UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Uma Breve Introdução sobre Medida e Integração

**Natanael Oliveira da Silva**

**Orientador: Dr. Filipe Andrade da Costa**

RECIFE

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Natanael Oliveira da Silva**

# Uma Breve Introdução sobre Medida e Integração

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

S586b Silva, Natanael Oliveira da.
Uma Breve Introdução sobre Medida e Integração/ Natanael Oliveira da Silva. – Recife, 2025.
67f.

Orientador: Filipe Andrade da Costa

Monografia – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Unidades de medida. 2. Funções (Matemática). 3. Integração numérica. I. Costa, Filipe Andrade da, orient. II. Título.

CDD 510

Natanael Oliveira da Silva

# Uma Breve Introdução sobre Medida e Integração

Trabalho aprovado. Recife, 19 de Março de 2025:

**Filipe Andrade da Costa**
Orientador

**Daniel Cassimiro Carneiro Da Cunha**
DM/UFRPE

**Yane Lisley Ramos Araújo**
DM/UFRPE

Recife

2025

*Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, fonte de sabedoria e força. À minha família e aos amigos, pelo apoio incondicional ao longo da jornada. Estendo esta dedicação a toda a comunidade acadêmica, na esperança de que este esforço contribua, com responsabilidade e dedicação, para o avanço da ciência e do conhecimento.*

# Agradecimentos

A Deus, primeiramente, por me conceder a força, a saúde e a fé necessárias para superar todos os desafios encontrados ao longo desta jornada e por ser a luz que guiou meus passos até a conclusão deste trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais, Paulo e Maria Gorete, as minhas irmãs, Sarah Sitque e Beatriz Rebeca, e a minha namora Klarissa Domingos pelo amor, apoio incondicional, paciência e incentivo que foram a base para que eu jamais desistisse dos meus sonhos. Esta conquista é o reflexo do sacrifício e da dedicação de vocês.

Ao corpo docente do departamento de matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, em particular ao meu orientador, Professor Doutor Filipe Andrade da Costa, cuja orientação precisa, conhecimento, paciência e rigor acadêmico foram fundamentais para a construção e o aprimoramento desta pesquisa. Agradeço também aos membros da banca examinadora, doutora Yane Lisley Ramos Araújo e doutor Daniel Cassimiro Carneiro Da Cunha, por suas valiosas contribuições.

Aos meus amigos e colegas, em especial Lucas Alexandre, Mateus Gomes, Evellyn Basilio, Alexandre Santana, Sophia e Jaqueline pelo companheirismo, pelas palavras de estímulo e pelos momentos de descontração que tornaram a caminhada mais leve. A troca de ideias e o apoio mútuo foram essenciais para o meu crescimento pessoal e acadêmico.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta etapa, o meu mais sincero obrigado.

# Resumo

O presente trabalho investiga as relações preliminares da integral de Lebesgue, utilizando a teoria da medida e a $\sigma$-álgebra. Inicialmente, introduzimos as definições preliminares de conjuntos e suas operações, além da abordagem sobre classes e famílias de conjuntos, abordamos algumas proposições e definições de semi-aneis e semi-álgebras e sua generalização para contextos enumeráveis, abordamos algumas propriedades e definições de medida como foco de uma definição simplista da integração, além de uma análise das funções mensuráveis que são integráveis à Lebesgue. A seguir, mostramos a existência de sequências de funções simples $s_n$ que convergem para uma função $f$ mensurável, permitindo que a integral de Lebesgue seja definida como o limite da integral dessas funções simples. Exploramos as propiedades das integrais para variadas hipóteses, o teorema de convegência monótona e a integral de $s_n$ sob a medida de Borel e sua comparação com a integral de Riemann para $s_n$, enuciando que, as funções integraveis via Riemann são integraveis via Lebesgue. Com base nesses resultados, mostramos que a integral de Lebesgue estende a integral de Riemann, garantindo que qualquer função integrável no sentido de Riemann também seja integrável no sentido de Lebesgue. O objetivo deste trabalho é fazer uma breve introdução sobre as integrais de Riemann e Lebesgue, demonstrando que a integral de Lebesgue complementa a de Riemann.

**Palavras-chaves**: Medida. Funções Mensuráveis. Integração.

# Abstract

This work investigates the preliminary foundations of the Lebesgue integral, utilizing measure theory and $\sigma$-algebras. Initially, we introduce the preliminary definitions of sets and their operations, as well as an approach to classes and families of sets. We address several propositions and definitions of semi-rings and semi-algebras and their generalization to countable contexts. We also cover properties and definitions of measure as the foundation for a simplified definition of integration, in addition to an analysis of measurable functions that are Lebesgue-integrable. Next, we show the existence of sequences of simple functions, $s_n$, that converge to a measurable function, $f$, allowing the Lebesgue integral to be defined as the limit of the integrals of these simple functions. We explore the properties of these integrals under various hypotheses, the Monotone Convergence Theorem, and the integral of $s_n$ under the Borel measure, comparing it to the Riemann integral for $s_n$. This leads to the conclusion that functions integrable via Riemann are also integrable via Lebesgue. Based on these results, we show that the Lebesgue integral extends the Riemann integral, guaranteeing that any function integrable in the sense of Riemann is also integrable in the sense of Lebesgue. The objective of this work is to provide a brief introduction to the Riemann and Lebesgue integrals, demonstrating that the Lebesgue integral complements the Riemann integral.

**Keywords**: Measure. Measurable Functions. Integration.

# Introdução

A teoria da integração ocupa um papel central na análise matemática, sendo essencial para o estudo de funções, séries e várias áreas da matemática aplicada e pura. No entanto, a integral de Riemann, desenvolvida no século XIX, apresenta limitações significativas, especialmente no tratamento de funções com descontinuidade. As dificuldades encontradas ao tentar aplicar a integral de Riemann em situações mais gerais levaram à necessidade de uma nova teoria de integração. Nesse contexto, O estudo de Henri Léon Lebesgue sobre a teória da medida e integração teve grande contribuição para o ensino matemático como uma solução para as limitações da integral de Riemann. De acordo com Gambera (2017, p.9), após a públicação da tese de doutorado de Lebesgue, em 1902, ele generaliza o novo conceito sobre integral (o qual ele havia feito um ano antes), e que já diferenciava-se do conceito de integral dado por Riemann, até então considerado o conceito mais geral.

A principal inovação da integral de Lebesgue está em sua abordagem para a medição de conjuntos e na forma como define a integral. Em vez de subdividir o intervalo de integração em subintervalos e somar as áreas dos retângulos, como na integral de Riemann, a integral de Lebesgue organiza as funções em termos de seus valores e mede os conjuntos para os quais essas funções são relevantes. Essa reformulação da integração torna a teoria de Lebesgue mais robusta, permitindo a integração de uma classe mais ampla de funções, incluindo aquelas que não podem ser tratadas pela abordagem tradicional de Riemann. Um exemplo clássicos de funções não integráveis no sentido de Riemann, como por exemplo a função indicadora dos números racionais em um intervalo, conhecida como função de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x é racional,} \\ 0, & \text{se x é irracional.} \end{cases} \tag{1}$$

Essa função pode ser vista como uma soma infinita de funções indicadoras de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^1$. No entanto, ela não é integrável no sentido de Riemann, pois a sua integral superior e inferior são diferentes para qualquer partição do intervalo.

O presente trabalho busca explorar as principais definições e proposições preliminares da teoria da integral de Lebesgue, com ênfase em suas bases teóricas e como ela resolve problemas que a integral de Riemann não consegue lidar. Com uma análise dos conceitos fundamentais, como definições de conjuntos, operações com conjuntos, limites, e indicadores, passando para a construção da medida, o conceito de funções mensuráveis, para, finalmente, apresentar a integral de Lebesgue e suas propriedades.

# 1 Conjuntos

Neste capitulo apresentamos os conceitos básicos de conjuntos e suas operações, fundamentais para a construção da teoria da medida além de trazer definições de limites e indicadores que são essenciais para o capitulo de classes de conjuntos. A motivação para esse capítulo é entender como conjuntos e suas operações formam a base para a construção de funções mensuráveis e medida, que são essenciais para a definição e aplicação da integral de Lebesgue, além de deixar as notações mais claras e coesas e os textos menos cansativos.

**Definição 1.0.1.** *Seja $\Omega$ um conjunto, definimos:*

1. *Um conjunto é formado por objetos, chamados os seus elementos.*
2. *$A \subset \Omega$ como subconjunto de $\Omega$.*
3. *A notação $w \in A$ significa que $w$ é um elemento de $A$. O fato de $w$ não pertencer a $A$, terá a notação de $w \notin A$.*
4. *Dado $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\Omega$, a notação $A \subseteq B$ indicará que todos os elementos de $A$ pertencem a $B$.*
5. *Dado $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\Omega$, a notação $A \subset B$ indicará que $A \subseteq B$, porém existe algum elemento de $B$ que não é elemento de $A$.*
6. *Dado $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\Omega$, a notação $A = B$ indicará que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

**Definição 1.0.2.** *Existe um conjunto que não contém nenhum elemento, ao qual chamaremos conjunto vazio, e denotaremos por $\emptyset$. De maneira mais formal:*

$$\emptyset = \{x \in \Omega; x \neq x\}. \tag{1.1}$$

Usaremos as palavras classe ou família para um conjunto de conjuntos.

**Exemplo 1.0.1.** *$\mathbb{P}(A)$ denota as Partes de $A$, o conjunto de todos os subconjuntos de $A$. Observe que, $\mathbb{P}(A)$ é uma classe ou família de $A$.*

**Definição 1.0.3.** *A notação* $\{\omega : p(\omega)\}$*, onde* $p(w)$ *é uma proposição concernente a* $w$*, e o conjunto consiste de todos os elementos para os quais* $p(w)$ *é verdadeira. Por exemplo* $\{w : w = 2k; k = 1, 2, ..\}$*, onde* $p(w)$ *é a proposição de* $w$ *ser par.*

**Observação 1.0.1.** *É importante distinguir entre o elemento* $w$ *e o conjunto* $\{w\}$*, cujo único elemento é* $w$*.*

**Definição 1.0.4.** *A reunião dos conjuntos* $A$ *e* $B$ *é o conjunto* $A \cup B$*, formado pelos elementos de* $A$ *mais os elementos de* $B$*, ou seja, se* $x \in A \cup B$*, temos que* $x \in A$ *ou* $x \in B$*. Podemos escrever:*

$$A \cup B = \{x; x \in A \quad ou \quad x \in B\} \tag{1.2}$$

**Definição 1.0.5.** *A interseção dos conjuntos* $A$ *e* $B$ *é o conjunto* $A \cap B$*, formado pelos elementos comuns a* $A$ *e a* $B$*, ou seja, se* $x \in A \cap B$ *temos que* $x \in A$ *e* $x \in B$*. Escrevemos então:*

$$A \cap B = \{x, x \in A \text{ e } x \in B\}. \tag{1.3}$$

**Observação 1.0.2.** *Pode ocorrer que não exista elemento algum* $x$ *tal que* $x \in A$ *e* $x \in B$*. Neste caso, tem-se* $A \cap B = \emptyset$ *e os conjuntos* $A$ *e* $B$ *dizem-se disjuntos.*

## 1.1 Operações com Conjuntos

**Definição 1.1.1.** *Seja* $\Gamma$ *um conjunto de índices e, para cada* $\gamma \in \Gamma$*, consideremos* $A_\gamma \subseteq \Omega$*. Chamaremos de união da família* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *o conjunto de todos os elementos que pertecem a pelo menos um dos conjuntos* $A_\gamma$*. Esse conjunto será simbolizado por:*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{w : \exists \gamma \in \Gamma, tal\ que\ w \in A_\gamma\}. \tag{1.4}$$

*Se* $\Gamma$ *for enumerável, pode-se dizer que a familia* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *é uma sucessão* $\{A_n\}_{n=1,2,3,...}$*.*

**Definição 1.1.2.** *Se* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *é uma família de conjuntos de todos os elementos que pertencem a todos os* $A_\gamma$*, então, será chamado interseção da família, e simbolizado por:*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{w : \forall \gamma, w \in A_\gamma\} \tag{1.5}$$

.

**Definição 1.1.3.** *Uma família* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *se diz disjunta, se para todo par de elementos* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$*, com* $\gamma \neq \gamma'$*,* $A_\gamma \cap A'_\gamma = \emptyset$*.*

**Definição 1.1.4.** *Seja* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *uma família disjunta. Neste caso, usaremos a notação* $\sum_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$*, no lugar de* $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ *.*

**Definição 1.1.5.** *Dado $A \subseteq \Omega, A^c$ denotará o conjunto do elementos que não pertencem a $A$. Em símbolos, $A^c = \{w : w \in \Omega \text{ e } w \notin A\}$ é chamado complemento de $A$.*

**Definição 1.1.6.** *A diferença entre $A$ e $B$, simbolizada por $A - B$, é, pela definição o conjunto*

$$A - B = \{a \in A; a \notin B\}.$$

Tal diferença é chamada própria, se $B \subseteq A$; e simétrica, se $A\Delta B = (A-B)+(B-A)$.

**Proposição 1.1.1.** *Seja $A, B \subseteq \Omega$ e $A, B \neq \emptyset$. Então que $A \cap B = A - (A - B)$.*

**Demonstração:**
Mostraremos por dupla inclusão.
Se $x \in A \cap B$, então $x$ pertence a A e a B. Daí, note que $x \notin A - B$ que implica que $x \in A - (A - B)$. Logo, $A \cap B \subseteq A - (A - B)$.
Se $x \in A - (A - B)$, então $x \in A$ e $x \notin A - B$ implica em $x \in B$, pois caso contrário teríamos que, com $x \in A$ e $x \notin B$, $x \in A - B$; sendo assim, $x$ pertence tanto a A quanto a B. Logo, $A - (A - B) \subseteq A \cap B$. ■

**Proposição 1.1.2.** *Se $A, B \subset \Omega$ e $A, B \neq \emptyset$, então*

$$A - B = A \cap B^c$$

**Demonstração:** Comecemos mostrando que $A - B \subset A \cap B^C$. Seja $x \in A - B$, então $x \in A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in B^c$. Assim $x \in A$ e $x \in B^c$, logo $x \in A \cap B^x$.

