- (b) Operações para contar de maneira eficiente o número de agrupamentos possíveis a partir do total de objetos e da quantidade de elementos nos subconjuntos que se deseja formar;
- (c) Uma relação entre entes dos poliedros que nos permite calcular um valor faltante quando são conhecidos outros dois.

A fórmula para a resolução das equações do 2º grau (com uma variável), trata-se de uma interpretação moderna do procedimento repetitivo que Bhaskara utilizava para solucionar problemas que recaiam em equações desse tipo. Trata-se de uma técnica chamada de “completar quadrados” e depois extrair a raiz quadrada do trinômio do quadrado perfeito obtido na etapa anterior. Ao utilizar letras como coeficientes, se torna possível mecanizar o procedimento e temos então a “fórmula”. Bateu uma curiosidade? Assista à demonstração do Professor Gustavo Adolfo Soares, no Portal do Saber da OBMEP clicando aqui.

Já a fórmula da Combinação Simples pode ser obtida com um argumento combinatório. Pois podemos fazer uma fila com os  $n$  objetos e só querer contar quantas disposições diferentes são formadas nas primeiras  $p$  posições, que é o arranjo simples dos  $p$  objetos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Como desejamos formar subconjuntos haverão  $p!$  repetições do mesmo agrupamento, logo

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A relação de Euler também é válida em alguns poliedros que não são convexos (côncavos). Porém se ela não é válida em um determinado poliedro podemos garantir que ele não é convexo. Sua demonstração é um tanto mais elaborada e te convidamos a ler o

artigo “Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos”, (FILHO, 1983).

Seja na forma de um teorema, seja na forma de uma argumentação lógica a partir da definição as fórmulas são resultados que exigem além da notação, contexto.

Que outras fórmulas você gostaria de entender um pouco mais?

Deixamos como sugestão o **Portal do Saber da OBMEP**, um excelente repositório de materiais de qualidade para os estudos, não deixe de conferir!

## 4.4 O PODER DE UM CONTRAEXEMPLO

Na Matemática, o **contraexemplo** é uma técnica que atesta a falsidade de uma proposição. Nesse caso, quem deseja invalidar a proposição deve exibir um exemplo que satisfaz a hipótese, mas não cumpre a tese. Ou seja, dada uma proposição, é possível mostrar que ela é falsa através de um contraexemplo.

### Exemplo 4.5

Nenhum estudante do CODAI gosta de Matemática.

Se isso é verdade, significa que de todos os alunos existentes na escola, nenhum gosta de Matemática. Porém se descobrirmos que exatamente uma aluna gosta de Matemática a proposição é automaticamente invalidada, pois o “nenhum” é uma mentira. Poderoso, não é mesmo?

Mesmo que o contraexemplo seja “pequeno” ou até mesmo único em relação ao resultado que se deseja demonstrar, já podemos dizer que a proposição é falsa.

### Exemplo 4.6

Não existe um número natural que satisfaça a equação  $3x - 6 = 0$ .

Alguém pode exibir como contraexemplo  $x = 2$ . Nesse caso  $x \in \mathbb{N}$  e  $3 \cdot 2 - 6 = 6 - 6 = 0$ , provando que existe sim um número natural que satisfaz a equação. Assim, a partir de um único contraexemplo, a proposição tem seu valor lógico determinado.

A utilização do contraexemplo é muito útil para mostrar que proposições são falsas, especialmente quando há um quantificador universal. Como dissemos anteriormente, se a proposição fala em “todos” ao exibir um único exemplo que não satisfaz a hipótese, que a tarefa é concluída.

### Exemplo 4.7

Todos os números primos são ímpares

A proposição é falsa, pois 2 é um número primo que também é par.



## 4.5 REDUÇÃO AO ABSURDO

No latim *reductio ad absurdum* e no português **redução ao absurdo**, trata-se de uma demonstração por chegarmos a um absurdo ou numa contradição. Vários e vários nomes para explicar simplesmente que um absurdo aconteceu!

