



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Renan Velozo Herculino de Melo

Controle de um pêndulo invertido

Cabo de Santo Agostinho – PE

2025

Renan Velozo Herculino de Melo

Controle de um pêndulo invertido

Monografia apresentada ao curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, Universidade Rural de Pernambuco, como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Reinel Beltrán Aguedo

Cabo de Santo Agostinho – PE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

M528c Melo, Renan Velozo Herculino de.
Controle de um pêndulo invertido / Renan Velozo
Herculino de Melo. - Cabo de Santo Agostinho,
2025.
106 f.; il.

Orientador(a): Reinel Beltrán Aguedo.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Unidade Acadêmica Cabo de Santo Agostinho -
UACSA, Bacharelado em Engenharia Elétrica, Cabo
de Santo Agostinho, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Foucault, Pêndulo de. 2. UML (Computação).
3. SIMULINK (Programa de computador). 4.
Motores elétricos de corrente contínua 5. MATLAB
(Programa de computador). I. Aguedo, Reinel
Beltrán, orient. II. Título

CDD 621.3

RENAN VELOZO HERCULINO DE MELO

Controle de um pêndulo invertido

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 12/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Reinel Beltrán Aguedo

UACSA-UFRPE

Dra. Ania Lussón Cervantes

UACSA-UFRPE

Dr. João Gutemberg Barbosa de Farias Filho

UACSA-UFRPE

RESUMO

Este estudo examina a investigação e a aplicação de métodos de controle voltados para alcançar a estabilização de um sistema de pêndulo invertido em uma base móvel. O texto explora a modelagem matemática do sistema por meio de uma abordagem que se vale da formulação advinda das Leis de Newton, além de abordar sua representação tanto em variáveis de estado quanto em função de transferência. Esta pesquisa explora duas estratégias de controle: o clássico controlador PID (proporcional - integral - derivativo) e suas duas variantes, PI-D e I-PD, e o controlador realimentado por estado observado. As simulações são executadas no Matlab/Simulink, o que permite a validação da modelagem e das estratégias de controle. A eficácia das estratégias de controle é avaliada por meio de duas abordagens complementares: índices integrais de erro (ISE, IAE, ITSE e ITAE) e parâmetros da resposta temporal, como tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro em regime permanente.

Palavras-chave: pêndulo invertido; modelagem matemática; PID; motor de corrente contínua; Matlab/Simulink; estabilidade; critérios integrais de erro; análise temporal.

ABSTRACT

This study examines the investigation and application of control methods aimed at achieving the stabilization of an inverted pendulum system on a moving base. The text explores the mathematical modeling of the system through an approach that makes use of the formulation derived from Newton's Laws, in addition to addressing its representation in both state variables and transfer functions. This research explores two control strategies: the classic PID (proportional - integral - derivative) controller and its two variants, PI-D and I-PD, and the feedback controller by observed state. The simulations are carried out in Matlab/Simulink, which allows the modeling and control strategies to be validated. The effectiveness of the control strategies is evaluated using two complementary approaches: integral error indices (ISE, IAE, ITSE, and ITAE) and time response parameters such as rise time, settling time, overshoot, and steady-state error.

Keywords: inverted pendulum; mathematical modeling; PID; DC motor; Matlab/Simulink; stability; integral error criteria; time analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Sistema em malha fechada.....	18
Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema representado no espaço de estados.....	24
Figura 3 - Sistema com controle PID	25
Figura 4 - Sistema com controle PI-D.	29
Figura 5 - Sistema com controle I-PD.....	30
Figura 6 - Sistema com controle via alocação de polos	34
Figura 7 - Sistema de controle realimentado por estado observado.	39
Figura 8 - Sistema com um controlador-observador	41
Figura 9 - Diagrama de blocos ISE.	43
Figura 10 - Diagrama de blocos IAE.....	44
Figura 11 - Diagrama de blocos ITSE.	44
Figura 12 - Diagrama de blocos ITAE.	45
Figura 13 - Diagrama do pêndulo invertido com base móvel.	47
Figura 14 - Diagrama elétrico simplificado de um motor de corrente contínua.....	54
Figura 15 - Diagrama de bloco do sistema de controle do θ	62
Figura 16 - Equações 3.5 e 4.7 projetadas no Simulink	63
Figura 17 - Efeito de um pequeno impulso no carro.	64
Figura 18 - Efeito de um pequeno impulso na haste do pêndulo.	65
Figura 19 - Efeito da condição inicial de $\theta = 5^\circ$ no carro.	66
Figura 20 - Efeito da condição inicial de $\theta = 5^\circ$ na haste do pêndulo.	66
Figura 21 - Diagrama PID	70
Figura 22 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.2.....	72
Figura 23 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.4.....	72
Figura 24 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.4 e 5.14.....	73
Figura 25 - Diagrama de blocos do sistema com controle PID.....	74
Figura 26 - Sinal de distúrbio no torque do motor.	75
Figura 27 - Sinal de distúrbio na haste do pêndulo.	75
Figura 28 - Sinal de ruído.	76
Figura 29 - Primeiro cenário de simulação PID.	77
Figura 30 - Segundo cenário de simulação PID.	78
Figura 31 - Terceiro cenário de simulação PID.....	80
Figura 32 - Diagrama de blocos PI-D Simulink.....	82

Figura 33 - Primeiro cenário de simulação PI-D.....	82
Figura 34 - Segundo cenário de simulação PI-D.....	84
Figura 35 - Terceiro cenário de simulação PI-D.	85
Figura 36 - Diagrama de blocos I-PD Simulink.....	86
Figura 37 - Primeiro cenário de simulação I-PD.....	87
Figura 38 - Segundo cenário de simulação I-PD.....	88
Figura 39 - Terceiro cenário de simulação I-PD.	90
Figura 40 - Diagrama de blocos controle realimentação de estados Simulink.....	94
Figura 41 - Bloco do controle por realimentação de estados.	95
Figura 42 - Bloco do sistema motor e pêndulo.....	96
Figura 43 - Bloco do Observador de Estados.....	96
Figura 44 - Teste Observador de Estados.....	97
Figura 45 - Primeiro cenário de simulação controle por realimentação de estados.	98
Figura 46 - Segundo cenário de simulação controle por realimentação de estados.	100
Figura 47 - Terceiro cenário adaptado de simulação controle por realimentação de estados.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valor das constantes do pêndulo invertido.	60
Tabela 2 - Valor das constantes do motor elétrico de corrente contínua.....	61
Tabela 3 - Resultado primeiro cenário de simulações.....	103
Tabela 4 - Resultado segundo cenário de simulações.....	104
Tabela 5 - Resultado terceiro cenário de simulações.....	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO TEÓRICA.....	15
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE CONTROLE.....	15
2.2	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA.....	16
2.3	MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS.....	20
2.3.1	Equações no espaço de estado	21
2.4	CONTROLADOR PID E SUAS VARIANTES	24
2.5	PROJETO DE SISTEMAS REGULADORES COM OBSERVADORES	30
2.5.1	Observador de estados	36
2.6	MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DOS CONTROLADORES.....	42
2.6.1	Índices integrais do erro	42
2.6.2	Parâmetros da resposta temporal	45
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	47
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNULO INVERTIDO.....	47
3.1.1	Representação em Função de Transferência	50
3.1.2	Representação em Espaço de Estados	50
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR ELÉTRICO DE CORRENTE CONTÍNUA.....	52
3.3	MODELAGEM MATEMÁTICA DO CONJUNTO MOTOR E PÊNULO.....	56
4	CASO DE ESTUDO	60
4.1	PARÂMETROS PÊNULO E MOTOR.....	60
4.2	O MODELO MOTOR E PÊNULO.....	61
4.2.1	Validação operacional do modelo	63
5	SISTEMA CONTROLADO	67
5.1	ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO	67
5.2	PROJETO DO CONTROLADOR PID.....	68
5.3	GRÁFICO DO LUGAR DAS RAÍZES	71
5.3.1	Simulação PID.....	74
5.3.2	Simulação PI-D	81
5.3.3	Simulação I-PD	86
5.4	PROJETO DO CONTROLADOR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	91
5.4.1	Simulação controle realimentação de estados	93

6 ANÁLISE DE DESEMPENHO PID, PI-D, I-PD E REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS.....	103
7 CONCLUSÃO	106
REFERÊNCIAS.....	107
ANEXO A - CÓDIGO MATLAB PARA PROJETO PID	109
ANEXO B - CÓDIGO MATLAB PARA PROJETO REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	111

1 INTRODUÇÃO

A engenharia de controle desempenha um papel crucial no avanço de sistemas projetados para assegurar tanto a estabilidade quanto a operação eficiente de uma ampla gama de processos dinâmicos. Inserido neste contexto, o pêndulo invertido emerge como um dos sistemas mais amplamente aplicados em pesquisas sobre controle, em razão de sua intrínseca instabilidade e caracteristicamente alta não linearidade. Este sistema serve como um alicerce para a elaboração de algoritmos de controle inovadores. Ele encontra aplicações diretas em várias disciplinas, incluindo a robótica, a automação e os sistemas de transporte autônomo.

Existem alguns trabalhos que estudaram a modelagem e controle do pêndulo invertido. Por exemplo, em Tabora (2014) estuda várias configurações de controlador para realizar uma análise comparativa de desempenho no sistema de pêndulo invertido. Primeiramente, é realizada a modelagem matemática do sistema usando duas abordagens diferentes: modelo linearizado em torno de um ponto operacional específico e explora duas estratégias de controle linear contemporâneas com base nas técnicas de Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI) e Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR). A segunda abordagem usa um modelo não linear do sistema e aplica a técnica de controle não linear SMC. Por fim, é realizada uma avaliação de desempenho de cada controlador em relação aos objetivos do projeto.

Já em Fernandes (2015) tem-se um estudo teórico sobre a análise e o controle do sistema de pêndulo invertido, de modo que o controle é feito pelo controlador PID, sendo o critério de estabilidade de Routh empregado para determinar o ganho crítico, conforme estabelecido pela regra de sintonia de Ziegler-Nichols. Além disso, no âmbito de controle moderno, utiliza-se o controlador LQR.