Note que as afirmações anteriores são equivalente, assim também vale que se $x \in A \cap B^c$ então $x \in A - B$. ■

**Proposição 1.1.3.** *Se, $A \subseteq \Omega$ e $A, B \neq \emptyset$, então $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.*

**Demonstração:**
De fato, $A \subseteq A \cup \emptyset$ por causa da definição da união de conjuntos. Dado $a \in A \cup \emptyset$. Note que $a \in A$ ou $a \in \emptyset$. Mas $a \notin \emptyset$. Logo, $a \in A$, ou seja, $A \cup \emptyset \subseteq A$. Portanto, $A \cup \emptyset = A$.
Por outro lado, $\emptyset = A \cap \emptyset$. Pois, caso contrário teríamos que existe $a \in A \cap \emptyset$ o que implica $a \in A$ e $a \in \emptyset$. Mas $a \notin \emptyset$. Logo, $\forall a \notin A \cap \emptyset$, ou seja, $A \cap \emptyset = \emptyset$. ■

**Proposição 1.1.4.** *Seja $A, B \subset \Omega$ e $A, B \neq \emptyset$, então, $A \subseteq B$; se, e somente se, $A \cup B = B$.*

**Demonstração:**
Se $A \subseteq B$, então, pela definição de união $B \subseteq A \cup B$. Por outro lado, se $x \in A \cup B$, temos que $x$ pertence a A ou a B como $A \subseteq B$, temos que $x \in B$, logo $A \cup B \subseteq B$. Portanto, $A \cup B = B$.
Se $A \cup B = B$. Então $A \cup B \subseteq B$ e como $a \in A \cup B$ temos que $a \in B$. Logo, $A \subseteq B$. ■

**Proposição 1.1.5.** *Se $A, B, C \subset \Omega$ e $A, B, C \neq \emptyset$, então $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.*

**Demonstração:**
Se $x \in A \cup (B \cup C)$ isto implica que $x$ pertence a A ou a $B \cup C$. Sendo assim, temos dois casos:

1. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ implica em $x \in (A \cup B) \cup C$.
2. Se $x \in B \cup C$, então, $x$ pertence a B ou a C, se $x \in B$ temos que $x \in (A \cup B)$, logo $x \in (A \cup B) \cup C$. Por outro lado, se $x \in C$, então, $x \in (A \cup B) \cup C$.

Logo, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Por outro lado, Se $x \in (A \cup B) \cup C$ isto implica que $x$ pertence a $A \cup B$ ou a C. Sendo assim, temos dois casos:

1. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ implica em $x \in (A \cup B) \cup C$.
2. se $x \in A \cup B$, então, $x$ pertence a A ou a B, se $x \in B$ temos que $x \in (B \cup C)$, logo $x \in A \cup (B \cup C)$. E se $x \in A$ temos que, $x \in A \cup (B \cup C)$.

Logo, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$. ■

**Proposição 1.1.6.** *Seja $A, B, C \subset \Omega$ e $A, B, C \neq \emptyset$, então $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.*

**Demonstração:**
Se $x \in A \cap (B \cap C)$, então $x$ pertence a A e a $B \cap C$. Temos que $x$ pertence a B, C e A, onde implica que $x \in (A \cap B) \cap C$. Logo, $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Por outro lado, Se $x \in (A \cap B) \cap C$, então $x$ pertence a C e a $A \cap B$. Temos que $x$ pertence a B, C e A; onde, implica em $x \in (A \cap B) \cap C$. Logo, $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.
■

**Proposição 1.1.7.** *Seja $A, B, C \subset \Omega$ e $A, B, C \neq \emptyset$, então $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*

**Demonstração:**
Se $x \in A \cap (B \cup C)$, então $x$ pertence a A e a $B \cup C$, ou seja, $\mathscr{C}$ pertence a $B$ ou $\mathscr{C}$ pertence a C. Sendo assim, temos dois casos:

1. se $x \in B$, temos $x \in A \cap B$, então $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. se $x \in C$, temos $x \in A \cap C$, então $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Logo, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Por outro lado, se, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, então $x$ pertence a $(A \cap B)$ ou pertence a $(A \cap C)$. Daí, temos dois casos:

1. se $x$ pertence a $(A \cap B)$, então $x$ pertence a A e a B o que implica em $x \in A \cap (B \cup C)$.
2. se $x$ pertence a $(A \cap C)$, então $x$ pertence a A e a C o que implica em $x \in A \cap (B \cup C)$.

Logo, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. ■

**Proposição 1.1.8.** *Seja $A, B, C \subset \Omega e\ A, B, C \neq \emptyset$, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*

**Demonstração:**
Se, $x \in A \cup (B \cap C)$, então $x$ pertence a A ou a $B \cap C$. Daí temos dois casos:

1. Se $x$ pertence A, então $x$ pertence $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ pois pertence a $A \cup B$ e $A \cup C$..
2. Se $x$ pertence $B \cap C$, então $x$ pertence $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, pois $x$ pertence tanto a B quanto a C.

Logo, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Por outro lado, se, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $x$ pertence a $A \cup B$ e a $A \cup C$ implica em $x$ pertencer a tais casos de conjuntos:

1. Se $x$ pertence a A, então $x$ pertence a $A \cup (B \cap C)$
2. Se $x$ pertence a B, então $x$ pertence também a A ou a C. Daí, sem perda de generalidade, suponhamos que $x$ pertence a $C$ implica em $x$ pertencente a $A \cup (B \cap C)$.
3. Se $x$ pertence a C, temos como caso análogo ao item 2.

Logo, $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Portanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. ■

**Proposição 1.1.9.** *Seja $A \subset \Omega$ e $A \neq \emptyset$, então $A \cup (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_\gamma)$.*

**Demonstração:**
Note que, se $x \in A \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Rightarrow$x$\in A$ *ou* $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.
Em particular, se $x$ pertence a A, temos que $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_\gamma)$.
Por outro lado, se $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, temos que $\exists\ \gamma_i$ tal que, $x \in A \cup A_{\gamma_i} \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_\gamma)$. Logo, $A \cup (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_\gamma)$. Por outro lado, Note que, se

$x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cup A_\gamma)$, então existe um $\gamma \in \Gamma$ tal que $x \in A \cup A_\gamma$. Daí temos duas possibilidades:
1. Se $x \in A$, então $x \in A \cup (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.
2. Se $\exists\alpha \in \Gamma$ tal que $x \in A_\alpha$, então $x \in A_\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq A \cup (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.
Logo, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cup A_\gamma) \subseteq A \cup (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.

Portanto, $A \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cup A_\gamma)$. ■

**Proposição 1.1.10.** *Seja $A \subset \Omega$ e $A \neq \emptyset$, então $A \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cap A_\gamma)$.*

**Demonstração:**
Note que $x \in A \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ se, somente se $x \in A$ *e* x$\in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ se, somente se $x \in A$ *e* x$\in A_\gamma, \forall\gamma \in \Gamma$ se, somente se $x \in (A \cap A_\gamma), \forall\gamma \in \Gamma$ se, somente se $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cap A_\gamma)$.
Portanto, $A \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cap A_\gamma)$.
■

**Proposição 1.1.11.** *Seja $A \subset \Omega$ e $A \neq \emptyset$, então*

$$A + A^c = \Omega,\ A \cap A^c = \emptyset,\ \emptyset = \Omega,\ \Omega^c = \emptyset. \tag{1.6}$$

**Demonstração:** De fato, $A^c = \Omega - A$, sendo assim, $A + A^c = A + (\Omega - A) = \Omega$.
Observe também que, $x \in A$, se e somente, se $x \notin A^c$. Logo, $A \cap A^c = \emptyset$.
Além disso, note que, $\Omega^c = \Omega - \Omega = \emptyset$.
■

**Proposição 1.1.12.** *Seja $A, B \subset \Omega$ e $A, B \neq \emptyset$, então*

*1.* $(A^c)^c = A$

*2.* $A \subseteq B$ *se, e somente se,* $B^c \subseteq A^c$.

**Demonstração:** Para 1. temos:
Observe que, se $x \in A$, então $x \notin A^c$, daí, $x \in (A^c)^c$.
Logo, $A \subseteq (A^c)^c$.
Por outro lado, se, $x \in (A^c)^c$, emtão, $x \notin A^c$, daí, $x \in A$.
Logo,$(A^c)^c \subseteq A$.
Portanto,$(A^c)^c = A$.

Por outro lado, para 2, temos,
se $A \subseteq B$ então, se $x \notin B$ temos que $x \notin A$, então $x \in B^c$, daí, $x \in A^c$ .

Logo, $B^c \subseteq A^c$.
Por outro lado, Se $B^c \subseteq A^c$, então $x \notin A^c$, então $x \notin B^c$, ou seja, se $x \in A$, então, $x \in B$.
Logo, $A \subseteq B$. ■

**Proposição 1.1.13.** *Seja $A \subset \Omega$ e $A \neq \emptyset$, então $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$.*

**Demonstração:**
Seja $x \in (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Note que $x \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ isto implica em $\forall\gamma \in \Gamma$,x$\notin$ $A_\gamma$. Daí, $x \notin \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, ou seja, x$\in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. Logo, $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$.
Por outro lado, Seja $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. Note que $\forall\gamma \in \Gamma$,x$\in$ $A_\gamma^c$, logo $x \notin A_\gamma$ para todo $\gamma$ o que implica em $x \in (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Logo, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c \subseteq (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Portanto, $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. ■

**Proposição 1.1.14.** *Seja $A \subset \Omega$ e $A \neq \emptyset$, então $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$.*

**Demonstração:**
Seja $x \in (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Note que $x \notin \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ isto implica em $\exists\gamma \in \Gamma$,x$\notin$ $A_\gamma$. Daí, $\exists\gamma \in \Gamma$,x$\in$ $A_\gamma^c$, ou seja, $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. Logo, $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$.
Por outro lado, Seja $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. Note que $\exists\gamma \in \Gamma$,x$\in$ $A_\gamma^c$ o que implica para algum $\gamma \in \Gamma$,x$\notin$ $A_\gamma$; sendo assim, $x \notin \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ implica em $x \in (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Logo, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c \subseteq (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c$. Portanto, $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$. ■

**Proposição 1.1.15.** *Seja $A, B, C \subset \Omega$ e $A, B, C \neq \emptyset$, então $A\Delta B \subseteq (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$, $\forall C \subseteq \Omega$.*

**Demonstração:** Seja $x \in A\Delta B$. Note que $x \in (A - B) + (B - A)$ implica em três casos, pois $x$ pode está em apenas A, apenas B e $A \cap C, B \cap C$:

1. Se $x$ pertence apenas a $A$, então $x \in A - C$ implica em $x \in (A - C) \cup (C - A)$; sendo assim, $x \in (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$;
2. se $x$ pertence apenas a $B$, então $x \in B - C$ implica em $x \in (B - C) \cup (C - B)$; sendo assim, $x \in (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$;
3. Mas, poderiamos pensar no caso de $x$ pertencer a interseção de um dos conjuntos com o C; sendo assim, podemos perceber que $x$ pertenceria a diferença de C com o conjunto contrário.

Logo, $A\Delta B \subseteq (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$, $\forall C \subseteq \Omega$. ■

**Proposição 1.1.16.** *Seja $A, B \subset \Omega$ e $A, B, C \neq \emptyset$, então $A \cup B = (A\triangle B) \cup (A \cap B)$.*

**Demonstração:**
Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$, implica em 3 casos:

1. $x \in A - B$, temos que $x \in A\Delta B \subseteq (A\triangle B) \cup (A \cap B)$;

2. $x \in B - A$, temos que $x \in A\Delta B \subseteq (A\triangle B) \cup (A \cap B)$;

3. $x \in A \cap B$, temos que $x \in (A\triangle B) \cup (A \cap B)$.

Logo, $A \cup B \subseteq (A\triangle B) \cup (A \cap B)$.

Por outro lado, Se $x \in (A\triangle B) \cup (A \cap B)$, então $x$ pertence a $A\Delta B$ ou a $A \cap B$. Daí temos 2 casos:

1. Para $x \in A\Delta B$ temos que $x$ pertence a $A - B$ ou a $B - A$, daí podemos perceber que $x$ pertence apenas a $A$ ou apenas a $B$ que nesse caso podemos afirmar que $x$ pertence a $A \cup B$.

2. Para $x \in A \cap B$, temos que $x \in A \cup B$.

Logo, $(A\triangle B) \cup (A \cap B) \subseteq A \cup B$ ∎

## 1.2 Limites e Indicadores

**Definição 1.2.1.** *Se $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ é uma sucessão de conjuntos, chamaremos limite superior da sucessão $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ ao conjunto de todos os pontos $\omega$ que pertencem a $A_n$ para infinitos valores de $n$; é simbolizado por $\limsup A_n$.*

**Proposição 1.2.1.** *Seja $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ uma sucessão de conjuntos, temos que*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

**Demonstração:**
Suponha que x$\in \limsup A_n$. Isso significa que x pertence a infinitos conjuntos $A_n$, ou seja, para qualquer índice $n$, existe algum $k \geq n$ tal que x$\in A_k$. Mas isso significa exatamente que x$\in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ para todo $n$, pois sempre há um $A_k$ contendo x para $k \geq n$. Portanto, x pertence a todas as interseções $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, mostrando que:

$$\limsup A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Por outro lado, Suponha que x$\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Isso significa que para todo $n$, o elemento x pertence a $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, ou seja, para todo $n$, existe um $k \geq n$ tal que x$\in A_k$. Isso implica que x pertence a um número infinito de conjuntos $A_k$, pois para cada $n$ conseguimos encontrar um $A_k$ contendo x para algum $k \geq n$. Pela definição de $\limsup A_n$ , isso significa que x$\in \limsup A_n$. Sendo assim,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \limsup A_n.$$

Logo, $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. ■

**Definição 1.2.2.** *O conjunto de todos os pontos de $\Omega$ que pertencem a todos os $A_n$, a menos de um número finito de tais $A_n$, é chamado limite inferior da sucessão $\{A_n\}_{n=1,2,...}$ é simbolizado por* $\liminf A_n$.