Trata-se de uma técnica utilizada para demonstrar a validade de uma sentença condicional do tipo “Se H, então T”. Nessa técnica devemos supor que a tese é falsa e concluir que a hipótese também precisaria ser falsa, o que nos conduziria a um absurdo (TAVARES, 2017). Assim a hipótese é verdadeira e a tese também deverá ser, para que de fato não aconteça a contradição.

É possível que a proposição admita uma demonstração direta, mas nem sempre ela é trivial. A utilização dessa técnica pode facilitar e muito a conclusão sobre uma proposição ou teorema.

Dois clássicos da utilização dessa técnica são a demonstração que **existem infinitos números primos**<sup>3</sup> e que  $\sqrt{2}$  **é um número irracional**<sup>4</sup>. Essa técnica também é chamada de mecanismo indireto de demonstração ou negação.

Um exemplo muito útil e que deveríamos compreender amplamente ainda na época da escola, especialmente no contexto do estudo das equações e dos sistemas de equações é o seguinte:

---

<sup>3</sup>Está disponível em: <https://matematicosufc.blogspot.com/2013/05/a-infinitude-dos-primos-parte-1-euclides.html>

<sup>4</sup>Está disponível em: <https://youtu.be/C5mvW3uaGgQ?si=m9jx7v-2ccoDFNQz>

### Exemplo 4.8

**Proposição:** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ . Se  $x \cdot y = 0$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

**Demonstração:** Nesse caso a hipótese é  $x \cdot y = 0$  e a tese é  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

A negação da tese é, portanto, supor que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Como  $y \neq 0$ , podemos isolar  $x$  e obter:

$$x \cdot y = 0$$

$$x = \frac{0}{y}$$

$$x = 0$$

Porém, essa conclusão que  $x = 0$  é um absurdo, pois nossa suposição é de que ambos  $x$  e  $y$  são zero. Logo, como tese não pode ser falsa, necessariamente ela é verdadeira, como queríamos demonstrar.

Perceba que para a negação da tese utilizamos a equivalência  $\sim (p \vee q)$  e  $\sim p \wedge \sim q$  presente no **Exemplo 3.17** e na **Tabela 3.8**.

Essa proposição nos diz que se multiplicarmos dois números reais e obtivermos como resposta o número zero, obrigatoriamente um dos números envolvidos no produto é o zero.

Um resultado que também é importante na época escolar e que estudantes apresentam dificuldades de compreensão é no momento de solucionar um sistema de equações lineares, acompanhe o exemplo a seguir.

**Exemplo 4.9** Na resolução de alguns exercícios sobre sistemas de equações lineares, Maria Luiza se deparou com as seguintes situações:

(a)  $4x = 0$

(b)  $0x = 4$

(c)  $0x = 0$

Compreendendo a argumentação do **Exemplo 4.8**, ela concluiu que:

- (a) Se  $4x = 0$ , então  $x = 0$ , pois o produto precisa que um dos fatores seja  $0$  e com certeza  $4 \neq 0$ .
- (b) Se  $0x = 4$ , então temos absurdo. Pois qualquer número multiplicado por  $0$  resultará em  $0$ .
- (c) Se  $0x = 0$ , então  $x$  pode assumir qualquer valor real. Pois qualquer número multiplicado por  $0$  será sempre  $0$ .

No contexto dos sistemas de equações lineares, para cada uma das situações o sistema recebe uma classificação. Conforme a situação do **Exemplo 4.9**, temos que:

- (a) O sistema possui uma única solução e que pelo menos uma das coordenadas é igual a  $0$ .
- (b) O sistema não admite solução e por isso é chamado de sistema impossível.
- (c) O sistema admite infinitas soluções.

## Modelo axiomático e conjecturas

Além na Lógica Proposicional, a estrutura dos conhecimentos matemáticos está baseada em um **modelo axiomático**. Assim, é fundamental entender o que são os **axiomas**. Eles são frutos de experiências e observação. Ou seja, precisam ser evidente para qualquer pessoa. Não é uma definição e não precisa ser demonstrado.