Gadelha (2018) estuda o modelo linear e não linear do pêndulo invertido, aplicando a modelagem em espaço de estados e o método de alocação de polos no modelo linear. A topologia de controle Fuzzy foi aplicada e simulações foram obtidas via Matlab. O trabalho de Moreira *et al.* (2021) teve como objetivo o projeto de um controlador PID para estabilizar o pêndulo invertido em sua posição vertical, que é considerada uma zona de equilíbrio instável. Além disso, o software Matlab foi utilizado para obter as funções de transferência, enquanto o Simulink foi utilizado para integrar o sistema (pêndulo e controlador) e submetê-lo a distúrbios, objetivando a demonstração da eficácia do controlador na manutenção da posição vertical do pêndulo.

A obra de Silva e Gonçalves (2021) modela e simula um sistema de controle a fim de avaliar o desempenho do sistema de pêndulo invertido quando existem falhas de comunicação (ruídos). Em primeiro momento, a modelagem matemática do sistema é mostrada, levando em conta a linearização para pequenas variações em volta de um ponto operacional (o ângulo formado entre a haste do pêndulo e o eixo y). Em seguida, as funções de transferência são determinadas. Feito isso, calcula-se os ganhos dos controladores PD (Proporcional Derivativo), que controlam a posição do carrinho, e dos controladores PID, que controlam o ângulo da haste. Finalmente, a simulação do sistema realimentado pelos controladores é realizada no Matlab.

Em Emilia (2023) é mostrada a relevância e importância de aulas práticas em disciplinas que abordam o controle de sistemas dinâmicos e não lineares. Neste trabalho, foi projetado e analisado o método de controle PID, LQR e Fuzzy aplicados à estabilização e controle de um sistema pêndulo invertido sobre uma base móvel. Com isso, os resultados de cada controlador foram obtidos via simulações no Matlab e Python objetivando-se a demonstração prática das teorias estudadas em sala de aula.

Como última inspiração principal, destaca-se o trabalho de Pires (2023), que contempla o controle de um sistema de pêndulo invertido através do uso de um controlador PID e de um controlador baseado em realimentação de estados. Este estudo engloba tanto a modelagem matemática do sistema quanto a concepção detalhada do controlador. Para comprovar a eficácia dos resultados obtidos, são realizados testes em um ambiente computacional, utilizando simulações no Simulink/MatLab. Os resultados dessas simulações indicam que os controladores PID e de alocação de polos por realimentação de estados satisfazem os critérios de desempenho exigidos para esse tipo de sistema. No entanto, é importante notar que o controlador baseado em realimentação de estados oferece uma ação de controle que é adequada para aplicação em cenários práticos reais.

O tema principal explorado neste estudo refere-se ao complexo desafio de manter a haste do pêndulo invertido na sua posição vertical, uma tarefa que demanda a utilização de técnicas de controle robustas e meticulosamente ajustadas. Na ausência de um controle apropriado, o sistema é incapaz de conservar o equilíbrio, resultando em uma rápida perda de estabilidade. Consequentemente, a identificação de estratégias eficazes para o controle deste sistema torna-se imperativa, especialmente para aplicações práticas como o desenvolvimento de robôs bípedes, automóveis autônomos e mecanismos de estabilização.

Tendo em vista o seu uso extensivo como um modelo acadêmico de referência, bem como sua complexidade inerente e dinâmica, o estudo do pêndulo invertido desempenha um papel crucial não apenas no desenvolvimento avançado de técnicas de controle, mas também

na educação e capacitação de futuros engenheiros e pesquisadores especializados em sistemas dinâmicos. Ademais, a análise comparativa de diferentes metodologias de controle pode oferecer insights significativos que são cruciais para o progresso de controladores com maior eficiência e adaptabilidade. Assim, a presente investigação é justificada pela sua relevância substancial para a engenharia de controle, os desafios técnicos complexos que ela apresenta e sua aplicabilidade prática e versátil em múltiplos setores industriais.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é analisar o desempenho de controladores clássicos e modernos num sistema do tipo pêndulo invertido. Com o intuito de atingir essa meta, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Descrever o modelo matemático do pêndulo invertido como caso de estudo;
- Projetar algoritmos de controle, incluindo clássicos e modernos;
- Avaliar, via simulação, o comportamento dos algoritmos de controle em diferentes cenários, usando índices de desempenho baseados na integral do erro e na resposta temporal.

Desta forma, a metodologia adotada é de natureza descritiva e quantitativa, visando a comparação entre o desempenho de algoritmos de controle aplicados a um sistema de pêndulo invertido. Assim, primeiramente será realizada uma revisão da literatura científica, que trate de estudos de caso sobre a modelagem e controle de sistemas do tipo pêndulo invertido. Ato seguido, será selecionado um pêndulo específico como caso de estudo, ao qual será desenvolvido um modelo matemático do comportamento dinâmico. Depois, serão escolhidas e projetadas estratégias de controle clássicas e modernas, objetivando-se que a haste do pêndulo se mantenha estável verticalmente. Por fim, o sistema controlado será simulado no software Simulink/Matlab, onde o desempenho de cada controlador será analisado e comparado com base em critérios integrais do erro e na resposta temporal.

Assim, o trabalho está subdividido em cinco capítulos. No capítulo inicial, é oferecida uma introdução que contextualiza o problema em análise, explicita os principais objetivos da pesquisa e fornece uma justificativa para a execução do estudo. O segundo capítulo está dedicado à revisão teórica, onde se exploram conceitos essenciais e se detalham as bases para a modelagem do pêndulo invertido usando as leis de Newton, tratam-se os algoritmos de controle desde um ponto de vista teórico e, por último, se expõem as ideias fundamentais relacionadas às métricas usadas para medir a sua eficácia. No terceiro capítulo, são detalhados os materiais e métodos adotados, elucidando a abordagem metodológica utilizada, incluindo a descrição de modelos matemáticos, experimentos conduzidos ou simulações empreendidas. O capítulo subsequente, o quarto, revela os achados do estudo, proporcionando uma discussão

aprofundada onde os dados coletados são analisados criticamente e postos em relação com referências previamente estabelecidas na literatura. Por fim, o quinto capítulo apresenta-se com as conclusões e considerações finais, onde são realçadas as contribuições significativas que o trabalho oferece e se propõem recomendações e sugestões para investigações futuras neste domínio científico.

2 REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão dos fundamentos teóricos que constituem a espinha dorsal para o avanço deste estudo. Inicialmente, aborda-se a modelagem matemática de sistemas dinâmicos por meio de funções de transferência e pela formulação em espaço de estados. Em seguida, são tratadas as técnicas de controle como PID e suas variantes PI-D e I-PD, e o projeto de sistemas reguladores com observadores. Finalmente, são dadas as métricas para avaliar o desempenho do sistema de controle, como as especificações da resposta transitória e os índices de desempenho baseados na integral do erro.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE CONTROLE

Conforme Ogata (2010) a modelagem matemática de um sistema é realizada por meio de um conjunto de equações que descrevem a dinâmica do sistema de forma precisa. É importante ressaltar que um modelo matemático não é exclusivo, sendo possível obter vários modelos para um único sistema dinâmico. Desse modo, um único sistema pode ser modelado por meio de abordagens diferentes, resultando em múltiplos modelos a depender da perspectiva adotada. Dito isso, a seleção de um modelo matemático apropriado depende tanto do sistema em análise quanto das condições específicas daquele contexto. Em casos de problemas associados ao controle ótimo, a escolha de representações através do espaço de estados costuma ser particularmente benéfica. No entanto, quando o foco está na análise da resposta transitória ou da resposta no domínio da frequência de sistemas que são lineares, invariantes no tempo, com uma única entrada e uma única saída, as representações através de funções de transferência frequentemente oferecem maior praticidade e eficiência.

Conforme relatado por Cortés (2020), o modelo dinâmico do sistema permite o entendimento dos fenômenos físicos que são próprios ou inerentes à natureza do sistema. A mecânica analítica se destaca como uma ferramenta sólida nas ciências para desenvolver modelos matemáticos de sistemas mecânicos. Nesse contexto, a dinâmica é a área da física que examina a relação entre as forças aplicadas a um corpo e o movimento resultante.

Na visão de Ogata (2010), a elaboração de um modelo matemático requer um equilíbrio cuidadoso entre a simplicidade do próprio modelo e a exatidão dos resultados da análise subsequente. Quando se chega ao ponto de deduzir um modelo matemático que é, por necessidade, relativamente simplificado, é frequente que seja imperativo desconsiderar certas propriedades físicas inerentes ao sistema em estudo. Em especial, ao se utilizar Equações

Diferenciais Ordinárias (EDO), surge sempre a necessidade de negligenciar determinadas não linearidades, bem como ignorar os parâmetros distribuídos que podem efetivamente existir no sistema físico em consideração. Caso os impactos das propriedades desconsideradas sobre a resposta sejam de magnitude reduzida, há a possibilidade de que ocorra uma aproximação satisfatória entre os resultados decorrentes da análise de um modelo matemático e aqueles derivados do estudo experimental do sistema físico em questão.

Conforme definido por Ogata (2010), um sistema é classificado como linear quando satisfaz o princípio da superposição. Este importante princípio científico postula que, quando duas funções de excitação distintas são aplicadas simultaneamente a um sistema, a resposta gerada é igual à soma das respostas individuais que seriam causadas por cada função de excitação atuando isoladamente no sistema. Portanto, em um sistema linear com múltiplas entradas, a resposta global pode ser determinada avaliando uma entrada por vez e somando sucessivamente cada uma das respostas obtidas individualmente.

Como estabelecido por Ogata (2010), um sistema pode ser classificado em duas categorias distintas: Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI) e Sistemas Lineares Variantes no Tempo (LTV). Quando se analisa tal sistema por meio de uma equação diferencial, a linearidade é garantida se os coeficientes são ou constantes ou dependem unicamente da variável independente. Nos casos em que os sistemas dinâmicos são compostos por componentes que possuem parâmetros lineares concentrados e invariantes ao longo do tempo, esses sistemas podem ser descritos matematicamente por equações diferenciais lineares que também são invariantes no tempo, implicando em coeficientes constantes. Este tipo de configuração de sistema é conhecido sob a designação de LTI. Por outro lado, quando as equações diferenciais que representam os sistemas apresentam coeficientes que variam com o tempo, esses sistemas são identificados como LTV.