**Proposição 1.2.2.** *Seja $\{A_n\}_{n=1,2,...}$ uma sucessão de conjuntos, temos que*

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

**Demonstração:**
Seja $x \in \liminf A_n$. Isso significa que $x$ pertence a quase todos os conjuntos $A_n$, ou seja, existe algum $N$ tal que para todo $k \geq N$, $x \in A_k$. Isso implica que $x$ pertence ao conjunto:

$$\bigcap_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Portanto, como $N$ pode ser qualquer número natural, temos que $x$ pertence a pelo menos um dos conjuntos $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ e, assim, pertence a união:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Logo,

$$\liminf A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Seja $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Isso significa que existe algum $n_0$ tal que:

$$x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k.$$

Ou seja, para todo $k \geq n_0$, temos $x \in A_k$. Isso significa que $x$ pertence a todos os conjuntos $A_k$ a partir de um certo número $n_0$, o que, pela definição de $\liminf A_n$, implica que $x \in \liminf A_n$.
Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \liminf A_n.$$

Logo,

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

■

**Observação 1.2.1.** *Uma sucessão* $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$, *com* $A_n \subseteq \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$ *é dita crescente (respectivamente, decrescente) se* $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *(resp.* $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$*).*

**Observação 1.2.2.** *Se para uma sucessão* $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\limsup A_n = \liminf A_n$, *diremos que tal sucessão tem limite, e então empregaremos apenas a notação* $\lim A_n$.

**Observação 1.2.3.** *Indicaremos sucessões crescentes (resp. decrescentes) de conjuntos com a notação* $A_n \uparrow A$ *(resp.* $A_n \downarrow A$*). Escreveremos* $A_n \uparrow A$ *(resp.* $A_n \downarrow A$*) se* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ *(resp.* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$*).*

**Definição 1.2.3.** *Dado* $A \subseteq \Omega$, *chamaremos indicador de A à função* $I_A$ *definida por:*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & se\ \omega \in A, \\ 0, & se\ \omega \notin A. \end{cases}$$

**Proposição 1.2.3.** *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ *e* $B_j, A_i \neq \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}$, *então* $(\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \cap B_i)$

**Demonstração:**
Seja $x \in (\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right)$. Note que, $\exists i, j \in \mathbb{N}$, tal que $x \in A_i$ e a $B_j$ isto implica em $x \in A_i \cap B_j$ para algum $i, j \in \mathbb{N}$. Daí, de fato, $x \in (\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \cap B_i)$. Logo, $(\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$.
Por outro lado, Seja $x \in (\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)$, note que $\exists i, j \in \mathbb{N}$ tal que, $x \in (A_i \cap B_j)$ isto implica em $x \in A_i$ e $x \in b_j$ para algum $i, J \in \mathbb{N}$. Daí, de fato, $x \in (\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right)$.
Logo, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j) \subseteq (\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right)$.
Portanto, $(\sum_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \cap B_i)$. ■

**Proposição 1.2.4.** *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ *e* $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$, *então* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j = \sum_{j=1}^{m} A_j$

**Demonstração:**
Seja $x \in \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j$ temo que como A independe i, mas depende de j, então $\exists j \in \mathbb{N}$;x$\in$ $A_j$. Logo, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j \subseteq \sum_{j=1}^{m} A_j$.
Por outro lado, Seja $x \in \sum_{j=1}^{m} A_j$ como $A_j$ independe de $i$, temos que $x \in \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j$.
Logo, $\sum_{j=1}^{m} A_j \subseteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j$. Portanto, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_j = \sum_{j=1}^{m} A_j$. ■

**Proposição 1.2.5.** *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, B \subseteq \Omega$ *e* $B, A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$, *então* $B - \sum_{j=1}^{m} A_j = B - \sum_{j=1}^{m} (A_j \cap B)$

**Demonstração:**
Seja $x \in B - \sum_{j=1}^{m} A_j$, então, $x \in B$ e $x \notin \sum_{j=1}^{m} A_j = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, ou seja, $x \notin A_j$ para todo $j$. Como $\sum_{j=1}^{m} (A_j \cap B) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_j \cap B)$, e $x \notin A_j$ para todo $j$, então $x \notin (A_j \cap B)$ para todo $j$. Logo, $x \in B - \sum_{j=1}^{m} (A_j \cap B)$. Por outro lado, Seja $x \in B - \sum_{j=1}^{m} (A_j \cap B)$, então, $x \in B$ e$x \notin \sum_{j=1}^{m} (A_j \cap B) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_j \cap B)$, ou seja, $x \notin A_j \cap B$ para todo $j$. Se $x \notin A_j \cap B$,

então ou $x \notin B$ (o que é falso) ou $x \notin A_j$ para todo $j$. Isso implica $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, logo $x \in B - \sum_{j=1}^{m} A_j$.
Logo, $B - \sum_{j=1}^{m} A_j = B - \sum_{j=1}^{m}(A_j \cap B)$. ■

**Proposição 1.2.6.** *Seja* $A, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega A$ *e* $B_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$, *então* $A - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap A) = \bigcap_{j=1}^{m} (A - (B_j \cap A))$

**Demonstração:**
Se $x \in A - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap A)$, então, $x \in A$ e $x \notin \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap A) = \bigcup_{j=1}^{m}(B_j \cap A)$. Isso significa que, para cada $j$, temos $x \notin B_j \cap A$, o que implica que $x \in A - (B_j \cap A)$. Como isso vale para todo $j$, segue que, $x \in \bigcap_{j=1}^{m} (A - (B_j \cap A))$.
Por outro lado, Seja $x \in \bigcap_{j=1}^{m} (A - (B_j \cap A))$, então, para todo $j$, $x \in A - (B_j \cap A)$, ou seja, $x \in A$ e $x \notin B_j \cap A$. Como isso vale para todo $j$, temos que $x \notin \bigcup_{j=1}^{m}(B_j \cap A)$, ou seja, $x \in A - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap A)$.
Logo, $A - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap A) = \bigcap_{j=1}^{m} (A - (B_j \cap A))$. ■

**Proposição 1.2.7.** *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ *e* $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$, *temos que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$.

**Demonstração:**
Seja $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, então existe algum índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k$. Se $k = 1$, então $x \in A_1$, logo $x \in A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$, por outro lado, se $k \geq 2$. Como $x \in A_k$, verificamos se $\mathscr{C}$ pertence a algum dos conjuntos anteriores $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$; Se $x \notin A_j$ para todo $j < k$, então $x \in A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$, ou seja, $x \in \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$. Sendo assim, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$..
Por outro lado, seja $x \in A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$. Se $x \in A_1$, então claramente $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por outro lado, se $x \in A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ para algum $i \geq 2$, então, $x \in A_i$, e $x \notin A_j$ para todo $j < i$, o que implica que $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Sendo assim, $A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
Logo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$. ■

**Proposição 1.2.8.** *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ *e* $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$ *então* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$

**Demonstração:**
Se $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, então, $x \in A_i$ para todo $i \geq 1$. Em particular, $x \in A_1$ e $x \in A_i$ para todo $i \geq 2$, o que implica que $x \notin A_1 - A_i$ para qualquer $i \geq 2$. Como isso vale para todo $i \geq 2$, temos $x \notin \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$. Assim, $x \in A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$.
Por outro lado, seja $x \in A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$, então, $x \in A_1$ e $x \notin \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$, ou seja, $x \notin A_1 - A_i$ para todo $i \geq 2$. Isso significa que $x \in A_i$ para todo $i \geq 2$, Como já sabemos que $x \in A_1$, temos que $x \in A_i$ para todo $i \geq 1$, ou seja, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
Logo, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i)$. ■

**Proposição 1.2.9.** *Seja* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ *e* $A, E_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$ *então,* $(A \cap ((\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \bigcup(A \cap E_n)$

**Demonstração:** Seja $x \in A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)$. Então:

- $x \in A$ então $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n)$.
- $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n Ent\tilde{a}o \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, daí, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n)$.

Logo,

$$A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n)$$

Seja $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n)$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A \cap E_{n_0}$ implicando que, $x \in A$ e $x \in E_{n_0}$ então $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ Logo, $x \in A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n) \subseteq A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$$

Portanto,

$$A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap E_n)$$

■

# 2 Classes de Conjuntos

Neste capítulo, discutiremos as diferentes classes de conjuntos que surgem no contexto da medida e como elas são utilizadas para formar $\sigma$-álgebras. A construção de $\sigma$-álgebras é central para a formalização do conceito de medida, e a motivação desse capítulo é mostrar como esses conjuntos são usados para organizar e classificar os eventos de interesse na teoria da medida.

**Definição 2.0.1.** *Seja $\Omega$ um conjunto não vazio, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ é uma classe não-vazia de subconjuntos de $\Omega$.*

**Definição 2.0.2.** *$\mathbb{S}$ é um semi-anel se, e somente se:*

*i)* $A, B \in \mathbb{S} \implies A \cap B \in \mathbb{S}$;

*ii)* $A, B \in \mathbb{S} \implies A - B = \sum_{i=1}^{n} C_i$, *para algum* $n \in \mathbb{N}$ *e para alguns* $C_i \in \mathbb{S}$, $1 \leq i \leq n$.

**Observação 2.0.1.** *O sinal $\sum$ indica união disjunta. Decorre de ii) que $\emptyset \in \mathbb{S}$.*

**Exemplo 2.0.1.** $\Omega = \mathbb{R}^1$, $\quad \mathbb{S} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. *Observe que $\emptyset \in \mathbb{S}$, pois basta tomar $a = b$. Note que, dividindo em dois pontos*

1. *Tome $a, b, c, d \in \mathbb{R}^1$ tal que $A = (a, b]$ e $B = (c, d]$. Note que,*

   *a) Se $b < c$ ou $d < a$ tem-se que $A \cap B = \emptyset$, então $\emptyset \in \mathbb{S}$;*

   *b) Se $A \cap B \neq \emptyset$, então*

$$A \cap B = (\max(a, c), \min(b, d)]. \tag{2.1}$$

   *Como $a < b$ e $c < d$, segue que $\max(a, c) < \min(b, d)$ sempre que $A \cap B \neq \emptyset$. Assim, $A \cap B$ ainda é um intervalo da forma $(x, y]$, o que implica que $A \cap B \in \mathbb{S}$.*

2. *Tome $a, b, c, d \in \mathbb{S}$, tal que $A = (a, b]$ e $B = (c, d]$. Note que, $A - B$ pode ser escrito como uma união finita disjunta de elementos de $\mathbb{S}$:*

   *a) Se $A \subseteq B$, então $A - B = \emptyset$, que pertence a $\mathbb{S}$.*

*b) Se $A \cap B = \emptyset$, então $A - B = A$, que já pertence a $\mathbb{S}$.*

*c) Se $A \cap B \neq \emptyset$, então a diferença $A - B$ pode ser expressa como uma união disjunta de no máximo dois intervalos da forma $(x, y]$:*

*i. Se $a < c < b \leq d$, então $A - B = (a, c] \in \mathbb{S}$.*

*ii. Se $c < a < d < b$, então $A - B = (d, b] \in \mathbb{S}$.*

*iii. Se $a < c < d < b$, então $A - B = (a, c] \cup (d, b]$, que é uma união disjunta de dois intervalos em $\mathbb{S}$.*

**Observação 2.0.2.** $\Omega = \mathbb{R}^1$ , $\quad \mathbb{S} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. *Não é considerado um semi - anel. Pois, tome $A = [1, 3]$ e $B = [2, 3]$ subconjuntos de $\mathbb{S}$; note que, $A - B = [1, 2) \notin \mathbb{S}$.*

**Observação 2.0.3.** *Veja que $\mathbb{R}^n$ é a representação do conjunto dos números reais em n-uplas. E denotaremos $\mathbb{R}$ como uma classe de conjuntos; tal que, $\emptyset \neq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$. Além disso, definiremos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ com os reais estendidos.*

**Exemplo 2.0.2.** $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\quad \mathbb{S} = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$. *Observe que,*

1. *Se $A, B \in \mathbb{S}$, então $A \cap B \in \mathbb{S}$. Com efeito,*
   *Seja $A = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ e $B = (c_1, d_1] \times \cdots \times (c_d, d_d]$. Então a interseção é dada por:*

   $$A \cap B = \Big(\max(a_1, c_1), \min(b_1, d_1)] \times \cdots \times (\max(a_d, c_d), \min(b_d, d_d)]\Big).$$

   *Como cada intervalo $(\max(a_i, c_i), \min(b_i, d_i)]$ continua sendo um intervalo fechado (ou vazio), então $A \cap B \in \mathbb{S}$.*

2. *Se $A, B \in \mathbb{S}$, então $A - B$ pode ser expresso como uma união finita de elementos de $\mathbb{S}$:*
   *Seja $A = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ e $B = (c_1, d_1] \times \cdots \times (c_n, d_n]$. A diferença $A - B$ pode ser escrita como uma união de produtos cartesianos de intervalos fechados, que pode ser denotado como:*

   $$A - B = \Big((A_1 - B_1) \times \cdots \times (A_n - B_n)\Big)$$

   *Sendo $A_i - B_i$, com $1 \leq i \leq n$ as componentes desse diferença. Note que, pelo exemplo anterior cada componete é um semi-anel, implica que $A - B \in \mathbb{S}$.*

*Logo, $\mathbb{S} = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$ é um semi-anel.*

**Exemplo 2.0.3.** *Dado um conjunto $\Omega$ qualquer,* $\quad \mathbb{S} = \{A \subset \Omega : A$ *é unitário ou vazio*$\}$. *No caso de $A$ ser vazio temos que $\mathbb{S}$ é um semi-anel, pois a interserção é vazia e a diferença é vazia e $\emptyset \in \mathbb{S}$. Por outro lado, tome $A = \{a\}$ e $B = \{b\}$; $a, b \in \mathbb{S}$. Observe que:*

1. *No caso da inteserção. Temos que,*
$$\begin{cases} A \cap B = \{a\}, & se\ a = b. \\ A \cap B = \emptyset, & se\ a \neq b. \end{cases}$$
*Sendo assim,* $A \cap B \in \Omega$ *implica em* $A \cap B \in \mathbb{S}$.

2. *No caso da diferença. Obtemos que,*
$$\begin{cases} A - B = \emptyset, & se\ a = b. \\ A - B = \{a\}, & se\ a \neq b. \end{cases}$$
*Sendo assim,* $A - B \in \Omega$ *implica em* $A - B \in \mathbb{S}$.

*Logo,* $\mathbb{S}$ *é um semi-anel.*

**Definição 2.0.3.** $\mathbb{S}$ *é semi-álgebra se é semi-anel e* $\Omega \in \mathbb{S}$.

**Observação 2.0.4.** $\mathbb{S}$ *é semi-álgebra se, e somente se:*

*i)* $\Omega \in \mathbb{S}$;

*ii)* $A, B \in \mathbb{S} \implies A \cap B \in \mathbb{S}$.