No cotidiano escolar, as ideias de axioma geralmente são apresentadas no estudo de Geometria Euclidiana. Porém há axiomas presentes na obra de Euclides que amparam vários outros procedimentos e não são anunciados como tal. Um exemplo bem simples disso é o procedimento utilizado na manipulação de equações, operamos com operações inversas porque de maneira axiomática (isto é, evidente) não estamos alterando a relação de igualdade estabelecida previamente.

Para o estudo de Geometria, é muito importante antes de anunciar os axiomas apresentar e/ou relembrar as noções primitivas. Pois o axioma que nos diz que “Todos os ângulos retos são congruentes” requer que saibamos o que são ângulos, o que são ângulos retos e o significado de congruência.

O modelo axiomático apresenta com eficácia muito da teoria matemática. Para desenvolver certa teoria matemática, deve-se

estabelecer definição e teoremas, assim como axiomas e as noções primitivas. E os teoremas precisam ser deduzidos e demonstrados utilizando Lógica, geralmente a Proposicional (isso é regra de inferência). Nesse modelo valem:

- Particularização: se algo valer para todos elementos de um conjunto, então vale para certo elemento desse conjunto.
- *Modus ponens*: Se a proposição “Se P, então Q” é uma proposição válida e P é uma proposição válida, então, necessariamente, a proposição Q também é válida.

Assim, o modelo axiomático vai ser consistente, se nele não for possível deduzir afirmações contraditórias (vai ser inconsistente caso aconteça o contrário). Porém, podemos fazer uma crítica a esse modelo de “validação matemática”. Um belo exemplo para fazer a esse tipo de modelo é o 5º postulado de Euclides:

*“Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos”*

Muitas pessoas, além do próprio Euclides, tentaram demonstrar esse resultado<sup>1</sup>, a partir de outros axiomas existentes, mas a dificuldade era grande! Muitos métodos foram utilizados, inclusive o de redução ao absurdo. No entanto, esse resultado não é intuitivo.

O que aconteceu com o 5º postulado de Euclides é um exemplo de que em alguns momentos um axioma é propositalmente chamado assim, para facilitar uma argumentação posterior. Com isso

---

<sup>1</sup>Que não era chamado de axioma, pois era considerado como uma proposição

vemos que o modelo axiomático que temos hoje não seria um único modelo de validação matemática. A retirada do 5º postulado permitiu inclusive a elaboração de outras geometrias como a **Geometria Hiperbólica**, onde existe a possibilidade de dada uma reta e um ponto fora dela, temos duas paralelas distintas à reta dada passando por esse ponto. Já na Geometria Projetiva e na Geometria Elíptica, existe a possibilidade de dada uma reta e um ponto fora dela não existem retas paralelas a reta dada.

## 5.1 CONJECTURAS

As **conjecturas** são proposições que se tiverem sua validade demonstrada serão teoremas. Lembra da “intuição” que falamos anteriormente? Alguns resultados podem ser bem difíceis de serem demonstrados e até que isso aconteça ficam registrados como conjectura.

Geralmente são dados exemplos de situações mais simples para explicar a ideia geral. A rigor, trata-se de uma opinião pessoal sobre um determinado fato.

Quando há uma proposição com essa nomenclatura, devemos saber que ainda não há uma demonstração para provar sua veracidade e nem um **contraexemplo** para garantir que é falso. Uma conjectura muito conhecida é de Goldbach (FILHO, 2012):

**Exemplo 5.1** Qualquer número inteiro par, maior que 2, é a soma de dois números primos.

Por exemplo, o número 18 pode ser representado como  $5+13$  e também como  $7+11$ . Até o momento essa conjectura ainda não

foi resolvida. Ou seja, não sabemos se isso é verdade para todo e qualquer número par. Nem sabemos se há algum número par para o qual essa afirmação seja falsa (que seria o contraexemplo). Simulações de computadores já conseguiram atestar a validade da conjectura até o número para números da magnitude de pelo menos  $3 \cdot 10^7$  (BITENCOURT, 2018).

## 5.2 PARADOXOS

Um **paradoxo** é uma afirmação que contradiz a si mesma. Um exemplo bem simples e clássico é:

Essa afirmação é falsa.