2.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Conforme detalhado por Ogata (2010), as funções de transferência encontram ampla aplicação na representação das relações entre as variáveis de entrada e saída de componentes ou sistemas modeláveis através de equações diferenciais lineares invariantes no tempo. Conseqüentemente, a função de transferência de um sistema descrito por uma equação diferencial linear que não varia ao longo do tempo é caracterizada pela proporção entre a transformada de Laplace correspondente à resposta do sistema e a transformada de Laplace associada à entrada. Esta caracterização presume que todas as condições iniciais sejam

consideradas iguais a zero. Como título ilustrativo, pode-se analisar um LTI descrito pela Equação 2.1.

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0x^{(m)} + b_1x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1}\dot{x} + b_mx \quad (n \geq m) \quad (2.1)$$

Dado que a resposta do sistema é representada por y e x designa a entrada, a função de transferência deste sistema é definida como a proporção entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, assumindo que todas as condições iniciais do sistema são nulas. Esta relação é expressa pela Equação 2.2.

$$\frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.2)$$

Caso a potência máxima de s presente no denominador da função de transferência especificada na Equação 2.2 seja igual a n , então tal sistema pode ser classificado como um sistema de ordem n , uma vez que essa potência determina a ordem global do sistema dinâmico em consideração.

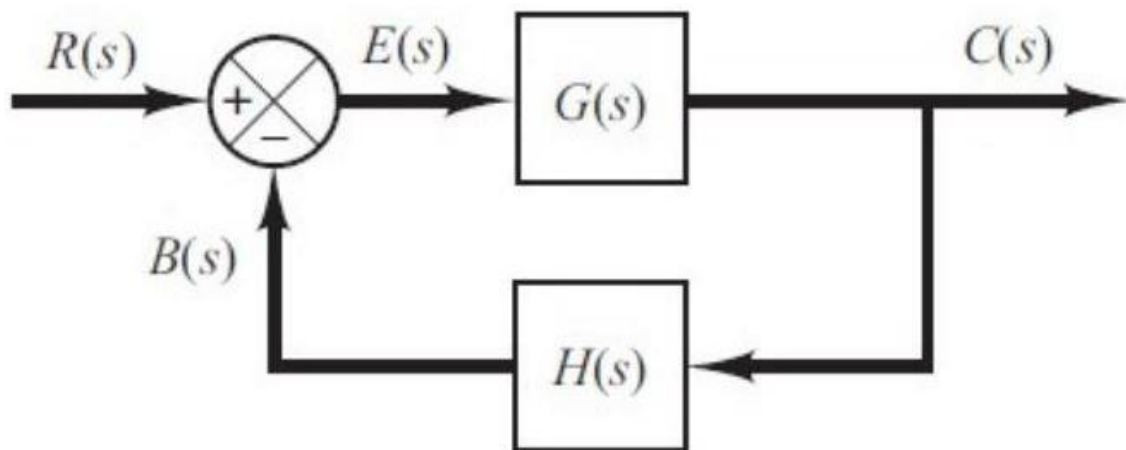
É imperativo exercer uma vigilância especial quando utiliza-se a representação por meio da função de transferência. Ogata (2010) esclarece que o conceito por trás da função de transferência se restringe a sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares que não variam com o tempo. Contudo, é importante destacar que o método da função de transferência possui ampla aceitação e aplicação na análise detalhada e no desenho metódico desses sistemas específicos, uma vez que a função de transferência caracteriza-se como uma propriedade intrínseca do sistema, sendo independente tanto da amplitude quanto da forma específica da entrada ou função de excitação aplicada ao sistema.

Ogata (2010) afirma que a função de transferência de um sistema é incapaz de fornecer qualquer detalhe sobre a estrutura física intrínseca do sistema. Portanto, é possível que sistemas fisicamente distintos compartilhem funções de transferência idênticas. Quando a função de transferência de um sistema é estabelecida, a análise da saída ou da resposta do sistema em relação a diferentes formas de entrada se torna viável. Nos casos em que a função de transferência não é previamente conhecida, é viável determiná-la através de experimentação, utilizando entradas conhecidas e analisando as respostas correspondentes do sistema. Após sua

determinação, a função de transferência oferece uma descrição abrangente das características dinâmicas do sistema, sem depender de uma descrição física específica.

Conforme ilustrado na Figura 1, a função de transferência pode ser representada utilizando um diagrama de blocos. Segundo Ogata (2010), esse tipo de diagrama constitui uma representação gráfica que descreve as funções executadas por cada componente de um sistema, além de ilustrar o fluxo de sinais entre eles. Enquanto a representação matemática tradicional é bastante abstrata, o diagrama de blocos oferece a vantagem de trazer uma visão mais concreta do fluxo de sinais no sistema real, proporcionando uma visualização mais próxima das interações reais que ocorrem entre os componentes distintos.

Figura 1 - Sistema em malha fechada



Fonte: Ogata, 2010.

Como se mostra na Figura 1, cada variável dentro do sistema está interconectada. O bloco serve como representação simbólica de uma operação matemática específica aplicada sobre o sinal que ingressa no bloco, o que resulta na geração de um sinal na saída do bloco, esclarecendo assim a interligação e transformação das variáveis no sistema.

A utilização de diagramas de blocos para representar sistemas é amplamente eficaz devido à facilidade com que se pode construir essas representações. Isso é feito através da simples interconexão dos blocos componentes, conforme o direcionamento dos sinais, possibilitando a análise da contribuição de cada componente específico no desempenho geral do sistema. Tal análise permite que a operação funcional do sistema seja visualizada mais diretamente e com maior clareza por meio do diagrama de blocos do que por meio de um exame direto do sistema físico em si. Ademais, enquanto um diagrama de blocos proporciona uma compreensão do comportamento dinâmico do sistema, ele não fornece detalhes sobre sua

estrutura física. Este fato implica que múltiplos sistemas, embora possam não ser visual ou funcionalmente semelhantes e que não possuam inter-relações diretas, podem ainda assim ser representados por um mesmo diagrama de blocos.

Através de uma análise detalhada da Figura 1, observa-se a presença de um conjunto de três sinais distintos, designados como $R(s)$, $E(s)$, $C(s)$, além de $B(s)$. O primeiro, $R(s)$, é identificado como o sinal de referência de entrada do sistema, enquanto o segundo, $C(s)$, representa a saída que se origina da função de transferência $G(s)$. Além disso, $B(s)$ caracteriza-se como o sinal de realimentação no sistema. Por último, $E(s)$ é definido como o sinal que indica o erro em ação no sistema. No estudo conduzido por Ogata (2010), a inter-relação entre o sinal de realimentação, denotado como $B(s)$, e o sinal de erro ativo, designado como $E(s)$, é comumente chamada de função de transferência de malha aberta, e é descrita matematicamente pela Equação 2.3.

$$\text{Função de transferência de malha aberta} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (2.3)$$

Prosseguindo com a avaliação da Figura 1, identifica-se que o vínculo matemático entre o sinal $C(s)$ e o sinal de erro correspondente $E(s)$ é conhecido como a função de transferência associada ao ramo direto do sistema. Esta relação matemática é formalmente expressa pela Equação 2.4, a qual oferece uma descrição detalhada do comportamento dinâmico entre esses sinais no contexto do sistema em análise.

$$\text{Função de transferência do ramo direto} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \quad (2.4)$$

Concluindo, ao realizar uma análise final da Figura 1, observa-se que a interação entre o sinal $C(s)$ e o sinal $R(s)$ é denominada função de transferência em configuração de malha fechada. Esta interação é matematicamente representada pela Equação 2.5, que descreve a relação precisa e dinâmica entre os referidos sinais no sistema analisado.

$$\text{Função de transferência de malha fechada} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.5)$$

Ogata (2010) discute em detalhe como a função de transferência de um sistema de malha fechada estabelece um elo entre a dinâmica deste sistema e a dinâmica dos componentes

situados tanto no ramo direto quanto no ramo de realimentação. Neste contexto, é evidente que o comportamento da saída do sistema em malha fechada é influenciado não apenas pela configuração específica da função de transferência de malha fechada, mas também pela característica da entrada que é fornecida ao sistema. A compreensão desse relacionamento é crucial para a análise e síntese de sistemas de controle.

2.3 MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS

A abordagem de modelagem no espaço dos estados constitui uma técnica fundamental para a análise e desenvolvimento de sistemas de controle de alta complexidade, integrando-se como um componente chave dentro da teoria de controle moderno. Ogata (2010) discute que a teoria de controle moderno constitui uma evolução em relação à teoria de controle tradicional, distinguindo-se desta pela sua aplicabilidade a sistemas que possuem múltiplas entradas e saídas, sem restrições quanto à linearidade ou não linearidade dos sistemas, ou à variação do tempo. Em contrapartida, a teoria clássica de controle está limitada a sistemas que são lineares e invariantes no tempo, sendo esses sistemas caracterizados por uma única entrada e uma única saída, o que representa uma abordagem mais restrita.

Conforme detalhado na obra de Ogata (2010), a análise de sistemas utilizando o espaço de estados aborda três categorias de variáveis fundamentais na modelagem de sistemas dinâmicos: a saber, as variáveis de entrada, as variáveis de saída e as variáveis de estado. Uma característica importante desse método de representação é que, embora se possam formular múltiplas representações diferentes para um mesmo sistema no espaço de estados, o número dessas variáveis de estado permanece constante para qualquer uma das representações concebíveis para o sistema em questão.

Portanto, de acordo com Ogata (2010), ao proceder com a modelagem no espaço de estados, é imperativo selecionar o menor conjunto de variáveis que, juntamente com o conhecimento da entrada, possa descrever de forma abrangente o comportamento do sistema. Assim, as variáveis selecionadas, conhecidas como variáveis de estado, devem ser aptas a representar o estado do sistema. Durante a construção do sistema, é preferível optar por variáveis de estado que sejam de fácil mensuração.