*iii)* $A \in \mathbb{S} \Rightarrow A^c = \sum_{i=1}^{n} C_i, C_i \in \mathbb{S}$($A^c$ *é o complementar de* $A$ *em relação a* $\Omega$).

**Proposição 2.0.1.** *São equivalentes as seguintes afirmações:*
$\mathbb{R}$ *é fechada com relação a:*

*i) união finita e diferença;*

*ii) união finita e diferença própria;*

*iii) diferença simétrica e intersecção finita;*

*iv) união finita disjunta, diferença própria e interseção finita.*

***Demonstração:*** *Vamos provar que as quatro afirmações são equivalentes, mostrando as implicações entre elas.*

*i)* $\Rightarrow$ *ii) Se* $\mathbb{R}$ *é fechada por união finita e diferença, então em particular é fechada pela diferença própria, pois a diferença própria é um caso particular da diferença.*

*ii)* $\Rightarrow$ *iii) Sabemos pela 1.1.6 que a diferença simétrica pode ser escrita como:*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

*Se* $\mathbb{R}$ *é fechada por união finita e diferença própria, então também é fechada por diferença simétrica, pois ambas as diferenças* $A - B$ *e* $B - A$ *pertencem a* $\mathbb{R}$, *e a união delas também. Além disso, a interseção finita pode ser escrita como:*

$$A \cap B = A - (A - B).$$

*Como assumimos que* $\mathbb{R}$ *é fechada pela diferença própria, então* $A - B \in \mathbb{R}$ *e, como* $\mathbb{R}$ *também é fechada por diferença e união finita, segue que* $A \cap B \in \mathbb{R}$.

*iii)* $\Rightarrow$ *iv) Se* $\mathbb{R}$ *é fechada por diferença simétrica e interseção finita, então já sabemos que é fechada por interseção finita.*
*Além disso, uma união finita disjunta pode ser escrita como uma soma de diferenças simétricas e interseções:*

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B).$$

*Se* $\mathbb{R}$ *é fechada por interseção finita e diferença simétrica, então é fechada por união finita disjunta.*
*A diferença própria já faz parte das condições de iii), então segue que iv) também é válido.*

*iv)* $\Rightarrow$ *i) Se* $\mathbb{R}$ *é fechada por união finita disjunta, interseção finita e diferença própria, então a união finita arbitrária pode ser obtida como uma soma de uniões disjuntas e interseções. Além disso, como a diferença é uma composição da interseção e da diferença própria, segue que* $\mathbb{R}$ *também é fechada pela diferença.*
*Assim, fechamos o ciclo de equivalências e a proposição está demonstrada.* ∎

**Definição 2.0.4.** $\mathbb{R}$ *é um anel se satisfaz alguma condição da* 2.0.1 *(e consequentemente às quatro condições).* $\mathbb{R}$ *é álgebra se é anel e* $\Omega \in \mathbb{R}$.

**Proposição 2.0.2.** *Se* $\mathbb{S}$ *é um semi-anel (resp. semi-álgebra), então a família* $\mathbb{R}(\mathbb{S})$ *das somas finitas disjuntas de elementos de* $\mathbb{S}$ *é um anel (e resp. uma semi-álgebra) gerado por* $\mathbb{S}$.

***Demonstração:*** *Provaremos apenas para anel, pois para álgebra o raciocínio é análogo. Vamos ver que* $\mathbb{R}(\mathbb{S})$ *é um anel, o que prova uma das inclusões. A outra é imediata. Vamos usar a proposição 2.0.1(iv). pela definição,* $\mathbb{R}(\mathbb{S})$ *é fechado por união finita disjunta. Que* $\mathbb{R}(\mathbb{S})$ *é fechado em relação à interseção finita segue da identidade:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_i \cap B_j),$$

*e do fato de que* $\mathbb{S}$ *é fechado por interseção finita.*
*Vamos mostrar agora que* $R(\mathbb{S})$ *é fechado por diferença própria. Sejam* $\sum_i C_i$, $\sum_j B_j$ *com* $C_i, B_j \in \mathbb{S}$ *tais que:*

$$\sum_{j=1}^{m} B_j \subseteq \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{j=1}^{m} B_j &= \sum_{i=1}^{n}\left(C_i - \sum_{j=1}^{m} B_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(C_i - \sum_{j=1}^{m}(B_j \cap C_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m}(C_i - (B_j \cap C_i))\right).
\end{aligned}$$

*Como $(B_j \cap C_i \in S)$, $C_i - (B_j \cap C_i)$ é uma soma finita de elementos de $\mathbb{S}$, ou seja, um elemento de $R(\mathbb{S})$. Agora basta usar o fato de que $R(\mathbb{S})$ é fechado em relação à soma finita.* ■

**Definição 2.0.5.** *$\mathbb{S}$ é $\sigma -$ anel se, e somente se, é fechado por diferença própria e união enumerável. Se $\mathbb{S}$ é $\sigma -$ anel e $\Omega \in \mathbb{S}$, dizemos que $\mathbb{S}$ é uma $\sigma -$ álgebra.*

**Proposição 2.0.3.** *$\mathbb{S}$ é $\sigma-$anel se, e somente se, é fechado por interseção finita, diferença própria e soma enumerável. (Isto é, união enumerável disjunta.)*

***Demonstração:*** *Suponhamos que $\mathbb{S}$ seja um $\sigma$-anel. Como $\emptyset \neq \Omega \in \mathbb{S}$, $\mathbb{S}$ é fechado por diferença própria, $A - A = \emptyset$, para todo $A$. $\mathbb{S}$ é fechado por união finita, pois toda união finita é igual a uma união enumerável disjunta de conjuntos, menos um número finito, isto é, soma finita. Então $\mathbb{S}$ é, portanto, fechado por interseção finita. Além disso, como $\mathbb{S}$ é fechado por soma enumerável disjunta, também é fechado por interseção finita. Para provar que $\mathbb{S}$ é fechado por interseção finita, diremos que para cada interseção finita há uma soma enumerável disjunta equivalente. Exatamente como é provado que $\mathbb{S}$ é fechado por união enumerável disjunta, podemos provar que é fechado por união finita disjunta. Agora para provar que $\mathbb{S}$ é fechado por soma finita.*
*A união enumerável basta usar a identidade:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty}\left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

■

**Proposição 2.0.4.** *Todo $\sigma$-anel é fechado por interseção enumerável.*

***Demonstração:*** *Basta ver que*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=2}^{\infty}(A_1 - A_i).$$

■

**Proposição 2.0.5.** *$\mathscr{A}$ é $\sigma$-álgebra se, e somente se, é fechada por uniões enumeráveis e complementos.*

***Demonstração:***
*Suponha que $\mathscr{A}$ seja uma $\sigma$-álgebra. pela definição, $\mathscr{A}$ contém o conjunto vazio e é fechada por complementos e uniões enumeráveis. Assim, a condição dada na proposição é satisfeita. Pois $\Omega \in \mathscr{A}$.*
*Por outro lado, Suponha que $\mathscr{A}$ seja fechada por uniões enumeráveis e complementos. Como a união vazia é apenas o conjunto vazio, e $\mathscr{A}$ é fechada por uniões enumeráveis, então o conjunto vazio pertence a $\mathscr{A}$. Além disso, como $\mathscr{A}$ é fechada por complementos, também contém todos os complementos dos seus elementos, e mais, $\Omega \in \mathscr{A}$. Assim, a definição de $\sigma$-álgebra é satisfeita, o que completa a demonstração.* ■

**Observação 2.0.5.** *A interseção de uma família qualquer de $\sigma$-anéis ($\sigma$-álgebras) é um $\sigma$-anel ($\sigma$-álgebra). Portanto, dada uma classe não-vazia $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $\Omega$, podemos definir o $\sigma$-anel ($\sigma$-álgebra) gerado por $\mathscr{C}$ como o menor $\sigma$-anel ($\sigma$-álgebra) que contém $\mathscr{C}$, e que coincide com a interseção de todos os $\sigma$-anéis ($\sigma$-álgebras) que contêm $\mathscr{C}$.*

***Notação**: Adotaremos o símbolo $\sigma(\mathscr{C})$ ($\tilde{\sigma}(\mathscr{C})$) para denotar a $\sigma$-álgebra ($\sigma$-anel) gerada pela família de conjuntos $\mathscr{C}$.*

**Exemplo 2.0.4.** *Seja $\mathscr{C} = \mathbb{N}$. Temos que o conjunto*

$$\sigma(\mathscr{C}) = \{\emptyset, \{1,3,5,\dots\}, \{2,4,6,\dots\}, \mathscr{C}\}$$

*é uma $\sigma$-álgebra. Pois, basta observar que o $\emptyset \in \sigma(\mathscr{C})$; em outro elemento, dado qualquer conjunto de $\sigma(\mathscr{C})$ o seu complentar está nele. E de fato, tomando uma sequência constante ou alternante dos pares com ímpares ou somente uma paridade teremos que o conjunto gerado pela união dos termos(conjunto-sequência) estará na $\sigma(\mathscr{C})$.*

**Exemplo 2.0.5.** *Seja $\mathscr{C} = X$ um conjunto qualquer. Se $\sigma(\mathscr{C})$ é o conjunto $\mathbb{P}(\mathscr{C})$ das partes de $X$, então $\sigma(\mathscr{C})$ é uma $\sigma -$ álgebra. De fato, é evidente que $\emptyset$,$x\in \mathbb{P}(\mathscr{C})$. Além disso, dado arbitrariamente $A \in \mathbb{P}(\mathscr{C})$, é imediato que $\mathscr{C} \backslash A \in \mathbb{P}(\mathscr{C})$. Por fim, dada uma sequência $(A_n)$ em $\mathbb{P}(\mathscr{C})$, temos que $A_n \subset \mathscr{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subset \mathscr{C}$, ou seja, $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathbb{P}(\mathscr{C})$.*

**Proposição 2.0.6.** *Se $\tau$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de $\mathscr{C}$, então existe uma $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathscr{C};\tau)$ de $\mathscr{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\tau \subset \sigma(\mathscr{C};\tau)$;*
2. *Se $\sigma(\mathscr{C})$ é uma $\sigma$-álgebra de $\mathscr{C}$ tal que $\tau \subset \sigma(\mathscr{C})$, então $\sigma(\mathscr{C};\tau) \subset \sigma(\mathscr{C})$.*

***Demonstração:*** *Seja $(\sigma(\mathscr{C}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ a família das $\sigma$-álgebras de $\mathscr{C}$ que contêm $\tau$. Temos que esta família é não vazia, pois $\mathscr{P}(\mathscr{C})$ é uma $\sigma$-álgebra de $\mathscr{C}$ que contém $\tau$. Considerando*

$$\sigma(\mathscr{C};\tau) := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \sigma(\mathscr{C}_\lambda),$$

*temos que $\sigma(\mathscr{C};\tau)$ é uma $\sigma$-álgebra de $\mathscr{C}$ que evidentemente satisfaz as propriedades 1 e 2.* ∎

**Definição 2.0.6.** *A $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathbb{R}^1;\tau)$, em que $\tau = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^1\}$, é denominada álgebra de Borel e denotada por $\mathbb{B}$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^1$ é dito um conjunto de Borel se $A \in \mathbb{B}$*

**Definição 2.0.7.** *$\mathscr{A}$ é uma classe $\sigma-$aditiva se, e somente se, $\Omega \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ é fechada por diferença própria, soma finita, e união crescente (i.e., $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ..., A_i \in \mathscr{A}, \forall i$, implica $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$).*

**Observação 2.0.6.** *Vale a observação 2.0.5 com classe $\sigma$-aditiva em lugar de $\sigma$-anel.*

**Proposição 2.0.7.** *Se $\mathscr{C}$ é uma classe não-vazia de conjuntos, fechada por interseção finita, então a classe $\sigma$-aditiva gerada por $\mathscr{C}$ é igual a $\sigma(\mathscr{C})$.*

***Demonstração:*** *Seja $\mathbb{F}$ a classe $\sigma$-aditiva gerada por $\mathscr{C}$. Como $\sigma(\mathscr{C})$ é uma classe $\sigma$-aditiva, o que é fácil de verificar, $\mathbb{F} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. De modo análogo, se provarmos que $\mathbb{F}$ é $\sigma$-álgebra, teremos $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathbb{F}$, terminando a prova. Observemos inicialmente que toda classe $\sigma$-aditiva fechada por interseção finita, é uma $\sigma$-álgebra pela Prop. 2.0.3 para provar isso basta usar o fato de que*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} A_j \quad \textit{(note que no membro direito temos uma união crescente).}$$

*Portanto, basta provar que $\mathbb{F}$ é fechada por interseção finita. Seja $\mathbb{H} = \{A \subseteq \Omega : \forall B \in \mathbb{F}, A \cap B \in \mathbb{F}\}$. é suficiente provar que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{H}$. Ao mostrarmos, porém, que $\mathbb{H}$ é uma classe $\sigma$-aditiva e $\mathbb{H} \supseteq \mathscr{C}$, temos que $\mathbb{H}$ estará provada. Usando as identidades:*

1. $$(A_1 - A_2) \cap B = (A_1 \cap B) - (A_2 \cap B),$$

2. $$(A_1 + A_2) \cap B = (A_1 \cap B) + (A_2 \cap B),$$

3. $$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B),$$

*vemos que $\mathbb{H}$ é classe $\sigma$-aditiva.*
*Para mostrar que $\mathbb{H} = \mathbb{F}$, Considere $C \in \mathscr{C}$ e construímos a coleção:*

$$D = \{A \subseteq \Omega : A \cap C \in \mathbb{F}\}.$$

*É suficiente provar que $\mathbb{F} \subseteq D$ para obtermos $C \in \mathbb{H}$. Novamente isso se reduz a mostrar que $D$ é uma classe $\sigma$-aditiva (modo análogo ao que usamos para $\mathbb{H}$) e que $D \supseteq \mathscr{C}$. Este* *último fato decorre da hipótese de $\mathscr{C}$ ser fechada por interseção finita.* ■

*A união enumerável basta usar a identidade:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty}\left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

**Definição 2.0.8.** *$\mathscr{A}$ é uma classe monotônica se é fechada por união enumerável crescente e por interseção enumerável decrescente.*