Caso o que a frase seja verdadeira, o que ela afirma é falso. Caso seja falsa, o que foi escrito é verdadeiro.

Os paradoxos nem sempre estão colocados na forma de afirmações que se parecem com sentenças, podem surgir como mitos como no Paradoxo de Aquiles e a tartaruga, proposto por Zenão cuja transcrição de Heidi Strecke, para o UOL Filosofia, deixamos no **Exemplo 5.2**. Até mesmo na arte é possível lidar com situações paradoxais, algumas obras de M. C. Escher são bons exemplos disso, conforme mostra a **Figura 5.1**.

**Exemplo 5.2** [Paradoxo de Zenão: Aquiles e a tartaruga] Conta-se que Aquiles, disputando uma corrida com uma tartaruga, num ímpeto de generosidade, resolveu dar a ela uma pequena vantagem, deixando que o bicho partisse alguns centímetros à sua frente.

Segundo o filósofo grego Zenão, por mais rápido que Aquiles se movesse, ele jamais conseguiria ultrapassar a tartaruga. O paradoxo formulado por Zenão é o seguinte: cada vez que Aquiles percorre determinada distância num espaço de tempo, a tartaruga já percorreu uma outra distância. Se Aquiles se movimentar mais um tanto para alcançar a tartaruga, terá que se defrontar com o fato de que a tartaruga já terá percorrido mais um tanto, por menor seja. Esse fato se repetirá indefinidamente. Por mais que Aquiles corra, sempre haverá um espaço a separá-lo da tartaruga.

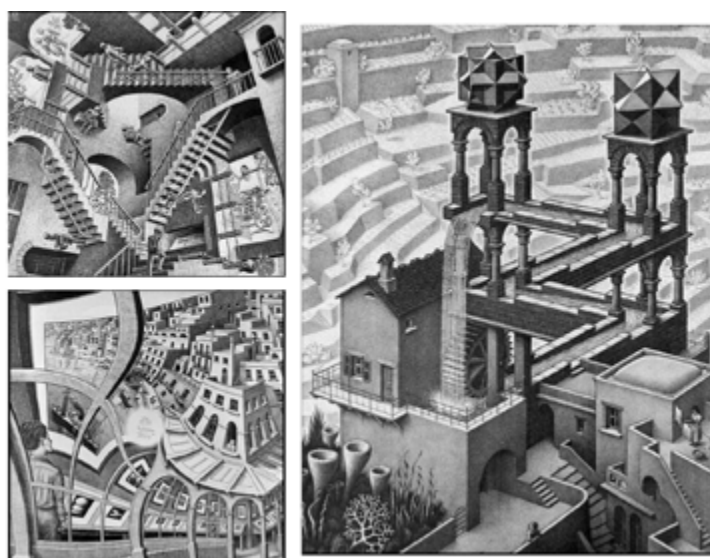


Figura 5.1: Obras de M. C. Escher, da esquerda para a direita, de cima para baixo: Relatività (1953) e Print Gallery (1956) e Waterfall (1961)

## 5.3 CUIDADO COM OS SOFISMAS!

Para falar de sofismas temos que diferenciá-los de paradoxos. Os **sofismas** são argumentações erradas, que parecem ser verdadeiras, cuja conclusão é sempre falsa. Já os paradoxos são contradições. É importante ter cuidado com os sofismas já que de premissas verdadeiras não obtém-se conclusões falsas.



Os sofismas podem ser conhecidos também como argumentações não válidas ou falácias. As falácias são bem conhecidas no ramo da Filosofia.

**Exemplo 5.3** Considere a sentença

Quando chove, a grama fica molhada.

Uma falácia seria dizer que

Se a grama está molhada hoje é porque choveu.

Perceba que são coisas que fazem sentido, mas o problema está na conclusão com a comparação. Alguém poderia ter molhado a grama e não necessariamente teria chovido.

**Exemplo 5.4** Considere as sentenças

Nenhum estudante do CODAI gosta de matemática

Maria Luiza é uma estudante do CODAI que gosta de matemática

Uma pessoa pode erroneamente concluir que

Maria Luiza não é uma estudante do CODAI.