Ogata (2010) sustenta que, na representação por variáveis de estado, visto que os integradores em sistemas de controle em tempo contínuo atuam como dispositivos de memória, suas saídas podem ser consideradas variáveis de estado. Consequentemente, o número de variáveis de estado é equivalente à quantidade de integradores presentes no sistema.

A fim de obter uma compreensão aprofundada da modelagem no espaço de estados, é essencial estabelecer de maneira clara os conceitos de estado, variáveis de estado, vetor de estado e espaço de estados. Conseqüentemente, de acordo com Ogata (2010), pode-se delinear os conceitos a seguir.

Estado: O estado de um sistema dinâmico corresponde ao menor conjunto possível de variáveis, referidas como variáveis de estado, de tal modo que a compreensão desses parâmetros no instante $t = t_0$, em associação com o conhecimento das entradas para tempos $t \geq t_0$, permite a determinação completa e precisa do comportamento do sistema ao longo de quaisquer momentos $t \geq t_0$.

Variáveis de Estado: As variáveis de estado em um sistema dinâmico referem-se ao conjunto mais reduzido de variáveis suficientes para estabelecer a condição ou o estado desse sistema. Seu papel é fornecer uma descrição completa e mínima do sistema, tornando-as essenciais para a análise e compreensão do comportamento dinâmico do mesmo. É crucial destacar que as variáveis de estado não precisam ser quantidades que possam ser fisicamente ou diretamente medidas ou observadas. As variáveis que não correspondem a grandezas físicas, assim como aquelas que não são nem mensuráveis nem observáveis por meios convencionais, ainda podem ser selecionadas como variáveis de estado.

Vetor de Estado: Para descrever de maneira exaustiva o comportamento de um sistema específico, é necessário empregar n variáveis de estado. Cada uma dessas n variáveis desempenha o papel de um componente do vetor x , resultando na formação de um vetor com n elementos distintos. Este vetor, crucial para a análise do sistema, é denominado vetor de estado.

Espaço de Estados: O espaço de estados de n dimensões é constituído por eixos coordenados designados por x_1, x_2, \dots, x_n . Nestes eixos, as variáveis de x_1, x_2, \dots, x_n representam as diferentes variáveis de estado. Neste contexto, entende-se que qualquer estado específico do sistema em questão pode ser descrito por um ponto singular dentro deste espaço de estados.

2.3.1 Equações no espaço de estado

Como já mencionado previamente, a seleção das saídas dos integradores é viável para serem utilizadas como variáveis de estado. Esta abordagem implica que a quantidade total de variáveis de estado, que são necessárias para descrever de forma completa o comportamento dinâmico de um sistema, equivale ao número total de integradores presentes nesse sistema específico. Para derivar uma expressão geral em formato de espaço de estado, Ogata (2010)

inicia seu raciocínio ao postular um sistema com entradas e saídas em múltiplos locais, envolvendo n integradores. É assumida, ainda, a presença de r entradas representadas por $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, além de m saídas que são indicadas por $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. As saídas dos n integradores são definidas como variáveis de estado, denominadas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Desta forma, o sistema completo é descrito pela Equação 2.6.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

O comportamento das saídas, identificadas como $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, do sistema em análise pode ser matematicamente descrito e determinado através da aplicação da Equação 2.7.

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
 y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
 &\vdots \\
 y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ao estabelecer as definições anteriores em forma matricial, chegam-se às expressões dadas nas Equações 2.8 e 2.9.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Logo, pode-se escrever as Equações 2.8 e 2.9 como demonstradas nas Equações 2.10 e 2.11.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.11)$$

A equação de estado do sistema encontra-se representada pela Equação 2.10, ao passo que a Equação 2.11 é responsável por descrever a equação de saída. Quando as funções vetoriais \mathbf{f} e/ou \mathbf{g} incorporam explicitamente a variável tempo t , tal sistema é caracterizado como um sistema variante no tempo. Este tipo de modelagem é essencial em situações onde o desempenho do sistema é influenciado por alterações temporais, exigindo, portanto, uma análise mais detalhada e específica dos impactos que o tempo exerce sobre as variáveis do sistema. Se as Equações 2.10 e 2.11 forem sujeitas a um processo de linearização em torno de um ponto de operação particular, então resultam as Equações 2.12 e 2.13, que representam, de forma linearizada, as equações de estado e as de saída, correspondentemente.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

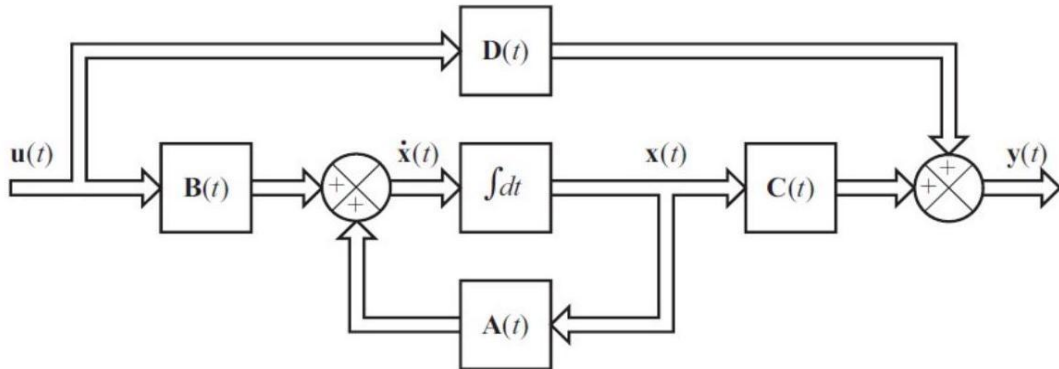
Ao se proceder a uma análise detalhada das Equações 2.12 e 2.13, observa-se a incorporação das matrizes $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$. Nesta configuração, cada matriz desempenha um papel específico e relevante: $\mathbf{A}(t)$ é designada como a matriz de estado, responsável por descrever a dinâmica interna do sistema; $\mathbf{B}(t)$ refere-se à matriz de entrada, que mapeia os efeitos das entradas no sistema; $\mathbf{C}(t)$ é a matriz de saída, correlacionando os estados do sistema com as saídas observáveis e, por último, $\mathbf{D}(t)$ caracteriza a matriz de transmissão direta, que relaciona diretamente as entradas com as saídas, sem passar pelo estado intermediário. Por último, quando as funções vetoriais \mathbf{f} e \mathbf{g} não incluem o tempo t de forma direta em sua expressão, o sistema é classificado como um sistema invariante no tempo. Em tal cenário, as Equações 2.12 e 2.13 podem ser reduzidas a uma forma simplificada, específica para sistemas LIT, conforme mostrado a seguir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

As Equações 2.14 e 2.15 podem ser reformuladas em uma representação de diagrama de blocos, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema representado no espaço de estados



Fonte: Ogata, 2010.

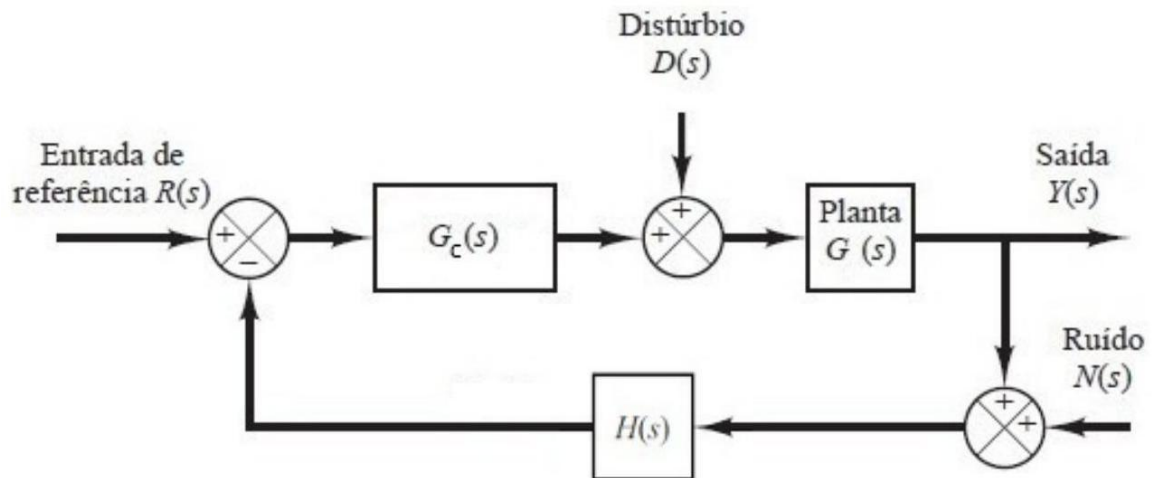
2.4 CONTROLADOR PID E SUAS VARIANTES

Conforme exposto por Ogata (2010), atualmente, a maioria dos controladores industriais em uso opera com variantes dos esquemas clássicos de controle, como os de tipo PID ou suas modificações. O controlador PID é mostrado em um sistema genérico na Figura 3. Conseqüentemente, a função de transferência deste controlador é apresentada a seguir.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2.16)$$

O controlador PID, na sua composição, inclui os ganhos proporcional, integral e derivativo, simbolizados por K_P , K_I e K_D , respectivamente. Conforme destacado por Dorf and Bishop (2018), um controlador PID estabelece uma função de transferência que possui um polo localizado na origem e incorpora dois zeros, os quais podem ser estrategicamente posicionados em qualquer local no plano s , oferecendo flexibilidade em sua configuração.

Figura 3 - Sistema com controle PID



Fonte: Adaptado de Ogata, 2010.

A compreensão do impacto da adição de polos e zeros no sistema reveste-se de importância fundamental, uma vez que influencia o lugar geométrico das raízes. Conforme Dorf e Bishop (2018), a inclusão de um polo na função de transferência de malha aberta provoca um deslocamento do lugar das raízes em direção à direita no plano complexo. Este movimento das raízes resulta em uma diminuição da estabilidade relativa do sistema analisado, o que, conseqüentemente, torna a resposta do sistema mais demorada para se acomodar.