**Observação 2.0.7.** *Análoga à observação 2.0.5 com classe monotônica em lugar de $\sigma$-anel.*

**Proposição 2.0.8.** *Se $\mathbb{R}$ é uma álgebra (anel), então a classe monotônica gerada por $\mathbb{R}$ é $\sigma(\mathbb{R})(\ \tilde{\sigma}(\mathbb{R}))$.*

***Demonstração:*** *Seja $\mathbb{M}$ a classe monotônica gerada por $\mathbb{R}$. Como $\sigma(\mathbb{R})$ é uma classe monotônica (o que é fácil de verificar, pois é fechado por união enumerável e interseção enumerável e em particular crescente e decrescente), segue que $\mathbb{M} \subseteq \sigma(\mathbb{R})$. Para concluir que $\mathbb{M} = \sigma(\mathbb{R})$, basta mostrar que $\mathbb{M}$ é uma $\sigma$-álgebra.*

*Sabemos que uma classe monotônica que também é uma álgebra é uma $\sigma$-álgebra. Portanto, é suficiente provar que $\mathbb{M}$ é uma álgebra, ou seja, que $\mathbb{M}$ é fechada por complemento e interseção finita.*

*Seja $\mathbb{H} = \{A \subseteq \Omega : A^c \in \mathbb{M}\}$. Se mostrarmos que $\mathbb{H}$ é uma classe monotônica contendo $\mathbb{R}$, concluiremos que $\mathbb{M} = \mathbb{H}$, ou seja, $\mathbb{M}$ é fechada por complemento.*

*Para isso, verificamos que:*

1. *Se $A_n$ é uma sequência crescente em $\mathbb{H}$, então $A_n^c$ é decrescente e, como $\mathbb{M}$ é monotônica, temos $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathbb{M}$, o que implica $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}$.*

2. *Se $A_n$ é uma sequência decrescente em $\mathbb{H}$, então $A_n^c$ é crescente e, pelo mesmo raciocínio, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}$.*

*Logo, $\mathbb{H}$ é monotônica. Além disso, como $\mathbb{H}$ contém $\mathbb{R}$, segue que $\mathbb{M} = \mathbb{H}$, provando a estabilidade por complemento.*

*Agora, para a estabilidade por interseção finita, basta notar que se $A, B \in \mathbb{M}$, então $A^c, B^c \in \mathbb{M}$, e, pela estabilidade por união crescente, temos:*

$$(A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathbb{M}.$$

*Portanto, $\mathbb{M}$ é uma álgebra. Como também é monotônica, segue que $\mathbb{M}$ é uma $\sigma$-álgebra. Assim, temos:*

$$\sigma(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}$$

. *Como já tinhamos* $\mathbb{M} \subseteq \sigma(\mathbb{R})$*, concluímos que:*

$$\mathbb{M} = \sigma(\mathbb{R})$$

. $\blacksquare$

# 3 Medida

*A medida é uma ferramenta essencial para a definição rigorosa da integral de Lebesgue, e neste capítulo discutimos as definições e propriedades que ela deve satisfazer e apresentamos alguns exemplos.*

**Definição 3.0.1.** *Uma medida é uma função $\mu : \sigma(\mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \sigma(\mathscr{C})$;
3. *Se existe uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\sigma(\mathscr{C})$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n).$$

*Como permitimos que $\mu$ assuma valores reais estendidos, pode ocorrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$. Neste caso, ou $\mu(E_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ é uma série de termos não negativos que diverge. Uma medida é chamada de finita quando não assume $+\infty$. Dizemos que uma medida é $\sigma$-finita se existe uma sequência $(E_n)$ de conjuntos em $\sigma(\mathscr{C})$, com*

$$\mathscr{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$

*tal que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Exemplo 3.0.1.** *Sejam $\mathscr{C} = \mathbb{R}$ e $\sigma(\mathscr{C})$ a álgebra de Borel. Neste trabalho, vamos assumir a existência e unicidade de uma medida $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ tal que, quando $E \in \sigma(\mathscr{C})$ é da forma $E = (a, b)$, tem-se*

$$\mu(E) = b - a.$$

*Observe que realmente temos uma medida. Pois,*

1. $\mu(\emptyset) = b - b = 0$
2. $\mu(E) = b - a \geq 0$, *tal que* $b \geq a$.
3. *Tome uma sequências $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos dijuntos. Note que,*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} (b_n - a_n) \tag{3.1}$$

*Essa medida é frequentemente chamada de medida de Lebesgue ou medida de Borel.*

**Observação 3.0.1.** *Sejam $\mathscr{C} = \mathbb{R}$, $\sigma(\mathscr{C})$ a álgebra de Borel e $\mu$ a medida de Borel. Se o conjunto $E \in \sigma(\mathscr{C})$ é enumerável, então $\mu(E) = 0$. De fato, se $E$ é enumerável, então podemos representar $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos considerar a família $(E_n)$ em que*

$$E_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,*

$$0 \leq \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

*e consequentemente $\mu(E) = 0$.*

**Exemplo 3.0.2.** *Seja $\mathscr{C}$ um conjunto não vazio e $\sigma(\mathscr{C})$ a $\sigma$-álgebra contendo todos os subconjuntos de $\mathscr{C}$. Sejam $\mu_1$ e $\mu_2$ definidas para todo $E \in \sigma(\mathscr{C})$ por $\mu_1(E) = 0$ e*

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se\ E = \emptyset, \\ +\infty, & se\ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

*É fácil ver que $\mu_1$ e $\mu_2$ são medidas, pois para:*
*De fato, para $\mu_1$; temos que,*

1. $\mu_1(\emptyset) = 0$
2. $\mu_1(E) = 0 \geq 0$
3. *Observe tomando uma sequência $(E_n)$ reais qualquer então,* $\mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu_1(E_n) = 0$.

*E para $\mu_2$; temos que,*

1. $\mu_2(\emptyset) = 0$
2. $\mu_2(E) = +\infty \geq 0$
3. *Observe tomando uma sequência$(E_n)$ reais qualquer então* $\mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu_1(E_n) = +\infty$.

*Sendo assim, note que $\mu_1$ é finita e $\mu_2$ não é finita.*

**Exemplo 3.0.3.** *Sejam $(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ como definidos no Exemplo 1 e $p$ um elemento fixo em $\mathscr{C}$. Tome $\mu_3$ definida para todo $E \in \sigma(\mathscr{C})$ por*

$$\mu_3(E) = \begin{cases} 0, & se\ p \notin E, \\ 1, & se\ p \in E. \end{cases}$$

*Temos que $\mu_3$ é uma medida finita, chamada de medida unitária concentrada em $p$. Pois, observe que $\mu_3(\emptyset) = 0$, levando em consideração que $p \notin \emptyset$. Além disso, dado $E \in \sigma(\mathscr{C})$, observe também que:*

1. *Se $p \in E$, então, $\mu_3(E) = 1 \geq 0$;*
2. *Se $p \notin E$, então $\mu_3(E) = 0 \geq 0$. Note também que tomando uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\sigma(\mathscr{C})$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$, temos que,*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n).$$

*E teremos como resposta 1 se existe um $E_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$, tal que $p \in E_i$. Por outro lado, o resultado seria 0, se $\forall i \in \mathbb{N}, p \notin E_i$.*

**Exemplo 3.0.4.** *Sejam $\mathscr{C} = \mathbb{N}$ e $\sigma(\mathscr{C})$ a $\sigma$-álgebra que contém todos os subconjuntos de $x$. Definamos $\mu : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}$ por*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ +\infty, & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

*observe que,*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$*
2. *$\mu(E) = \#E$ ou $+\infty \geq 0$*
3. *Dada a Sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\sigma(\mathscr{C})$ tal que $E_i \cap E_J = \emptyset$ para $i \neq j$, observe também que;*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n) = +\infty. \tag{3.2}$$

*Essa medida é chamada de Medida Contagem nos Naturais. Note que $\mu$ não é uma medida finita.*

**Lema 3.0.1.** *Seja $\mu$ uma medida definida em $\sigma(\mathscr{C})$. Se $E, F \in \sigma(\mathscr{C})$ e $E \subseteq F$, então:*

1. *$\mu(E) \leq \mu(F)$;*
2. *Se $\mu(E) < +\infty$, então $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

***Demonstração:***

1. *Como $F = E \cup (F - E)$ e $E \cap (F - E) = \emptyset$, segue que*

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E).$$

.

2. *Note que, $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$ e $\mu(E) < +\infty$, então*

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

■

**Lema 3.0.2.** *Seja $\mu : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}$ uma medida.*

1. *Se $(E_n) \subset \sigma(\mathscr{C})$ é uma sequência crescente, então*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$
2. *Se $(F_n) \subset \sigma(\mathscr{C})$ é uma sequência decrescente e $\mu(F_1) < +\infty$, então*
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

***Demonstração:***

1. *Note que, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n$ o que implica que, $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = E_n$. Daí,*
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n) = lim_{n\to+\infty}\mu(E_n). \tag{3.3}$$
2. *Por outro lado, temos que, se $F_n \subset \sigma(\mathscr{C})$ é uma sequência decrescente, ou seja, $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n = F_n$. Então,*
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n). \tag{3.4}$$

■

**Definição 3.0.2.** *Seja $\mu$ uma medida em $\sigma(\mathscr{C})$. Dizemos que uma sequência $(f_n)$ de funções em $\mathscr{C}$ converge em quase toda parte para uma função $f$ quando existe um conjunto $\mathbb{N} \in \sigma(\mathscr{C})$, com $\mu(\mathbb{N}) = 0$, tal que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathscr{C} - \mathbb{N}$. Neste caso, denotamos*
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad q.t.p.$$

**Definição 3.0.3.** *Seja $\sigma(\mathscr{C})$ uma $\sigma$-álgebra do conjunto $\mathscr{C}$. Dizemos que a função $\lambda : \sigma(\mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida com sinal quando:*

1. *$\lambda(\emptyset) = 0$;*
2. *Se existe uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\sigma(\mathscr{C})$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então*
$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda(E_n).$$

**Proposição 3.0.1.** *Seja $\mu : \sigma(\mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida. Se $A \in \sigma(\mathscr{C})$, então a função $\lambda : \sigma(\mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$ é uma medida.*

***Demonstração:*** *Como $\mu$ é medida, temos que $\mu(\emptyset) = 0$. Daí $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Temos ainda que, dado $E \in \sigma(\mathscr{C})$, tem-se*
$$\lambda(E) = \mu(A \cap E) \geq 0.$$

*Finalmente, note que pela proposição 1.2.9, a definição 3.0.1 e como $\mu$ é medida e$(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \emptyset$,*

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(A\cap((\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n)) = \mu(\cup(A\cap E_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A\cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A\cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

*Portanto, $\lambda$ é uma medida.* ■

**Proposição 3.0.2.** *Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas definidas em $\sigma(\mathscr{C})$ e $a_1, \ldots, a_n$ números reais não negativos, então a função $\lambda$ definida para $E \in \sigma(\mathscr{C})$ por*

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E)$$

*é uma medida.*

***Demonstração:*** *Como $\mu_j$ são medidas, note que*

$$\lambda(\emptyset) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\emptyset) = \sum_{j=1}^{n} a_j 0 = 0.$$

*E ainda, como $a_j \geq 0$ e $\mu_j(E) \geq 0$, temos que*

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0.$$

*Finalmente, note que*

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

*Portanto, $\lambda$ é uma medida.* ■

# 4 Funções Mensuráveis

*Discutiremos, neste capítulo, as propriedades das funções mensuráveis, ou seja, aquelas que podem ser integradas no contexto da medida de Lebesgue, fornecendo a base para a construção da integral.*

**Definição 4.0.1.** *Uma função $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ é mensurável quando*

$$\{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

**Observação 4.0.1.** *Uma função $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ é dita **Borel mensurável** quando $\mathscr{C} = \mathbb{R}$ e $\sigma(\mathscr{C}) = \mathbb{B}$.*

**Proposição 4.0.1.** *Toda função constante é mensurável.*

***Demonstração:*** *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = c$, para todo $x \in \mathscr{C}$. Se $\alpha > c$, então*

$$\{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \sigma(\mathscr{C}).$$

*Se $\alpha \leq c$, então*

$$\{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} = \mathscr{C} \in \sigma(\mathscr{C}).$$

*Concluímos com isto que $\{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $f$ é mensurável.* ∎

**Lema 4.0.1.** *Sejam $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma(\mathscr{C})$ uma $\sigma$-álgebra de $\mathscr{C}$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

1. $A_\alpha = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
2. $B_\alpha = \{x \in \mathscr{C} : f(x) \leq \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $C_\alpha = \{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $D_\alpha = \{x \in \mathscr{C} : f(x) < \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

***Demonstração:***
*i) <=> ii) Note que, $A_\alpha = \mathscr{C} - B_\alpha$. Sendo assim, pela definição de $\sigma - algebra$ temos que, $A_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$ se, e somente se, $B_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$.*
*iii) <=> iv) Note que, $C_\alpha = \mathscr{C} - D_\alpha$. Sendo assim, pela definição de $\sigma - algebra$ temos*

*que, $C_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$ se, e somente se, $D_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$.*
*i) => iii) Note que $A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \sigma(\mathscr{C})$ e observe também que $C_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$, pois dado $x \in C_\alpha$ pode-se observar que $x \in \{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\} = A_\alpha$, por outro lado se $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \forall n \in \mathbb{N}$ temos que $x \in \{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq \sup\{\alpha - \frac{1}{n}\} = \alpha\} \subseteq C_\alpha$ , como $\sigma(\mathscr{C})$ é fechado para interseção enumerável, temos que $C_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$.*
*i) <= iii) Note que $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \sigma(\mathscr{C})$ e observe também que $A_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$, Pois se $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{\alpha+\frac{1}{K}} \subseteq \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} = A_\alpha$, por outro lado, de fato $A_\alpha \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$ basta tomar n suficientemente pequeno, como $\sigma(\mathscr{C})$ é fechado por união enumerável temos que $A_\alpha \in \sigma(\mathscr{C})$.* ■

**Exemplo 4.0.1.** *Seja $\mathscr{C} = \mathbb{R}^1$ e consideremos $\sigma(\mathscr{C}) = \mathbb{B}$. Temos que toda função contínua $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ é Borel mensurável. De fato, como $f$ é contínua para todo $\alpha \in \mathbb{R}^1$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) > \alpha\}$ é aberto, pois, não existe $x \in \mathbb{R}^1; f(x) = \alpha$ e, consequentemente, é a união de uma sequência de intervalos abertos. Por isso, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) > \alpha\} \in \mathbb{B}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^1$.*