Essa conclusão incorreta é que caracteriza o exemplo como um sofisma.

Ao exibir um contraexemplo a conclusão correta deveria ser de a primeira proposição é falsa e não que problema está no contraexemplo. Nesse caso é como se o conjunto das pessoas que gostam de Matemática fosse o conjunto vazio, porém houve um equívoco

na observação e que de havia um elemento. Percebe a sutileza que pode nos levar ao engano?

**Exemplo 5.5** Um erro comum é concluir que

$$\sqrt{-4} = -2, \text{ pois } \sqrt{4} = 2$$

Basta verificar que

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4 \neq -4$$

Na realidade  $\sqrt{-4} = 2i$ ,  $i \in \mathbb{C}$ , onde  $i$  é a unidade imaginária e  $i^2 = -1$ .

## CAPÍTULO 6

# Aprendizagem significativa e Pensamento Computacional

Além de ter o conhecimento consigo, você já deve estar ciente que o mundo contemporâneo exige uma ampla capacidade de diálogo, trabalho em equipe e utilização de diferentes recursos para a resolução de problemas. Inclusive é bem possível que para problemas mais complexos conhecimentos e recursos de uma área do conhecimento sejam utilizados em outra. Bons exemplos de como se preparar para situações complexas é se engajar na perspectiva **Aprendizagem Significativa** e utilizar os conceitos do **Pensamento Computacional**.

Ao final do Capítulo te convidamos a refletir como a Lógica Proposicional e o Pensamento Computacional se articulem através do uso de conectivos lógicos em algoritmos e tendo a lógica como base para analisar e resolver os problemas de forma crítica, ampliando sua capacidade de argumentação.

### 6.1 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

O conceito de **aprendizagem significativa** está associado aos mecanismos desenvolvidos no processo de aprendizagem, com os desafios do mundo contemporâneo. Dizemos que aprendizagem

significativa ocorre quando uma nova ideia se relaciona aos conhecimentos prévios.

Ela tem como principal missão a formação de sujeitos éticos, reflexivos e humanizados. Assim, docentes que a priorizem precisarão estar bem planejados, com materiais e estratégias criativas para aproximar os temas das aulas à realidade estudantil.

Também é imprescindível que estudantes contribuam ativamente nesse processo. Assim, cada estudante amplia e atualiza informações obtidas anteriormente, atribuindo então novos significados ao seu conhecimento.

Acreditamos que ao compreender como são estabelecidas as verdades Matemáticas a partir da compreensão da estrutura lógica de suas construções, estudantes terão a oportunidade de experimentar a aprendizagem significativa tanto em temas cotidianos/aplicados quanto em temas mais abstratos.

## 6.2 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Inicialmente, é possível imaginar que o pensamento computacional trata-se de Matemática sendo estudada com o computador. Mas o pensamento computacional não está limitado a isso, trata-se de uma analogia que vem de como os computadores agem na resolução de problemas complexos. Assim, não é extremamente necessário o uso de computadores para isso.

O **pensamento computacional** orienta a resolução de um problema a partir do raciocínio, exigindo capacidade estratégica e criativa. É uma inovação que alia elementos próprios da Computação para solucionar problemas de diferentes áreas.

A metodologia é dividida em 4 pilares que devem ser estimulados no dia-a-dia, garantindo que de fato estudantes usem as ideias de maneira lógica, trazendo associações e solucionando problemas a partir de suas capacidades e criatividade.

## **PILARES DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL**

**DECOMPOSIÇÃO:** Trata-se da capacidade de solucionar o problema em etapas ou fragmentos. Fazendo essa decomposição, é possível focar nas etapas obtendo resultado de uma maneira mais fácil, para então avançar para as etapas mais sofisticadas.

**ABSTRAÇÃO:** Nessa etapa, o foco é imprescindível. É necessário estabelecer critérios daquilo que é importante e do que será irrelevante, para que se possa chegar no resultado sem se perder com coisas inúteis.