Nesse contexto, Dorf e Bishop (2018) afirma que a incorporação de um zero à função de transferência em malha aberta resulta em um deslocamento do lugar das raízes para a esquerda. Que geralmente contribui para uma maior estabilidade do sistema e uma acomodação mais rápida da resposta. Isso implica, em termos físicos, que adicionar um zero à função de transferência na trajetória direta é equivalente à introdução de um controlador proporcional-derivativo (PD) ao sistema. O efeito desse tipo de controle é acelerar a resposta transitória do sistema.

Conforme a Equação 2.16, para implementar efetivamente um controlador PID, é necessário identificar corretamente os valores dos ganhos K_P , K_D e K_I . Conforme discutido em Dorf e Bishop (2018), existem diversas estratégias acessíveis para a determinação de valores adequados para os ganhos do controlador. O processo de atribuir valores apropriados a estes parâmetros é denominado sintonia do controlador. Por sua vez, pode ser realizado de forma manual, na qual os ganhos são definidos através de um processo iterativo de tentativa e erro, ou por meio de métodos analíticos, como é o caso do método de sintonia de Ziegler-Nichols, que é amplamente reconhecido e utilizado no ajuste de controladores PID.

Com isso, todo o desenvolvimento de equações gerais para o projeto do compensador PID está de acordo com o trabalho de Phillips e Harbor (1997). Ao analisar um sistema em malha fechada com realimentação unitária e considerando a planta descrita genericamente como $G(s)$, Phillips e Harbor (1997) inicia o desenvolvimento teórico com a finalidade de garantir que, para um determinado valor de s_1 , o qual é geralmente complexo, a Equação 2.17 seja satisfeita de maneira precisa e consistente.

$$G_c(s_1)G(s_1) = \alpha e^{j\gamma} \quad (2.17)$$

Observa-se que na Equação 2.17, os parâmetros α e γ são derivados da representação em coordenadas polares, associada à expressão no domínio dos números complexos. Com isso, em termos gerais, o elemento s_1 possui a capacidade de assumir um valor complexo, é possível representá-lo em sua forma retangular, também conhecida como forma complexa, conforme ilustrado na sequência.

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad (2.18)$$

Pode-se definir $|s_1|$ e β da seguinte forma:

$$|s_1| = [\sigma_1^2 + \omega_1^2]^{1/2}, \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_1}{\sigma_1} \right) \quad (2.19)$$

Da mesma forma, $G(s_1)$ pode ser expresso em notação polar conforme mostrado a seguir:

$$G(s_1) = |G(s_1)|e^{j\psi}, \psi = \angle G(s_1) \quad (2.20)$$

Dessa forma, o inverso da proporção das funções encontradas na Equação 2.17 pode ser representado como se segue

$$\frac{G(s_1)}{\alpha e^{j\gamma}} = \frac{|G(s_1)|e^{j\psi}}{\alpha e^{j\gamma}} = M e^{-j\theta} \quad (2.21)$$

de modo que

$$M = \frac{|G(s_1)|}{\alpha}, \theta = \gamma - \psi \quad (2.22)$$

Ao substituir a Equação 2.21 na Equação 2.17, chega-se à seguinte expressão demonstrativa.

$$G_c(s_1) = \left(\frac{1}{M}\right) e^{j\theta} \quad (2.23)$$

Ao incorporar a Equação 2.23 dentro da Equação 2.16, chega-se ao seguinte resultado detalhado.

$$K_D s_1^2 + K_P s_1 + K_I = \frac{s_1 e^{j\theta}}{M} \quad (2.24)$$

Após a elaboração detalhada da Equação 2.24, o seguinte resultado pode ser obtido como conclusão lógica do processo analítico.

$$K_D |s_1|^2 (\cos 2\beta + j \sin 2\beta) + K_P |s_1| (\cos \beta + j \sin \beta) + K_I = \frac{|s_1|}{M} [\cos (\beta + \theta) + j \sin (\beta + \theta)] \quad (2.25)$$

Ao separar e igualar as componentes reais e imaginárias na Equação 2.25, pode-se estabelecer a matriz a seguir.

$$\begin{bmatrix} |s_1|^2 \cos 2\beta & |s_1| \cos \beta \\ |s_1|^2 \sin 2\beta & |s_1| \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_D \\ K_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|s_1|}{M} \cos (\beta + \theta) - K_I \\ \frac{|s_1|}{M} \sin (\beta + \theta) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ao determinar os valores de K_P e K_D a partir da solução da Equação 2.25, mantendo o parâmetro K_I como uma variável fixa, derivam-se as equações expressivas abaixo como resultados.

$$K_P = \frac{\sin(\beta - \theta)}{M \sin \beta} - \frac{2K_I \cos \beta}{|s_1|} \quad (2.27)$$

$$K_D = \frac{\sin \theta}{M |s_1| \sin \beta} + \frac{K_I}{|s_1|^2} \quad (2.28)$$

A equação característica do sistema é expressa por

$$1 + G_c(s)G(s) = 0 \quad (2.29)$$

Assumindo-se que se deseja que o lugar das raízes atravesse o ponto $s = s_1$ para um ganho específico, a Equação 2.29 pode ser reescrita conforme mostrado a seguir, garantindo que o sistema atenda às condições requisitadas nas configurações de ganho mencionadas.

$$G_c(s)G(s) = -1 \quad (2.30)$$

Para uma análise mais detalhada, ao comparar a Equação 2.30 com as Equações 2.17 e 2.21, pode-se deduzir que algumas condições específicas emergem.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \gamma &= 180^\circ \\ \theta &= \gamma - \psi = 180^\circ - \angle G(s_1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tendo em mãos a Equação 2.31, pode-se reescrever as Equações 2.27 e 2.28 nos termos seguintes.

$$K_P = \frac{-\sin(\beta + \psi)}{|G(s_1)| \sin \beta} - \frac{2K_I \cos \beta}{|s_1|} \quad (2.32)$$

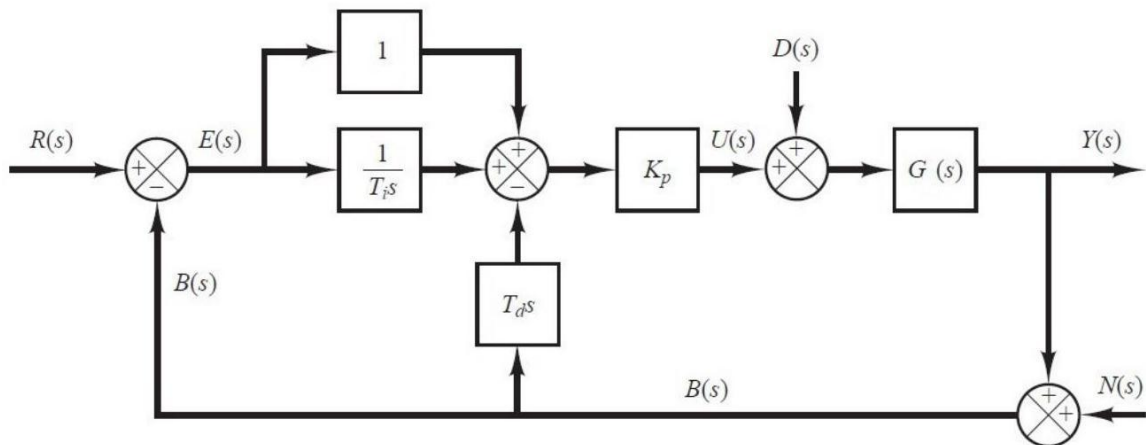
$$K_D = \frac{\sin \psi}{|s_1| |G(s_1)| \sin \beta} + \frac{K_I}{|s_1|^2} \quad (2.33)$$

Empregam-se as Equações 2.32 e 2.33, conforme formuladas por Phillips e Harbor (1997). Estas Equações são aplicadas para determinar os ganhos típicos de um controlador PID ao se obter ou estimar a função de transferência do processo que se deseja controlar. Nota-se que é preciso, em primeiro momento, estimar um valor do ganho integral.

Ao se examinar a Figura 3, percebe-se que quando a entrada de referência $R(s)$ é dada como uma função degrau, Ogata (2010) esclarece que a introdução do termo derivativo na ação

de controle resulta na incorporação de uma função delta, ou seja, um impulso. Segundo Ogata (2010), quando a entrada de referência $R(s)$ é uma função degrau, a variável de controle não apresentará uma função impulso, mas sim uma função pulso de curta duração. Este efeito é conhecido como salto no valor de referência. Para mitigar o fenômeno de salto no valor de referência, é possível limitar a ação derivativa exclusivamente ao caminho de realimentação. Com isso, a diferenciação ocorre apenas no sinal de realimentação, preservando o sinal de referência. Quando o sistema de controle é configurado desta maneira, é referido como controle PI-D, conforme a Figura 4.

Figura 4 - Sistema com controle PI-D.



Fonte: Adaptado Ogata, 2010.

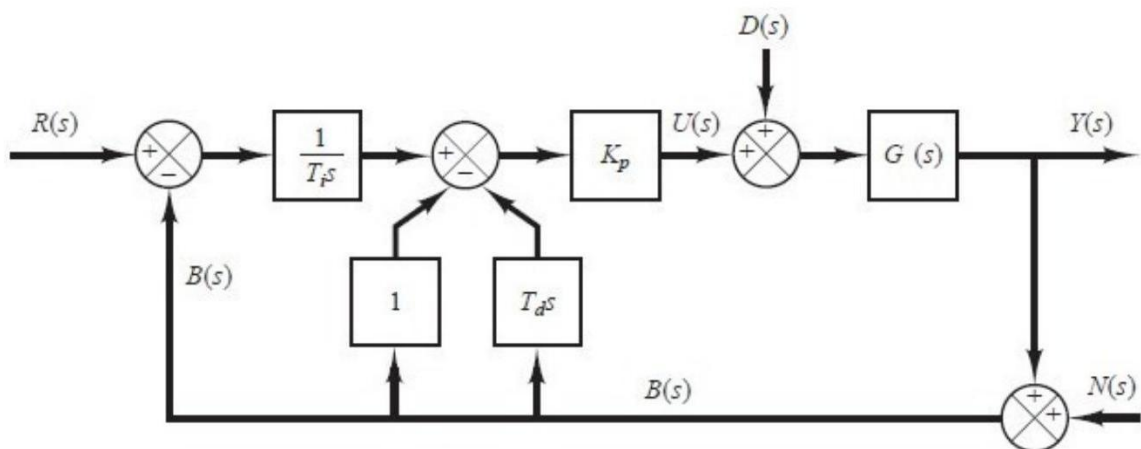
Ocorre uma distinção nítida entre o controlador PI-D e o controlador PID pela maneira como são posicionados os ganhos K_P , K_I e K_D no diagrama em blocos do sistema. No controlador PI-D, a ação derivativa é situada no ramo de realimentação. Como evidenciado por Ogata (2010) e ilustrado na Figura 4, é demonstrado que a expressão matemática que descreve o sinal manipulado, denominado como $U(s)$, pode ser representada pela Equação 2.34 no contexto estudado.