**Exemplo 4.0.2.** *Seja $\mathscr{C} = \mathbb{R}^1$ e consideremos $\sigma(\mathscr{C}) = \mathbb{B}$. Temos que toda função monótona crescente é Borel mensurável. De fato, se $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ é uma função monótona crescente, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}^1$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) > \alpha\}$ é um intervalo da forma $(\alpha, +\infty)$*

**Proposição 4.0.2.** *Seja $c \in \mathbb{R}^1$. Se $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável, então $(c \cdot f) : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.*

***Demonstração:*** *No caso em que $c = 0$, temos que $(c \cdot f) : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é a função definida por*

$$(c \cdot f)(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathscr{C},$$

*ou seja, $(c \cdot f)$ é uma função constante, que é mensurável.*
*No caso em que $c > 0$, se $f$ é mensurável, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}^1$, temos que*

$$\{x \in \mathscr{C} : (c \cdot f)(x) > \alpha\} = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \in \sigma(\mathscr{C}).$$

■

**Proposição 4.0.3.** *Se $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável, então $f^2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.*

***Demonstração:*** *Se $f$ é mensurável, então dado arbitrariamente $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \geq 0$, temos*

$$\{x \in \mathscr{C} : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in \mathscr{C} : f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \sigma(\mathscr{C}).$$

*Dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}^1, \alpha < 0$, temos que, como $f^2(x) > 0$ e $0 > \alpha$, vale que,*

$$\{x \in \mathscr{C} : f^2(x) > \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}).$$

■

**Proposição 4.0.4.** *Se $f_1 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ e $f_2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ são mensuráveis, então $(f_1 + f_2) : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.*

***Demonstração:*** *Dado $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$, tal que $f_1(x) > \alpha_1, f_2(x) > \alpha_2$,$x\in \mathbb{R}^1$. Note que, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ então $f_1(x) + f_2(x) > \alpha, \forall x\in \mathbb{R}^1$. Logo, $(f_1 + f_2) : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.* ■

**Observação 4.0.2.** *Seja $f_2$ uma função mensurável. Note que pela proposição 4.0.2 $-1.f_2$ é mensurável. Sendo assim, se $f_1, f_2$ são mensuráveis, então $f^1 - f^2$ é mensurável.*

**Proposição 4.0.5.** *Se $f_1 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ e $f_2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ são mensuráveis, então $(f_1 \cdot f_2) : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.*

***Demonstração:*** *Suponhamos que $f_1$ e $f_2$ sejam mensuráveis. Notemos que*

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{4}\left[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2\right].$$

*Segue então das proposições 4.0.2, 4.0.4 e 4.0.4 que $(f_1 \cdot f_2)$ é mensurável.* ■

**Proposição 4.0.6.** *Se $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável, então $|f| : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é mensurável.*

***Demonstração:*** *Seja $f$ uma função mensurável, note que $|f| \geq f$. Sendo assim, pela definição de função mensurável, $\{x \in \mathscr{C}, |f(x)| \geq f(x) > \alpha\} \in \sigma(\mathscr{C}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Logo, |f| é mesurável.* ■

**Proposição 4.0.7.** *Se $f_1 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então as funções $h_1 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ e $h_2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$h_1(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \quad e \quad h_2(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\},$$

*são mensuráveis.*

***Demonstração:*** *Notemos que*

$$h_1(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|]$$

*e*

$$h_2(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x) - |f_1(x) - f_2(x)|].$$

*Então, pelas proposições 4.0.2, 4.0.4 e 4.0.6, concluímos que as funções $h_1$ e $h_2$ são mensuráveis.* ■

**Definição 4.0.2.** *A parte positiva da função $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é a função $f^+ : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ definida por:*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

*A parte negativa da função $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é a função $f^- : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ definida por:*

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -mim\{f(x), 0\}.$$

**Proposição 4.0.8.** *Seja $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ uma função. Se $f^+$ e $f^-$ são, respectivamente, as partes positiva e negativa de $f$, então*

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

*Além disso, $f$ é mensurável se, e somente se, $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis.*

***Demonstração:*** *Vamos primeiramente mostrar que $f = f^+ - f^-$. De fato, se $x \in \{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq 0\}$, então*

$$f(x) = f(x) - 0 = f^+(x) - f^-(x) = (f^+ - f^-)(x).$$

*Se $x \in \{x \in \mathscr{C} : f(x) < 0\}$, então*

$$f(x) = 0 + f(x) = f^+(x) - f^-(x) = (f^+ - f^-)(x).$$

*Vamos agora mostrar que $|f| = f^+ + f^-$. De fato, se $\{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq 0\}$, então,*

$$|f(x)| = f(x) + 0 = f^+(x) + f^-(x) = (f^+ + f^-)(x).$$

*Se $x \in \{x \in \mathscr{C} : f(x) < 0\}$, então*

$$|f(x)| = 0 - f(x) = f^+(x) + f^-(x) = (f^+ + f^-)(x).$$

*Se $f$ é mensurável, sendo $f^+(x) = max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = max\{-f(x), 0\}$, segue das Proposições 36, 38 e 41 que $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis. Se $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis, sendo $f = f^+ - f^-$, segue das Proposições 4.0.2 e 4.0.4 que $f$ é mensurável* ∎

**Definição 4.0.3.** *Denota-se por $M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$, a coleção de todas as funções mensuráveis definidas em $\mathscr{C}$ e assumindo valores reais estendidos, ou seja,*

$$M = M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C})) := \{f : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}^1} : f \text{ é mensurável}\}.$$

**Definição 4.0.4.** *Denota-se por $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$, a coleção de todas as funções mensuráveis e não negativas definidas em $\mathscr{C}$ e assumindo valores reais estendidos, ou seja,*

$$M^+ = M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C})) := \{f \in M : f \text{ é não negativa}\}.$$

**Proposição 4.0.9.** *Se $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é uma função mensurável, então*

1. *Sejam $A, B \in \sigma(\mathscr{C})$ com $A = \{x \in \mathscr{C} : f(x) = +\infty\}$ e $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathscr{C} : f(x) > n\}$. Então, $A = B$*
2. *Sejam $A', B' \in \sigma(\mathscr{C})$ com $A' = \{x \in \mathscr{C} : f(x) = -\infty\}$ e $B' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathscr{C} : f(x) > -n\}$. Então $A' = (B')^c$.*

***Demonstração:***

1. *Seja $x \in A$. Como $f(x) = +\infty$, temos que $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \in B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f(x) > n\}$.*
   *Por outro lado, Dado arbitrariamente $x \in B$, temos que $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $f(x) \geq lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ e daí, $f(x) = +\infty$, ou seja, $x \in A$.*
   *Logo, $\{x \in \mathscr{C} : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f(x) > n\} \in \sigma(\mathscr{C})$.*

2. *Seja $x \in A'$. Como $f(x) = -\infty$, temos que $f(x) < -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \notin B' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f(x) > -n\}$ implica em $x \in (B')^c = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f(x) > -n\})^C$.*
   *Por outro lado, Dado arbitrariamente $x \in (B')^c$, temos que $f(x) < -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $f(x) \leq lim_{n\to+\infty} - n = -\infty$ e daí, $f(x) = -\infty$, ou seja, $x \in A$.*
   *Logo, $\{x \in \mathscr{C} : f(x) = -\infty\} = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f(x) > -n\})^c$.*

■

**Lema 4.0.2.** *Uma função $f : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}^1}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x\in \mathscr{C} : f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x\in \mathscr{C} : f(x) = -\infty\}$ pertencem a $\sigma(\mathscr{C})$ e a função $\tilde{f} : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ definida por*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \notin A \cup B \\ 0, & se\ x \in A \cup B \end{cases}$$

*é mensurável.*

***Demonstração:*** *Sejam $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ uma função mensurável e $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Note que pela proposição anterior $A, B \in \sigma(\mathscr{C})$. Considere os conjuntos $C_1 = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\}$ e $C_2 = \{x \in \mathscr{C} : \tilde{f}(x) > \alpha\} \cap A^C$. Vamos mostrar que $C_1 = C_2$. De fato, suponha $\alpha \geq 0$ e $x \in C_1$. Temos que $\tilde{f}(x) > \alpha \geq 0 \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x) \neq 0 > \alpha$. Então $x \notin A \cup B$ e assim $x \notin A$. Logo, $x \in A^c$ e portanto $x \in C_2$.*

*Reciprocamente, dada $x \in C_2$, temos que $x \notin A$ e $\tilde{f}(x) > \alpha$. Da mesma forma, mostramos que $\tilde{f}(x) = f(x) \neq 0 \in A \cup B$. Portanto, $\tilde{f}(x) > \alpha$ e assim $x \in C_1$. Portanto, $C_1 = C_2$. Como $f$ é mensurável e $A^C \in \sigma(\mathscr{C})$, segue que $C_2 \in \sigma(\mathscr{C})$. Logo, $\tilde{f}$ é mensurável.*

*Por outro lado, se $\alpha < 0$, considere os conjuntos $D_1 = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\}$ e $D_2 = \{x \in \mathscr{C} : f(x) > \alpha\} \cup B$. De forma análoga, mostramos que $D_1 = D_2$. Note que como $f$ é mensurável e $B \in \sigma(\mathscr{C})$, segue que $D_2 \in \sigma(\mathscr{C})$. Logo, $D_1 \in \sigma(\mathscr{C})$ e portanto $\tilde{f}$ é mensurável.*

*De mesma forma, prova-se a recíproca.* ■

**Observação 4.0.3.** *Quando $c = 0$, o produto $c \cdot f$ poderia ser indeterminado. Desta forma, adotamos a convenção $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, que contorna esta dificuldade.*

**Observação 4.0.4.** *Quando $f, g \in M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$, a soma $f+g$, definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, não está bem definida sobre os conjuntos*

$$E_1 = \{x \in \mathscr{C} : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathscr{C} : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\}.$$

*Note que $E_1, E_2 \in \sigma(\mathscr{C})$. Esta dificuldade é contornada convencionando $(f+g)(x) = 0$ para todo $x \in E_1 \cup E_2$, que resulta em uma função mensurável definida em $\mathscr{C}$.*

**Lema 4.0.3.** *Seja $(f_n)$ uma sequência em $M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x), \quad F(x) = \sup f_n(x),$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x), \quad F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

*Temos que as funções $f, F, f^*$ e $F^*$ são mensuráveis.*

***Demonstração:*** *Mostremos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^1$, os conjuntos $A = \{x \in \mathscr{C} : f(x) \geq \alpha\}$ e $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f_n(x) \geq \alpha\}$ são iguais. De fato, dado $x \in A$, temos pela definição que $inf f_n(x) = f(x) \geq \alpha$. Note que $f_n(x) \geq inf f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $x \in B$. Reciprocamente, se $x \in B$, então $f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(x) = inf f_n(x) \geq \alpha$, temos que $x \in A$.*
*Mostremos agora que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^1$, os conjuntos $C = \{x \in \mathscr{C} : F(x) > \alpha\}$ e $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathscr{C} : f_n(x) > \alpha\}$ são iguais. De fato, dado $x \in C$, temos que $sup f_n(x) = F(x) > \alpha$ e ainda, $\sup f_n(x) \geq f_n(x) > \alpha$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo $x \in D$. Reciprocamente, se $x \in D$, temos que $x \in \{x \in \mathscr{C} : f_n(x) > \alpha\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $F(x) = sup f_n(x) \geq f_n(x) > \alpha$, sabemos que $F(x) > \alpha$ e assim, $x \in C$. Em viturde de termos $f_n$ mensurável, segue que $f$ e $F$ também são. Utilizando argumentos análogos e notando que $f^*(x) = sup_{m\in\mathbb{N}} inf_{n\geq m} f_n(x)$ e $F^*(x) = inf_{m\in\mathbb{N}} sup_{n\geq m} f_n(x)$, mostramos que as funções $f^*$ e $F^*$ são mensuráveis.* ∎

**Corolário 4.0.1.** *Se $(f_n)$ é uma sequência de funções em $M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ que converge para $f$, então $f \in M(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$.*

***Demonstração:*** *Note que $f(x) = \lim f_n(x) = \liminf f_n(x)$. Como $f_n$ é mensurável, segue do Lema 4.0.3 que a função $f$ é mensurável.* ∎

**Definição 4.0.5.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n$ como o truncamento de $f$, por*

$$max\{min\{f(x), n\}, -n\} = f_n(x) = \begin{cases} f(x), \ se\ |f(x)| \leq n \\ n, \ se\ f(x) > n, \\ -n, \ se\ f(x) < -n. \end{cases}$$

**Definição 4.0.6.** *Diz-se que uma propriedade vale em quase todo ponto (q. t. p.) em* $\Omega$*, se o conjunto dos pontos em que ela não se verifica é mensurável e tem medida nula.*

**Definição 4.0.7.** $f_n$ *converge a* $f$ *quase uniformemente se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $A \in \mathscr{A}$ *tal que* $\mu(A) < \varepsilon$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* $A^c$*.*

**Definição 4.0.8.** *Se as funções* $f_n$ *e* $f$ *são finitas, diz-se que* $f_n$ *converge a* $f$ *em medida se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

***Notação.*** $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *indicará que a sequência* $f_n$ *converge em medida a* $f$*.*

**Definição 4.0.9.** $\{f_n\}$ *é dita quase uniformemente fundamental se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $A \in \mathscr{A}$*, tal que:*

*(i)* $\mu(A) < \varepsilon$*;*

*(ii) Para todo* $\delta > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que* $n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \delta$*, para todo* $\omega \in A^c$*.*

**Proposição 4.0.10.** *Se* $f_n$ *converge a* $f$ *quase uniformemente, então* $f_n \to f$ *q. t. p.*

***Demonstração:*** *Para todo* $n$ *existe* $A_n \in \mathscr{C}$*, tal que* $\mu(A_n) < 1/n$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* $A_n^c$*. Seja* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$*. Então* $\mu(A) = 0$ *e*

$$f_n(\omega) \to f(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in A^c.$$