**RECONHECIMENTO DE PADRÕES:** Dentro de um problema é comum muitas vezes reconhecermos alguns padrões. Quando temos ciência dele fica mais fácil resolvê-lo, já que podemos pular etapas do processo. Trata-se de um dos pilares mais importantes.

**ALGORITMOS:** O algoritmo vai criar e estabelecer regras de acordo com o comportamento a ser analisado. Cada pessoa pode criar uma própria regra no processo de resolução do problema, fazendo com que as etapas sejam rápidas e o resultado concluído.

Perceba que o pensamento computacional além de ser muito útil é também extremamente importante, pois consegue articular diferentes potencialidades de cada pessoa, fazendo com que venha a pensar e tomar decisões de maneira mais estruturada.

Ao colocar em prática o pensamento computacional é possível tornar mais eficiente a resolução de tarefas, não só para o contexto da Matemática mas também para outras matérias. Pois não só é

despertado o pensamento por etapas e de maneira mais detalhada, mas também há uma eficiência nesse processo, ao reduzir o tempo de ficar procurando por onde começar.

**Exemplo 6.1** Imagine que você foi ao supermercado e fez uma lista no papel anotando tudo que precisava. Suponha que você colocou em 1º lugar o arroz e em 10º lugar o feijão.

Se você internalizou os princípios do pensamento computacional, independentemente da ordem da lista vai pega feijão junto com arroz, já que eles ficam no mesmo corredor.

Você também não vai desperdiçar tempo olhando todos os corredores de material de limpeza se na sua lista não tiver itens dessa natureza.

Muitas habilidades também podem ser desenvolvidas com o pensamento computacional, como o planejamento, a aprendizagem significativa e o raciocínio lógico. Isso acaba acelerando o resultado e otimizando o tempo, o que nos faz perceber o quanto é importante o pensamento computacional.

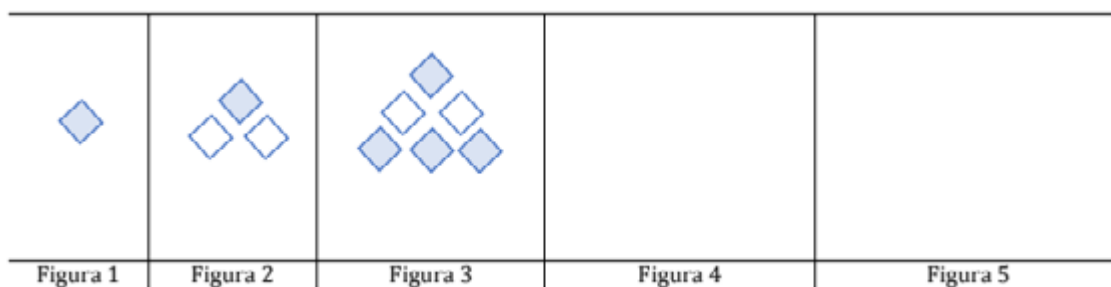
A lógica proposicional e o pensamento computacional podem ser articulados de várias maneiras, isso porque os conceitos da lógica proposicional nos permitem representar e raciocinar sobre proposições de maneira estruturada usando os conectivos lógicos, como “e”, “ou”, “não”, “se... , então”. Já o Pensamento Computacional, nos auxilia na resolução de problemas de forma lógica e algorítmica, decompondo em etapas e aplicando estratégias de solução que podem requerer a utilização de que fatos verdadeiros ou falsos.

Também podemos articular esses dois princípios usando a lógica como base para construção de algoritmos, para refletir sobre a possibilidades no processo de abstração além de usar os conectivos lógicos para criar estruturas condicionais. Entendendo o papel das proposições do tipo “se..., então”, podemos compreender melhor fenômenos de causa e efeito, além de nos ajudar a refletir sobre tomada decisões com base em condições lógicas.

Ao decompor um problema em proposições lógicas é possível utilizar conhecimentos como o de tabela-verdade e suas equivalências. Nesse processo é possível reconhecer padrões e algumas estruturas que podem fazer parte no desenvolvimento da etapa algorítmica.

## 6.3 DESAFIO

Com base no que foi apresentado nesse capítulo e utilizando as informações da de losangos a seguir, realize o que se pede em cada item. De preferência argumente sobre suas decisões<sup>1</sup>.