$$U(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} \right) R(s) - K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} T_d S \right) B(s) \quad (2.34)$$

Assim, a principal vantagem do PI-D radica em evitar picos no sinal de controle ("*derivative kick*") devido a mudanças repentinas na referência, pois o termo derivativo não depende do erro. Desta forma, o sistema é mais estável para referências variáveis, e sua aplicação é em sistemas com referências que mudam frequentemente, como por exemplo na

área da robótica. Analisa-se, novamente, a situação em que a entrada de referência $R(s)$ assume a forma de uma função degrau. Conforme Ogata (2010), a implementação tanto do controlador PID quanto do controlador PI-D resulta em uma resposta degrau no sinal de controle $U(s)$. Em determinadas circunstâncias, tal variação abrupta no sinal de controle pode ser considerada indesejável. Com isso, a realocação das ações proporcional e derivativa para o caminho de realimentação pode ser vantajosa, já que essas ações passam a influenciar exclusivamente o sinal de realimentação. A Figura 5 ilustra este sistema de controle.

Figura 5 - Sistema com controle I-PD



Fonte: Ogata, 2010.

De maneira semelhante ao controlador PI-D, tem-se uma distinção nítida entre o controlador IPD e o controlador PID pela maneira como são posicionados os ganhos K_p , K_I e K_D . No controlador I-PD, a ação derivativa e proporcional atuam no ramo de realimentação e, como evidenciado por Ogata (2010) e ilustrado na Figura 5, é mostrado na expressão matemática que descreve o sinal manipulado, denominado como $U(s)$, pode ser representada pela Equação 2.35. Finalmente, pode-se destacar que a principal vantagem do controlador I-PD está em reduzir o sobressinal em comparação ao PID clássico, pois os termos P e D não reagem abruptamente a mudanças na referência. O controle é mais suave em sistemas onde variações bruscas na referência podem causar instabilidade. Desta forma, esta variante é mais aplicada em sistemas onde a referência é constante ou muda pouco.

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s) \quad (2.35)$$

2.5 PROJETO DE SISTEMAS REGULADORES COM OBSERVADORES

Citando Ogata (2010), o método de alocação de polos apresenta uma certa semelhança com o método do lugar das raízes. Ambos os métodos visam posicionar os polos de malha fechada em locais específicos. A distinção principal reside no fato de que, no método do lugar das raízes, o foco é exclusivamente na alocação dos polos dominantes de malha fechada nos locais pretendidos. Em contraste, o método de alocação de polos assegura que todos os polos de malha fechada sejam posicionados conforme as posições desejadas, não apenas os dominantes.

Na análise efetuada por Ogata (2010) sobre o projeto de alocação de polos, parte-se do princípio de que todas as variáveis de estado do sistema são passíveis de mensuração precisa e estão plenamente disponíveis para uso em processos de realimentação. Adicionalmente, é imperativo que o sistema apresente uma característica de controlabilidade completa do estado, condição esta que permite a alocação dos polos da malha fechada do sistema em qualquer local previamente desejado. Esse processo é realizado por meio de uma realimentação de estado, que utiliza uma matriz de ganho especificamente calculada para atingir o efeito desejado. À luz dos fatos apresentados, é possível observar que essa metodologia de projeto é iniciada pela definição dos polos desejados da malha fechada, fundamentando-se nas especificações relacionadas tanto à resposta temporal quanto à resposta em frequência. Esses parâmetros incluem, mas não se limitam a, velocidade de resposta, coeficiente de amortecimento, largura de banda passante e características de regime permanente.

Considerando que os polos desejados para a malha fechada do sistema devem ser posicionados em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$, Ogata (2010) afirma que ao selecionar uma matriz de ganho de realimentação de estado adequada, é viável configurar o sistema para que os polos de malha fechada sejam alinhados com essas posições específicas, assumindo que o sistema original seja de estado completamente controlável. O passo subsequente envolve a determinação da matriz de ganho de realimentação de estado necessária, a qual pode ser derivada através de vários métodos analíticos disponíveis.

Conforme detalhado por Ogata (2010), os conceitos de controlabilidade e observabilidade desempenham um papel crucial no desenvolvimento de sistemas de controle que operam no espaço de estados. Essencialmente, as condições sob as quais a controlabilidade e a observabilidade são satisfeitas podem ser determinantes para se garantir a existência de uma solução abrangente para o problema de projeto de sistemas de controle. A ausência dessa solução é evidente quando o sistema sob estudo é caracterizado por uma falta de controlabilidade. Apesar do fato de que a maioria dos sistemas físicos geralmente possui as propriedades de controlabilidade e observabilidade, é possível que os modelos matemáticos que

os representam possam não mostrar essas características importantes. Portanto, torna-se fundamental identificar as condições específicas sob as quais um determinado sistema pode ser considerado controlável e observável.

Conseqüentemente, para avaliar a viabilidade na implementação de sistemas de controle utilizando o método de espaço de estado, torna-se necessário delinear e compreender os princípios fundamentais detalhados na obra de Ogata (2010), que serve como referência teórica nos tópicos abaixo.

Controlabilidade completa: Um sistema pode ser classificado como controlável no momento t_0 caso haja a possibilidade de, através do uso de um vetor de controle que não esteja sujeito a restrições, conduzir o sistema a partir de qualquer configuração inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para uma configuração desejada qualquer, dentro de um intervalo de tempo que é finito e determinado.

Conforme a referência teórica, pode-se afirmar que o sistema dado pelas Equações 2.14 e 2.15 é de estado completamente controlável se, e somente se, os vetores $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ forem linearmente independentes ou a matriz de controlabilidade $n \times n$ definida na Equação 2.36 tiver posto n e cujo determinante é não nulo.

$$M_c = [\mathbf{B} | \mathbf{AB} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.36)$$

À luz dessas considerações, é possível afirmar que, em um sistema onde o controle do estado é plenamente realizável, a matriz de controlabilidade possui uma inversa bem definida.

Observabilidade completa: Um sistema é definido como completamente observável quando for possível deduzir o estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ pela análise do vetor de saída $\mathbf{y}(t)$, que é registrado ao longo de um intervalo de tempo específico e finito, ou seja, $t_0 \leq t \leq t_1$. Esta característica implica que o sistema é completamente observável apenas se todas as variações nos estados puderem ter uma influência discernível sobre cada componente do vetor de saída. O conceito de observabilidade desempenha um papel crucial na resolução de problemas que envolvem a determinação de variáveis de estado que não são diretamente mensuráveis, utilizando medições de variáveis que estão disponíveis, minimizando assim o tempo necessário para essa reconstrução.

O conceito de observabilidade ocupa um papel fundamental na teoria de controle, principalmente porque, na prática, um dos desafios enfrentados ao implementar controle por realimentação de estado decorre do fato de que uma parcela das variáveis de estado não pode

ser mensurada diretamente. Isso implica na necessidade de estimar as variáveis de estado inacessíveis com a finalidade de elaborar os sinais de controle correspondentes.

Dessa forma, conforme a referência teórica, o sistema de tempo contínuo apresentado pelas Equações 2.14 e 2.15 é inteiramente observável se, e somente se, a matriz $n \times nm$ na Equação 2.37 possuir posto n ou apresentar n vetores-coluna que sejam linearmente independentes, o que significa dizer que o determinante é não nulo. Tal matriz é designada como matriz de observabilidade, M_o .

$$M_o = [\mathbf{C}^* | \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* | \dots | (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*] \quad (2.37)$$

A observação completa e a controlabilidade são aspectos que dependem do cálculo do posto de uma matriz. Dado o papel central que o posto desempenha nestes conceitos, é crucial realizar uma análise detalhada do entendimento matemático subjacente ao posto de uma matriz, o qual se relaciona ao número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes. Conforme Poole (2016), o posto de uma matriz é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linha.

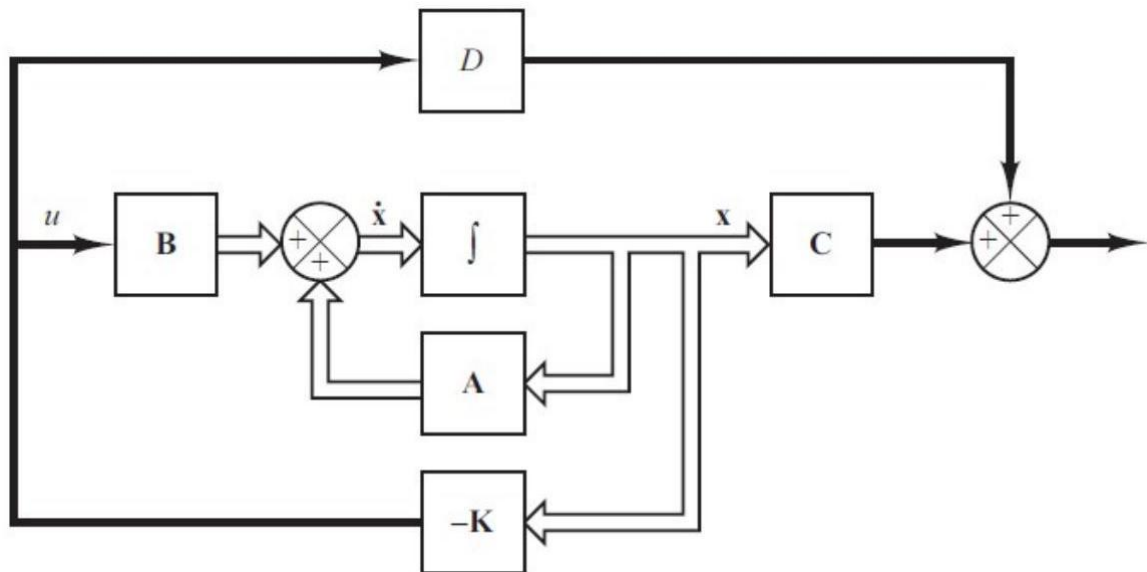
Conforme mencionado por Ogata (2010), no campo do projeto por alocação de polos, geralmente considera-se que os efeitos provocados pelos polos não dominantes de malha fechada são insignificantes. Em contraste com a abordagem convencional, que apenas especifica os polos dominantes de malha fechada, a metodologia atual detalha a localização de todos os polos de malha fechada. Entretanto, convém destacar que essa abordagem acarreta um custo considerável, visto que a alocação abrangente de todos os polos de malha fechada exige, quer todas as variáveis de estado sejam medidas eficazmente, quer a implementação de um observador de estado dentro do sistema. Além disso, para que se possa alocar arbitrariamente os polos de malha fechada em quaisquer posições desejadas, é imperativo que o sistema satisfaça a condição de controlabilidade completa do estado. Em face do exposto, o sistema é dado pelas Equações 2.14 e 2.15, sendo o sinal de controle selecionado conforme definido pela Equação 2.38.