■

**Proposição 4.0.11.** *Se* $f_n$ *converge a* $f$ *quase uniformemente, então* $f_n \xrightarrow{\mu} f$*.*

***Demonstração:*** *É necessário mostrar que para todo* $\delta > 0$*, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_0 \Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\}) < \varepsilon$*.*

*Sejam* $\varepsilon, \delta > 0$*. Então existe* $A \in \mathscr{A}$*, tal que* $\mu(A) < \varepsilon$*, e existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\omega) - f(\omega)| < \delta,$$

*para todo* $\omega \in A^c$*. Tomemos este* $n_0$*. Então*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{|f_n - f| \geq \delta\} \subseteq A \Rightarrow \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\}) \leq \mu(A) < \varepsilon.$$

■

**Definição 4.0.10.** *Diz-se que uma função f(x) é contínua em um ponto a se, dado um* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $0 < |x - a| < \delta$*, então* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$*. Ou, seja,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

# 5 Integral

*Neste capipítulo, demonstramos os resultados mais impactantes desta teoria, como o Teorema da Convergência Monótona e o Lema de Fatou. Esses teoremas estabelecem condições robustas sob as quais podemos intercambiar os operadores de limite e integral, uma propriedade crucial que confere à integral de Lebesgue sua força e ampla aplicabilidade na análise moderna.*

**Definição 5.0.1.** *Uma função $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ é simples quando seu conjunto imagem é finito. Uma função simples pode ser representada na forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{E_j}, \tag{5.1}$$

*onde $a_j \in \mathbb{R}^1$ e $I_{E_j}$ é a função característica do conjunto $E_j \in \sigma(\mathscr{C})$.*

*Entre as representações para a função simples $\varphi$, existe uma única representação com todos os $a_j$ distintos e todos os $E_j$ dois a dois disjuntos. Esta representação é chamada de representação padrão.*

*Note que se $\varphi(\mathscr{C}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distintos, e se $E_j = \{x \in \mathscr{C} : \varphi(\mathscr{C}) = a_j\}$, então os conjuntos $E_j$ são dois a dois disjuntos e $\mathscr{C} = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.*

**Exemplo 5.0.1** (Função Indicadora de um Conjunto)**.** *A função indicadora de um conjunto mensurável $E$, denotada por $I_E$, é definida como:*

$$I_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

*Essa é a função simples mais básica, pois assume apenas os valores $0$ e $1$. Podemos escreve-lá como:*

$$I_E(x) = 1 \cdot I_E(x) + 0 \cdot I_{E^c}(x).$$

*Como $0 \cdot I_{E^c}(x) = 0$, obtemos:*

$$I_E(x) = I_E(x).$$

**Exemplo 5.0.2** (Função por Partes Constantes)**.** *Seja o espaço de medida* $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}(\mathbb{R}^1), \mu)$*, onde* $\mu$ *é a medida de Lebesgue. Definimos a função* $\varphi$ *por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0,1], \\ 3, & x \in (1,2], \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

*Essa função assume apenas os valores* $0, 2$ *e* $3$*, e cada um deles está associado a um conjunto mensurável. Podemos escrevê-la como:*

$$\varphi(x) = 2I_{[0,1]}(x) + 3I_{(1,2]}(x) + 0I_{\mathbb{R}^1 \setminus [0,2]}(x).$$

*Eliminando o termo com* $0$*:*

$$\varphi(x) = 2I_{[0,1]}(x) + 3I_{(1,2]}(x).$$

**Exemplo 5.0.3** (Combinação Linear de Funções Indicadoras)**.** *Sejam* $E_1 = [0,1]$ *e* $E_2 = (1,2]$*. Definimos a função:*

$$\psi(x) = 4I_{E_1}(x) + 7I_{E_2}(x).$$

*Explicitamente, temos:*

$$\psi(x) = \begin{cases} 4, & x \in [0,1], \\ 7, & x \in (1,2], \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

*Essa função é simples porque pode ser expressa como uma soma finita de funções indicadoras multiplicadas por constantes. Podemos escrevê-la como:*

$$\psi(x) = 4I_{[0,1]}(x) + 7I_{(1,2]}(x) + 0I_{\mathbb{R}^1 \setminus [0,2]}(x).$$

*Eliminando o termo com* $0$*:*

$$\psi(x) = 4I_{[0,1]}(x) + 7I_{(1,2]}(x).$$

**Definição 5.0.2.** *Seja* $\varphi$ *uma função simples em* $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ *com a representação padrão*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{E_j}. \tag{5.2}$$

*A integral de $\varphi$ com relação à $\mu$ é um número real estendido definido por*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{5.3}$$

*A expressão anterior é empregada convencionando que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Note que o valor da integral de uma função simples, mensurável e não negativa está bem definida (embora possa ser $+\infty$), visto que todos $a_j$ são não negativos e por isso não encontramos expressões do tipo $(+\infty) - (+\infty)$.*

**Exemplo 5.0.4** (Função de Dirichlet)**.** *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0,1] \cap (\mathbb{R}^1 - \mathbb{Q}) \\ 0, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Temos que $f$ é integrável e $\int f d\mu = 1$. De fato, como $0 \cdot I_{([0,1]\cap\mathbb{Q})} + 1 \cdot I_{([0,1]\cap(\mathbb{R}^1 - \mathbb{Q}))}$ é a representação padrão para $f$, a integral de $f$ com relação à $\mu$ é dada por*

$$\int f d\mu = 0 \cdot \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 1 \cdot \mu([0,1] \cap (\mathbb{R}^1 - \mathbb{Q})).$$

*Observe que a medida de Lebesgue de um conjunto enumerável é nula (vide observação 3.0.1), daí, $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ e, como $\mu$ adimite classe fechada para soma enumerável disjunta, temos que $\mu([0,1]) = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + \mu([0,1] \cap (\mathbb{R}^1 - \mathbb{Q}))$, então,*

$$\int f d\mu = 1 \cdot \mu([0,1] \cap (\mathbb{R}^1 - \mathbb{Q})) = 1 \cdot \mu([0,1]) = 1 \cdot (1 - 0) = 1.$$

**Lema 5.0.1.** *Sejam $\varphi, \psi$ funções simples em $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ e $c \geq 0$.*

*1.*
$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu;$$

*2.*
$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu;$$

*3. Se $\lambda : \sigma(\mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}^1}$ é definida por $\lambda(E) = \int \varphi I_E d\mu$, então $\lambda$ é uma medida.*

***Demonstração:***
*1. Se $c = 0$ então $c\varphi = 0$ e assim*

$$\int c\varphi d\mu = \int 0 d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

*Quando $c > 0$, então $c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j I_{E_j}$ é a representação padrão de $c\varphi$. Daí,*

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu.$$

***2.*** *Suponha que $\varphi$ e $\psi$ sejam funções simples da forma*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{E_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j},$$

*onde $a_i, b_j \geq 0$ e $E_i, F_j \in \sigma(\mathscr{C})$. Então,*

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) I_{E_j \cap F_k}.$$

*Note que as funções simples $\varphi$ e $\psi$ são definidas sobre partições disjuntas $E_i$ e $F_j$. Para expressar $\varphi + \psi$ como uma nova função simples, precisamos de uma partição que refine ambas as partições originais. A interseção $E_i \cap F_j$ gera conjuntos disjuntos, pois $E_i$ e $F_j$ são disjuntos dentro de suas próprias partições.*

*Contudo, essa representação para $\varphi + \psi$ é uma combinação linear de funções características, não necessariamente a representação padrão para $\varphi + \psi$, pois $a_j + b_k$ podem não ser distintos.*

*Tome $c_h$, com $h = 1, 2, \ldots, p$, números distintos do conjunto $\{a_j + b_k : j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m\}$ e defina*

$$G_h = \bigcup_{(j,k)\,:\,a_j + b_k = c_h} (E_j \cap F_k).$$

*Assim, $\mu(G_h) = \sum_{(j,k)} \mu(E_j \cap F_k)$, e temos que:*

$$\mu(E_j) = \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)\right),$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k),$$

*e*

$$\sum_{h=1}^{p} c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^{p} c_h \sum_{(j,k)} \mu(E_j \cap F_k).$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{(j,k)} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k).$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k).$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k).$$

*Portanto,*

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

***3.*** *Como* $\varphi I_E = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{E_j \cap E}$*, segue que*

$$\lambda(E) = \int \varphi I_E d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int I_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E).$$

*Como* $\mu$ *é medida e* $E_j \in \sigma(\mathscr{C})$*, temos pela Proposição 3.0.1 que* $\mu_j : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}^1$ *definida por* $\mu_j(E) = \mu(E_j \cap E)$ *é medida. Podemos escrever* $\lambda$ *como combinação linear das medidas* $\mu_j$*. Daí, segue da Proposição 3.0.2 que* $\lambda$ *é medida.* ■

*Antes de definir a integral para uma função mensurável qualquer, vamos demonstrar um resultado que relaciona as funções simples com as funções mensuráveis.*

**Lema 5.0.2.** *Se* $f$ *é uma função de* $\mathscr{C}$ *em* $\mathbb{R}^1$*, então existe alguma sucessão* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funções simples tal que* $f = \lim_{n\in\mathbb{N}} g_n$*. Além disso:*

1. *Se* $f \geq 0$*, pode-se tomar* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monótona crescente e tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $g_n \geq 0$*;*
2. *Se* $f$ *for mensurável, pode-se tomar* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que cada* $g_n$ *seja mensurável.*

***Demonstração:*** *Basta demonstrar o lema no caso em que* $f \geq 0$*, pois, uma vez demonstrado isto, a validade do lema no caso geral resultará de fato que* $f = f^+ - f^-$ *e de* $f^+, f^- \geq 0$*, pois se* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forem sucessões de funções simples tais que* $f^+ = \lim_{n\in\mathbb{N}} g_n$ *e* $f^- = \lim_{n\in\mathbb{N}} g'_n$*, então* $f = \lim_{n\in\mathbb{N}}(g_n - g'_n)$*.*

*Seja então* $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1_+$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, seja*

$$F_n = \{x \in \mathscr{C} \mid f(x) \geq n\}$$

*e, para cada* $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$*, seja*

$$E_{n,k} = \left\{ x \in \mathscr{C} \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}.$$

*Define-se então* $g_n : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1_+$ *por*

$$g_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n},$$

*e resulta de definição de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se $f$ for mensurável, então cada função $g_n$ ($n \in \mathbb{N}$) também o é e que a sucessão $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente. Para se provar que $f = \lim_{n\in\mathbb{N}} g_n$, tome-se $x \in \mathscr{C}$. Se $f(x) = +\infty$, então $\forall n \in \mathbb{N}$: $g_n(x) = n$ e, portanto, $\lim_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x)$. Caso $f(x) \in \mathbb{R}^1_+$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \leq n$, tem-se que $f(x)$ pertence a um só intervalo da forma $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ e que $g_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, pelo que*

$$0 \leq f(x) - g_n(x) < \frac{1}{2^n}.$$

*Logo, $\lim_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x)$.* ■

**Definição 5.0.3.** *Seja $f \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$. A integral de $f$ com relação a $\mu$ é um número real estendido dado por*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu\right\},$$

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x)\right\}.$$

**Proposição 5.0.1.** *Sejam $f \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ e $E \in \sigma(\mathscr{C})$. Temos que $fI_E \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$. Podemos definir a integral de $f$ sobre $E$ com relação a $\mu$ por*

$$\int_E f d\mu = \int f I_E d\mu.$$

***Demonstração:*** *Pela definição da integral para funções mensuráveis e não negativas, temos que*

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in E\right\}.$$

*Por outro lado, queremos mostrar que*

$$\int f I_E d\mu = \sup\left\{\int \psi d\mu \mid \psi \text{ é simples e } 0 \leq \psi(x) \leq f(x) I_E(x) \text{ para todo } x \in \mathscr{C}\right\}.$$

*Se provamos que os dois supremos acima coincidem, a igualdade da integral estará demonstrada.*

*Seja $\varphi$ uma função simples tal que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in E$. Definimos uma nova função simples $\psi$ como:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

*Ou seja, $\psi = \varphi I_E$, que é também uma função simples. Além disso, para todo $\mathscr{C}$ :$0 \leq \psi(x) = \varphi(x) I_E(x) \leq f(x) I_E(x)$.*

*Portanto, $\psi$ pertence ao conjunto das funções simples usadas para definir $\int f I_E d\mu$, logo:*

$$\int_E f d\mu \leq \int f I_E d\mu.$$

*Agora, seja* $\psi$ *uma função simples tal que* $0 \leq \psi(x) \leq f(x)I_E(x)$ *para todo* $x \in \mathscr{C}$*. Como* $I_E(x) = 1$ *para* $x \in E$ *e* $I_E(x) = 0$ *para* $x \notin E$*, temos que* $\psi(x) = 0$ *para* $x \notin E$*, e para* $x \in E$*, temos* $\psi(x) \leq f(x)$*. Assim,* $\psi$ *pode ser vista como uma função simples* $\varphi$ *tal que* $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ *para todo* $x \in E$*, o que implica que:*

$$\int f I_E d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

*Como obtivemos as desigualdades:*

$$\int_E f d\mu \leq \int f I_E d\mu \quad e \quad \int f I_E d\mu \leq \int_E f d\mu,$$

*segue que*

$$\int_E f d\mu = \int f I_E d\mu.$$

■

**Lema 5.0.3.** *Sejam* $f, g \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$*. Se* $f \leq g$*, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

***Demonstração:***
*Como*

$$\{\varphi \in M^+ : \varphi \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x)\} \subset \{\varphi \in M^+ : \varphi \text{ é simples e } \varphi(x) \leq g(x)\},$$

*temos que*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x)\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq g(x)\right\} = \int g d\mu.$$

■

**Lema 5.0.4.** *Sejam* $f \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ *e* $E, F \in \sigma(\mathscr{C})$*. Se* $E \subset F$*, então,*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

***Demonstração:*** *Como as funções* $fI_E$ *e* $fI_F$ *são mensuráveis e não negativas e* $fI_E \leq fI_F$*, segue que*

$$\int_E f d\mu = \int f I_E d\mu \leq \int f I_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

■

*O próximo teorema é um dos principais resultados obtidos com a Integral de Lebesgue, pois exibe condições para comutar o limite com a integral.*

**Definição 5.0.4.** *Seja $\mathscr{C} = \mathbb{R}^1$ e dada $f_n : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1, f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^1$ funções mensuráveis. Considera-se convergência pontual, quando para todo $x \in \mathscr{C}$ fixado, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