1. Elabore a representação das Figura 4 e 5.
2. Quantos quadradinhos existirão na Figura 10?
3. Você percebeu algum padrão no número de losangos de cada figura? Caso sim, explique como chegou nessa conclusão.
4. Você poderia usar exatamente 121 losangos para fazer uma figura seguindo o mesmo padrão?
5. Elabore e descreva uma estratégia para descobrir quantos quadradinhos existem no total, em qualquer figura da sequência.
6. Que expressão algébrica poderia representar o crescimento dos losangos conforme a figura muda?
7. Você percebeu alguma relação entre a posição da figura e o número de losangos que ela possui? Caso sim, explique como chegou nessa conclusão e como seria possível demonstrar a validade dessa relação.

<sup>1</sup>Esta proposta tem como referência uma atividade do *site* Mentalidades Matemática ([disponível aqui](#)).



## CAPÍTULO 7

### Sobre as autoras

**MARIA LUIZA RAMOS**



Foi estudante do Ensino Médio do CODAI/UFRPE (2021-2023) e bolsista PIBIC-EM (2023-2024) sob a orientação da professora Marcella Feitosa. Atualmente é estudante de Graduação no Bacharelado em Direito da Universidade de Pernambuco (UPE).



Desde 2019 atua como docente de Matemática no CODAI/UFRPE com atuação no Ensino Médio, Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio e Técnico em Alimentos. Tem Coordenado Projetos e iniciativas que permitam ampliar representatividade feminina nos espaços de produção e reprodução científica, como é o caso do PIBIC-EM. Também se dedica a temas relacionados à Educação Matemática Crítica e Estudos Decoloniais.

## Bibliografia

ALVES, G. C. Resultados do pisa 2015 e seu uso para a formulação de políticas públicas em educação. 2018.

BITENCOURT, C. da S. *A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática*. [S.l.]: PROFMAT, 2018.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. [S.l.]: Penso Editora, 2017.

FILHO, D. C. D. M. Um convite à matemática. *Coleção do Professor de Matemática, 1a edição, Rio de Janeiro-RJ: SBM*, 2012.

FILHO, Z. A. Demonstração do teorema de euler para poliedros convexos. *RPM*, v. 3, p. 1–4, 1983.

MENTALIDADES MATEMÁTICAS. *6 padrões matemáticos na natureza*. On-line, 2021. Disponível em: <https://mentalidadesmatematicas.org.br/6-padroes-matematicos-na-natureza/>.

MOLINER, E. T. *Demostración del teorema de Pitágoras (Elementos de Euclides)*. GeoGebra On-line,

2017. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/Hfd4pJUT>>.

TAVARES, G. J. N. Método de redução ao absurdo. *Revista de Ciência Elementar*, Casa das Ciências, v. 5, 2017.

VESCO, Á. D. et al. Correlação entre wisc e rendimento escolar na escola pública e na escola particular. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, SciELO Brasil, v. 11, p. 481–495, 1998.

Este livro busca tornar a matemática escolar mais interessante e ajudar estudantes a compreendê-la, serem capazes de contemplar suas dinâmicas e elaborar significados para além de um sentido exclusivamente utilitário. Almejamos dialogar e ajudar quem principalmente sofre com os impactos dessas lacunas: você, estudante!

Acreditamos que é importante que os saberes matemáticos sejam baseados em diferentes fundamentos, de modo que, a comunidade estudantil compreenda a estrutura conceitual bem como suas relações interculturais e contexto histórico.

**Este livro busca tornar a matemática escolar mais interessante e ajudar estudantes a compreendê-la, serem capazes de contemplar suas dinâmicas e elaborar significados para além de um sentido exclusivamente utilitário. Almejamos dialogar e ajudar quem principalmente sofre com os impactos dessas lacunas: você, estudante! Acreditamos que é importante que os saberes matemáticos sejam baseados em diferentes fundamentos, de modo que a comunidade estudantil compreenda a estrutura conceitual, bem como suas relações interculturais e contexto histórico.**