$$u = -\mathbf{Kx} \quad (2.38)$$

A partir da Equação 2.38, é possível concluir que o sinal de controle é influenciado diretamente por um estado em um dado instante, conforme Figura 6. Este mecanismo é

chamado de realimentação de estado, pois emprega as condições atuais do sistema para ajustar o controle. O vetor linha K , com dimensão de $1 \times n$, recebe a denominação de matriz de ganho de realimentação de estado, pois desempenha a função crítica de ajustar ganho de malha fechada no sistema com base nos estados presentes.

Figura 6 - Sistema com controle via alocação de polos



Fonte: Ogata, 2010.

Como detalhado por Ogata (2010), o sistema ilustrado na Figura 6 caracteriza-se por uma entrada de referência constantemente igual a zero, o que o classifica como um sistema regulador. Este sistema de controle em malha fechada não contempla entradas adicionais, e sua função primária é assegurar que a saída permaneça no nível zero. No entanto, devido à presença potencial de perturbações, a saída pode sofrer um desvio temporário em relação ao zero. Graças ao projeto de realimentação de estado, tal saída divergente é eventualmente corrigida, retornando ao zero, consistente com a entrada de referência zero. Substituindo a Equação 2.38 na Equação 2.14 resulta na seguinte equação.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (2.39)$$

O estudo realizado por Ogata (2010) indica que tanto a estabilidade quanto as características da resposta ao longo do tempo são influenciadas diretamente pelos autovalores da matriz resultante $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Caso a matriz \mathbf{K} seja selecionada de maneira adequada, é viável que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ alcance um estado de estabilidade assintótica, permitindo, assim, que $\mathbf{x}(t)$

se aproxime cada vez mais de zero enquanto t avança em direção ao infinito, assumindo que $\mathbf{x}(0) \neq 0$. Esses autovalores, que são cruciais para a análise, são conhecidos como polos reguladores. Na eventualidade de que tais polos sejam alocados no semiplano esquerdo do plano s , então inevitavelmente $\mathbf{x}(t)$ convergirá para zero à medida que t tende para o infinito.

Conforme a pesquisa de Ogata (2010), a matriz de ganho \mathbf{K} pode ser derivada por meio da aplicação da fórmula de Ackermann. Considerando um sistema representado pelas Equações 2.14 e 2.15, implementa-se um esquema de controle que utiliza realimentação de estado, conforme detalhado na Equação 2.38. É assumido que o sistema analisado possui a propriedade de ser completamente controlável a partir dos estados. Além do mais, para assegurar que o sistema de malha fechada atinja o comportamento característico desejado, é imperativo que seus polos estejam precisamente situados nas posições $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$. Neste contexto, a equação característica a ser obtida é apresentada a seguir.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (2.40)$$

Conforme o teorema de Cayley-Hamilton, a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ necessariamente obedece à sua equação característica, o que nos conduz à expressão seguinte:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = 0 \quad (2.41)$$

Considera-se um n qualquer que seja um número inteiro positivo. A partir disso, a matriz de ganho de realimentação de estado, denotada por \mathbf{K} , é explicitada a seguir.

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1][\mathbf{B}|\mathbf{AB}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) \quad (2.42)$$

Conforme a Equação 2.41 e considerando $n = 3$, uma expressão para $\phi(\mathbf{A})$ é dada a seguir.

$$\phi(\mathbf{A}) = \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 \quad (2.43)$$

A Equação 2.42 é amplamente reconhecida no campo da teoria de controle e recebe o nome de fórmula de Ackermann.

Ogata (2010), explica que o primeiro estágio no método de projeto via alocação de polos requer a determinação da localização desejada dos polos de malha fechada. Inicialmente,

estabelece-se a posição de um par de polos dominantes de malha fechada. Subsequentemente, os outros polos são posicionados de maneira que se situem, como mínimo, 5 vezes à esquerda dos polos dominantes de malha fechada. É crucial observar que, se os polos dominantes de malha fechada forem posicionados excessivamente à esquerda do eixo $j\omega$ (aumentando excessivamente a frequência natural ou o amortecimento), a resposta do sistema se tornará mais rápida, mas exigirá sinais de controle com amplitudes elevadas. Isso pode levar à saturação de atuadores ou a outros efeitos não lineares, comprometendo o desempenho do sistema, o que é um cenário indesejável que deve ser evitado no projeto de controle.

2.5.1 Observador de estados

No domínio do projeto de sistemas de controle utilizando a técnica de alocação de polos, assume-se frequentemente que todas as variáveis de estado do sistema estão ao alcance para serem utilizadas na realimentação. Entretanto, na aplicação prática, nem sempre essas variáveis de estado podem ser diretamente acessadas ou medidas para tal fim. Nessas circunstâncias, é necessário recorrer à estimativa das variáveis de estado que não estão acessíveis (observação de estados).

Como relatado por Ogata (2010), um sistema de observador de estado desempenha a função de estimar as variáveis de estado de um sistema dinâmico utilizando como base as medições obtidas das variáveis de saída e de controle. Este procedimento requer um critério específico para sua implementação eficaz: a condição de observabilidade. Esta condição deve ser atendida para permitir o projeto e a aplicação bem-sucedida de observadores de estado, conforme será demonstrado de forma mais detalhada em discussões posteriores.

Conforme descrito por Ogata (2010), um observador pode ser entendido como um subsistema cuja função é reconstruir o vetor de estado da planta em análise. O modelo matemático para este observador segue essencialmente a mesma estrutura que o aplicado à planta, com a inclusão de um termo adicional. Este termo desempenha um papel crucial ao incorporar o erro de estimação, permitindo que o sistema compense as incertezas associadas às matrizes **A** e **B**, assim como a ausência de erro inicial. Dentre os tipos de erro considerados, o erro de estimação ou de observação refere-se à discrepância entre a saída efetivamente medida e a saída que foi estimada. Já o erro inicial é definido como a diferença existente entre o estado original e o estado inicial considerado na estimativa. Dessa forma, o modelo matemático do observador é representado pela Equação 2.44.

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey \quad (2.44)$$

Percebe-se que \tilde{x} representa o estado que foi estimado e $\mathbf{C}\tilde{x}$ a saída estimada do sistema. Portanto, as variáveis de entrada do observador são definidas como a saída y medida do sistema e a entrada de controle u . A matriz \mathbf{K}_e , conhecida como a matriz de ganho do observador, desempenha o papel de uma matriz de penalização que atua sobre o termo de correção, o qual considera a diferença entre a saída que foi efetivamente medida, y , e a saída que foi anteriormente estimada, $\mathbf{C}\tilde{x}$.

Para derivar a equação que descreve o erro associado à observação, é necessário realizar a operação de subtração entre a Equação 2.44 e a Equação 2.14, obtendo o resultado da Equação 2.45.

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}x - \mathbf{A}\tilde{x} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}x - \mathbf{C}\tilde{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(x - \tilde{x}) \quad (2.45)$$

O vetor de erro e é definido como a diferença entre os vetores x e \tilde{x} , conforme a Equação 2.46.

$$e = x - \tilde{x} \quad (2.46)$$

Portanto, a Equação 2.45 pode ser escrita de acordo com a Equação 2.47.

$$\dot{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})e \quad (2.47)$$

Conforme mencionado por Ogata (2010), se os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ forem selecionados de uma forma que garanta a estabilidade assintótica e a rapidez do comportamento dinâmico do vetor de erro, qualquer vetor de erro se aproximará da origem a uma velocidade desejada. No caso de uma planta completamente observável, é possível demonstrar que se pode escolher a matriz \mathbf{K}_e de maneira a permitir que os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ sejam definidos arbitrariamente. Assim, a matriz de ganho do observador, \mathbf{K}_e , pode ser calculada para atingir a configuração desejada da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$.

O desenvolvimento de um observador de ordem completa conduz à identificação de uma matriz \mathbf{K}_e que é apropriada de tal forma que a matriz resultante $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ exibe os autovalores que são almejados pelo projetista. Este processo é, em essência, equivalente ao problema de alocação de polos, e, de forma rigorosa, as questões apresentadas são idênticas do

ponto de vista matemático. Esta característica é conhecida na literatura como uma expressão da dualidade.

Para projetar um observador de estado de ordem plena, é necessário selecionar adequadamente os autovalores desejados ou a equação característica correspondente, garantindo que a planta seja completamente observável. Conforme discutido por Ogata (2010), é essencial que os autovalores selecionados para a equação característica resultem em uma resposta do observador de estado que seja, no mínimo, entre duas a cinco vezes mais rápida do que o sistema em malha fechada em questão. Deve-se notar com atenção que as matrizes **A**, **B** e **C** do observador devem coincidir exatamente com aquelas da planta física. Em situações onde haja divergência entre as matrizes A, B e C do observador em relação às da planta, o erro pode não convergir para zero conforme o esperado, comprometendo a precisão do sistema.