**Teorema 5.0.1.** *(Teorema da Convergência Monótona) Se $(f_n)$ é um sequência monótona crescente de funções pertencentes a $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ com convergência pontual para $f$, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

***Demonstração:*** *Seja $\{f_{n,m}\}_m$ uma sucessão de funções simples $\geq 0$, tal que $f_{n,m} \to f_n$, para todo $n$. Seja*

$$g_m = \sup_{1\leq n\leq m} f_{n,m},$$

*para todo $m$. Então as $g_m$ são funções simples $\geq 0$ e a sucessão $\{g_m\}$ é crescente. Vamos mostrar que $g_m \uparrow f$. Se $1 \leq n \leq m$, temos que $f_{n,m} \leq g_m \leq f_m$, note que $f_m$ é a função onde $m > n$. Tomando o limite quando $m \to \infty$, obtemos*

$$f_n \leq \lim_m g_m \leq f.$$

*Fazendo agora $n \to \infty$,*

$$f \leq \lim_m g_m \leq f.$$

*Então, segue que*

$$\int g_m d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

*Para $1 \leq n \leq m$, temos que*

$$\int f_{n,m} d\mu \leq \int g_m d\mu \leq \int f_m d\mu.$$

*Fazendo $m \to \infty$, obtemos*

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \lim_m \int f_m d\mu.$$

*E, quando $n \to \infty$,*

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \lim_m \int f_m d\mu.$$

*Portanto, concluímos que Se $(f_n)$ é uma sequência monótona crescente de funções pertencentes a $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ com convergência pontual para $f$, então,*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

■

**Corolário 5.0.1.** *Seja $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

***Demonstração:*** *Quando $c = 0$ o resultado é imediato. Suponha $c > 0$ e tome $(\varphi_n)$ uma sequência monótona crescente de funções simples em $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ com convergência para $f$. Então $(c \cdot \varphi_n)$ é uma sequência monótona que converge para $cf$. Segue do teorema 5.0.1 e do teorema 5.0.2 que*

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int c \cdot \varphi_n d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu.$$

■

**Corolário 5.0.2.** *Sejam $f_i \in M^+$ e $i = 1, \ldots, m$, então $\sum_{i=1}^{m} f_i \in M^+$ e*

$$\int \sum_{i=1}^{m} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{m} \int f_i d\mu.$$

***Demonstração:*** *Vamos primeiramente provar o resultado para o caso em que $m = 2$. Sejam $(\varphi_n^1)$ e $(\varphi_n^2)$ sequências monótonas crescentes de funções simples que convergem respectivamente para $f_1$ e $f_2$. Como $(\varphi_n^1 + \varphi_n^2)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f_1 + f_2$, segue do teorema 5.0.2 e do teorema 5.0.1 que*

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n^1 + \varphi_n^2) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left( \int \varphi_n^1 d\mu + \int \varphi_n^2 d\mu \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^1 d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^2 d\mu$$

$$= \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

*Agora, suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para um certo $k$, ou seja,*

$$\int (f_1 + \cdots + f_k) d\mu = \int f_1 d\mu + \cdots + \int f_k d\mu.$$

*Segue então, pelo que provamos para $m = 2$ e pela hipótese de indução, que*

$$\int (f_1 + \cdots + f_k + f_{k+1}) d\mu = \int (f_1 + \cdots + f_k) d\mu + \int f_{k+1} d\mu.$$

*Por indução, temos que*

$$\int (f_1 + \cdots + f_k + f_{k+1}) d\mu = \int [(f_1 + \cdots + f_k) + f_{k+1}] d\mu$$

$$= \int (f_1 + \cdots + f_k) d\mu + \int f_{k+1} d\mu$$

$$= \int f_1 d\mu + \cdots + \int f_k d\mu + \int f_{k+1} d\mu.$$

■

*O próximo resultado é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona e permite que trabalhemos com sequências de funções que não são monótonas.*

**Lema 5.0.5.** *(Lema de Fatou) Seja $(f_n)$ uma sequência de funções pertencentes a $M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$ com convergência pontual para $f$, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

***Demonstração:*** *Tome $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$ de modo que $g_m \leq f_n$ quando $m \leq n$. Assim,*

$$\int g_m d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int f_n d\mu$$

$$\leq \sup_m \inf_{n \geq m} \int f_n d\mu = \liminf \int f_n d\mu.$$

*Como $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$ e $g_{m+1} = \inf\{f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\}$, temos que $g_m(x) \leq g_{m+1}(x)$, ou seja, $(g_m)$ é crescente. Note que*

$$\lim_{m \to \infty} g_m(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} g_m(x) = \sup_m \inf_{n \geq m} f_n(x) = \liminf f_n(x).$$

*Assim, utilizando o teorema 5.0.1, obtemos*

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim_{m \to \infty} \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

■

**Corolário 5.0.3.** *Seja $f \in M^+(\mathscr{C}, \sigma(\mathscr{C}))$. Se $\lambda : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}^1$ é definida por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu,$$

*então $\lambda$ é uma medida.*

***Demonstração:*** *Provemos que $\lambda$ é medida. Como $I_\emptyset(x) = 0$ para todo $x \in \mathscr{C}$, temos que $\lambda(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int_X f I_\emptyset d\mu = 0$. Se $E \in \sigma(\mathscr{C})$, então*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f I_E d\mu \geq 0,$$

*pois $I_E(x) = 1$ para todo $x \in E$ e $f$ é não negativa. Seja $(E_n)$ uma sequência de conjuntos em $\sigma(\mathscr{C})$, dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$. Defina $f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f I_{E_k}$. Note que, para todo $x \in X$,*

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x) I_{E_k} = f I_{E_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} f I_{E_k},$$

*em que $f I_{E_{n+1}} \geq 0$. Logo, $(f_n)$ é monótona crescente e, como é soma de mensuráveis, é mensurável. Note ainda que $(f_n)$ converge para $f I_E$. Daí, segue pelo teorema 5.0.1 que*

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int_E f d\mu = \int f I_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f I_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f I_{E_k} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).\end{aligned}$$

■

**Corolário 5.0.4.** *Seja $f \in M^+$. Temos que $f(x) = 0$ q.t.p. em $\mathscr{C}$ se, e somente se, $\int f d\mu = 0$.*

***Demonstração:*** *Suponha $f(x) = 0$ q.t.p. e tome $E = \{x \in x\!: f(x) > 0\}$ e $f_n = nI_E$. Temos que $f \leq \liminf f_n$ e $\mu(E) = 0$. Daí,*

$$0 < \int f d\mu \leq \int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

$$= \liminf n \int I_E d\mu = \liminf n\mu(E) = 0.$$

*Reciprocamente, suponha que $\int f d\mu = 0$. Tome $E_n = \{x \in x\!: f(x) > \frac{1}{n}\}$. Então $f \geq \left(\frac{1}{n}\right) I_{E_n}$, e daí*

$$\int f d\mu \geq \int \frac{1}{n} I_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n).$$

*Note que $0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$ e portanto $\mu(E_n) = 0$. Como $0 \leq \mu(A) = \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0$, e $A = \{x \in x\!: f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, concluímos que $A$ tem medida nula. Logo, $f(x) = 0$ q.t.p.* ■

**Corolário 5.0.5.** *Suponha que $f \in M^+$ e defina $\lambda : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}^1$ por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

*Então a medida $\lambda$ é absolutamente contínua com relação a $\mu$, ou seja, se $E \in \sigma(\mathscr{C})$ e $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$.*

***Demonstração:*** *Se $\mu(E) = 0$, para algum $E \in \sigma(\mathscr{C})$, então $fI_E = 0$ q.t.p. Daí,*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int fI_E d\mu = 0.$$

■

**Corolário 5.0.6.** *Se $(f_n)$ é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+$ com convergência q.t.p. para $f \in M^+$, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

***Demonstração:*** *Tome $N \in \sigma(\mathscr{C})$ tal que $\mu(N) = 0$ e $(f_n)$ converge para $f(x)$ para todo $x \in M = \mathscr{C} - N$. Então $(f_n I_n)$ converge para $fI_n$ para todo $x \in \mathscr{C}$. Logo, pelo teorema 5.0.1, segue que*

$$\int fI_N d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n I_N.$$

*Como $\mu(N) = 0$, as funções $fI_N$ e $f_nI_N$ são nulas em quase todo ponto.*

*Note que quando $N$ e $M$ pertencem a $\sigma(\mathscr{C})$ tais que $N \cap M = \emptyset$ e $N \cup M = \mathscr{C}$. Logo, $I_{\mathscr{C}}(x) = I_N(x) + I_M(x)$ e segue do Corolário 5.0.4 que*

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)I_(x) = f(x)(I_N(x) + I_M(x)).$$

*Como $f = fI_M + fI_N$ e $f_n = f_nI_N + f_nI_M$, temos*

$$\int f d\mu = \int fI_M d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n I_M d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

■

**Corolário 5.0.7.** *Se $(g_n)$ é uma sequência em $M^+$, então*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int g_n d\mu \right).$$

***Demonstração:*** *Defina $f_m = \sum_{n=1}^{m} g_n = g_1 + \cdots + g_m$. Como $g_n \in M^+$, temos que $f_m \le f_{m+1}$ e ainda, como $f_m$ é soma de mensuráveis não negativas, temos que $f_m \in M^+$. Visto que*

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

*temos*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int f_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int g_n d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

■

**Observação 5.0.1.** *Seja $f$ é uma funçaõ contínua. Então pelo teorema 5.0.2, existe alguma sucessão de funções simples $(s_n)$ mesuráveis e $s_n \to f$.*

*Nesta finalização, estabelecemos a conexão fundamental entre as teorias de integração de Riemann e de Lebesgue, demonstrando que esta última constitui uma generalização da primeira no caso de uma função contínua. O objetivo central é provar que toda função contínua que é integrável no sentido de Riemann em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, como é o caso das funções contínuas, também é integrável no sentido de Lebesgue.*

*Fundamentalmente, mostraremos que para essa classe de funções, os valores numéricos obtidos por ambas as integrais são precisamente os mesmos. Ou seja, se $f$ é uma função contínua em $[a, b]$, então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (\textit{Integral de Riemann}) \quad = \quad \int_{[a,b]} f\,d\mu \quad (\textit{Integral de Lebesgue})$$

*Isso confirma que a teoria da integral de Lebesgue não apenas abrange os casos clássicos cobertos pela integral de Riemann, mas também a estende de forma consistente para uma classe muito mais ampla de funções, solidificando sua importância e poder na análise matemática moderna.*

*Sendo assim, tome $f$ é uma função contínua. Então pelo lema 5.0.2, existe alguma sucessão de funções simples $(s_n)$ mesuráveis e $s_n \to f$. Seja $s_n = \sum\limits_{K=1}^{n} r_i I_E$. Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ tomando a medida de Borel temos que,*

$$\int s_n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i (b_i - a_i) = \int_a^b s_n(x) dx.$$

*Onde $E_i = [a_i, b_i]$. Ou seja, se temos funções simples as integrais coincidem. Mas, verifiquemos o que acontece com o seguinte limite,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n d\mu = \lim \int_a^b s_n(x) dx$$

**Observação 5.0.2.** *Como f é contínua, podemos mostrar que $s_n$ converge uniformemente para $f$ em $[a, b]$*

*Sendo assim, observemos o seguinte resultado, o qual iremos apenas enunciar e sua demonstração pode ser encontrada em [4]*

**Teorema 5.0.2.** *Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$, então $f$ é integrável e vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

*Em resumo:*

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n, \quad \textit{desde que } \lim f_n \textit{seja uniforme.}$$

*Como $s_n$ é uma sucesão de funções simples temos pelo teorema convergência monótona que*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} s_n d\lambda = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda.$$

*Por outro lado, temos que $(s_n)$ é definida em um intervalo fechado e converge monotonamente para f no que implica pela observação anterior que $S_n$ é uniforme, sendo assim, pelo teorema 5.0.2,*

$$\lim \int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

*Logo,*

$$\int\limits_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

*Portanto, podemos concluir que para funções contínuas a integral de Lebesgue também abrange integração por Riemman.*

# 6 Considerações Finais

*Com o estudo introdutório de medida e intregação exploramos a relação entre as integrais de Riemann e Lebesgue, analisando suas diferenças e conexões. Observamos que existem funções que não são integráveis no sentido de Riemann, mas que podem ser integradas pela abordagem de Lebesgue. Além disso, demonstramos que toda função integrável no sentido de Riemann também o é no sentido de Lebesgue, preservando o mesmo valor da integral, o que nos mostrar que a integral de Lebesgue generaliza a integral de Riemann.*

*A partir dessa ampliação do conceito de integral, foi possível expandir as possibilidades de estudo para funções que antes não podiam ser analisadas sob a ótica da integração de Riemann. Essa nova abordagem abre caminhos para a investigação de espaços de funções que não são Riemann-integráveis, permitindo o desenvolvimento de novos conceitos e aplicações.*

*Outro aspecto relevante identificado ao longo do estudo foi a semelhança entre certas propriedades das medidas definidas por Lebesgue e os conceitos presentes na integral de Riemann, ainda que os processos de integração sejam fundamentalmente distintos. Isso demonstra como a integral de Lebesgue complementa a integral de Riemann, oferecendo um panorama mais abrangente da teoria da integração.*

*Por fim, ressaltamos a importância do questionamento proposto por Lebesgue, que, mesmo após a consolidação da integral de Riemann, levantou novos problemas e reflexões que resultaram em contribuições significativas para a comunidade científica. O desenvolvimento da teoria da medida e da integral de Lebesgue não apenas aprimorou a análise matemática, mas também influenciou diversos campos do conhecimento, consolidando-se como um marco fundamental na evolução da matemática moderna.*

# Referências

*1 CANCELIER, Gustavo. Uma Introdução à Teoria da Medida e Integração. 2019. 82 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, 2019.*

*2 FERNANDEZ, Pedro Jesus. Medida e Integração. 2ª.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.*

*3 JÚNIOR, Augusto Armando de Castro. Curso de Teoria da Medida. 3ª.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.*

*4 LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.*

*5 OLIVEIRA, Maria João. Medidas e integração: Um Curso Introdutório. Lisboa: Universidade Aberta, 2020.*

*6 SANTOS, José Carlos de Souza Oliveira. Introdução à Análise Funcional. Porto: Universidade do Porto, 2010.*