Como já mostrado, a fórmula de Ackermann para o problema de alocação de polos é dada pela Equação 2.42. Portanto, de acordo com Ogata (2010), o dual do sistema definido pelas Equações 2.14 e 2.15 é dado pelas Equações 2.48 e 2.49.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \mathbf{C}^* v \quad (2.48)$$

$$n = \mathbf{B}^* \mathbf{z} \quad (2.49)$$

Conforme as Equações 2.48 e 2.49, a fórmula de Ackermann do sistema para a alocação de polos é modificada conforme a Equação 2.50.

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][\mathbf{C}^* \ | \ \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \ | \ \dots \ | \ (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*]^{-1} \phi(\mathbf{A}^*) \quad (2.50)$$

Consequentemente, a configuração final de \mathbf{K}_e está descrita de maneira explícita na Equação 2.51.

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^* = \phi(\mathbf{A}^*)^* \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

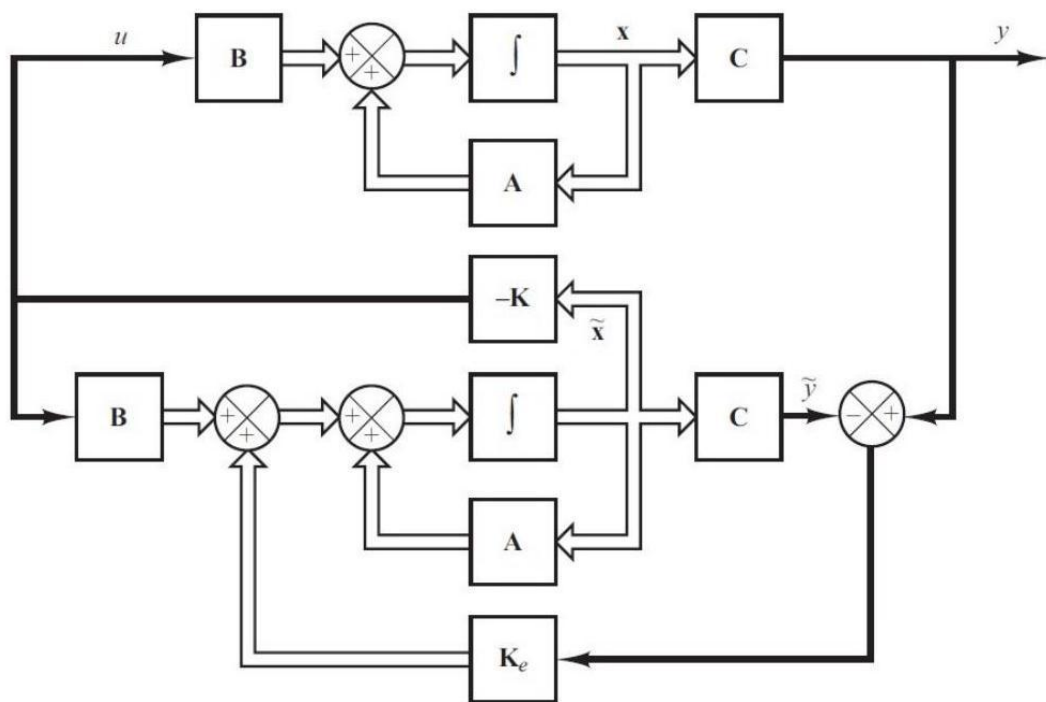
Uma análise detalhada da Equação 2.51 revela que a função $\phi(s)$ é, na verdade, o polinômio característico que se almeja para o observador de estado. Este polinômio é especificado pela Equação 2.52, segundo o que foi delineado.

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \quad (2.52)$$

A partir da Equação 2.52, os autovalores de interesse são denotados por $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Dessa forma, segundo a definição proposta por Ogata (2010), a Equação 2.51 recebe a designação de fórmula de Ackermann quando se trata da determinação específica da matriz de ganho \mathbf{K}_e associada ao observador.

Efeitos da Introdução Do Observador em Sistemas De Malha Fechada: A mensurabilidade direta do estado real $\mathbf{x}(t)$ pode não ser viável, o que torna necessário o desenvolvimento de um observador para inferir o estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Este estado observado é então utilizado na arquitetura de realimentação, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7 - Sistema de controle realimentado por estado observado.



Fonte: Ogata, 2010.

Segundo a pesquisa de Ogata (2010), o projeto de controle da Figura 7 pode ser decomposto em duas fases principais. Inicialmente, a tarefa é definir a matriz de ganho de realimentação \mathbf{K} de modo que se obtenha uma equação característica específica desejada para o sistema em análise. Posteriormente, o enfoque passa para a especificação da matriz de ganho \mathbf{K}_e do observador. Este passo é fundamental para a formulação da equação característica do observador, que deve atender a critérios de desempenho previamente estabelecidos para o observador no contexto do sistema dinâmico.

O sistema definido pelas Equações 2.14 e 2.15, que se afirma ser completamente controlável e observável, implementa um controle utilizando realimentação de estado. Este controle está fundamentado no estado observado, representado como $\tilde{\mathbf{x}}$, conforme descrito na Equação 2.53.

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.53)$$

Com o controle dado pela Equação 2.53, a Equação 2.54 define a equação de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (2.54)$$

Escrevendo a Equação 2.54 em função do vetor de erro $\mathbf{e}(t)$, encontra-se a Equação 2.55.

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} \quad (2.55)$$

Ao integrar a Equação 2.47 com a Equação 2.55, chega-se à Equação 2.56, que fornece uma caracterização detalhada das dinâmicas associadas ao sistema de controle que é influenciado por um estado observado e realimentado.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Conforme Ogata (2010), a expressão matemática que representa a característica do sistema é formulada pela Equação 2.57.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0 \quad (2.57)$$

Ao examinar a Equação 2.57, é observado que os polos associados ao sistema de controle em malha fechada, realimentado com a realimentação de estado observado, são compostos pelos polos resultantes do projeto de alocação de polos e pelos polos originários do projeto autônomo do observador. Isso implica que os procedimentos para o projeto de alocação de polos e para o projeto do observador são mutuamente independentes. Assim, é possível

conduzi-los separadamente e, posteriormente, integrá-los para estabelecer o sistema de controle com realimentação de estado observado.

Função de Transferência do Controlador com Observador: No âmbito deste estudo, assume-se que a configuração estrutural do sistema é descrita pelas Equações 2.14 e 2.15. É igualmente assumido que a dinâmica da planta pode ser completamente observável, e que o controle empregado é baseado em um mecanismo de realimentação do estado estimado, conforme definido pela Equação 2.53. Substituindo a Equação 2.44 na 2.53,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e \mathbf{y} \quad (2.58)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 2.58 e supondo condição inicial nula, obtém-se o resultado mostrado na Equação 2.59.

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{Y}(s) \quad (2.59)$$

Substituindo a Equação 2.59 na transformada de Laplace da Equação 2.53, chega-se ao resultado dado pela Equação 2.60.

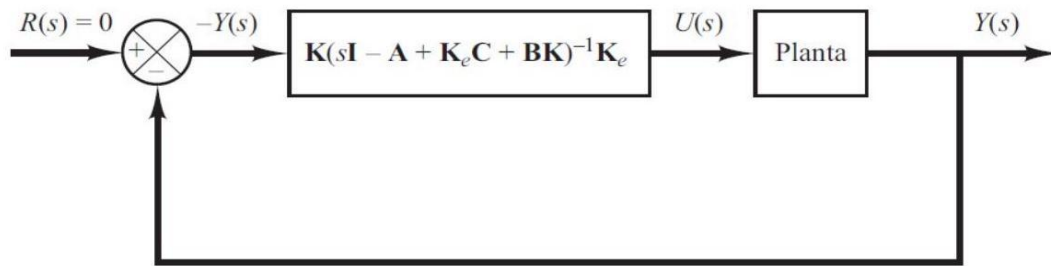
$$U(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{Y}(s) \quad (2.60)$$

Conforme Ogata (2010) a função de transferência do sistema é dada na Equação 2.61.

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e \quad (2.61)$$

Ogata (2010) propõe que a função de transferência especificada na Equação 2.61 exerce o papel de um controlador dentro do sistema. Conseqüentemente, essa função de transferência é caracterizada como a função de transferência de um controlador fundamentado no conceito de observador ou, em termos mais simples, referida como a função de transferência do controlador observador. A ilustração na Figura 8 apresenta uma representação através de um diagrama de blocos referente ao sistema analisado.

Figura 8 - Sistema com um controlador-observador



Fonte: Ogata, 2010.

2.6 MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DOS CONTROLADORES

A avaliação da performance de um controlador é fundamental para garantir que um sistema de controle atenda aos requisitos desejados de estabilidade, precisão e velocidade de resposta. Para isso, são utilizadas métricas que quantificam o comportamento do sistema em relação ao erro e à resposta temporal. Entre as métricas mais comuns estão os índices integrais do erro, como a Integral do Erro Quadrático (ISE), a Integral do Erro Absoluto (IAE), a Integral do Erro Quadrático Multiplicado pelo Tempo (ITSE) e a Integral do Erro Absoluto Multiplicado pelo Tempo (ITAE). Esses índices fornecem uma medida global do erro ao longo do tempo, permitindo a comparação entre diferentes estratégias de controle e a otimização dos parâmetros do controlador. Além disso, parâmetros da resposta temporal, como tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro em regime permanente, são amplamente utilizados para caracterizar a dinâmica do sistema. Esses parâmetros ajudam a entender como o sistema responde a entradas específicas, como degraus ou rampas, e são essenciais para ajustar o controlador de modo a alcançar o desempenho desejado.

2.6.1 Índices integrais do erro

Conforme Fermino *et al.*(2014), um critério de erro refere-se a um valor mensurável que indica a eficácia operacional de um sistema. Quando um sistema de controle atua com desempenho otimizado, isso resulta da calibração dos parâmetros do controlador, visando à melhoria de índices de desempenho predefinidos, através da maximização ou minimização desses índices. Para tal fim, os critérios aplicados geralmente são baseados em métricas de desempenho que surgem da integral de uma função, ou de uma função ponderada, que mensura a diferença entre a saída do sistema e a entrada de referência designada, comumente chamada de função de erro.

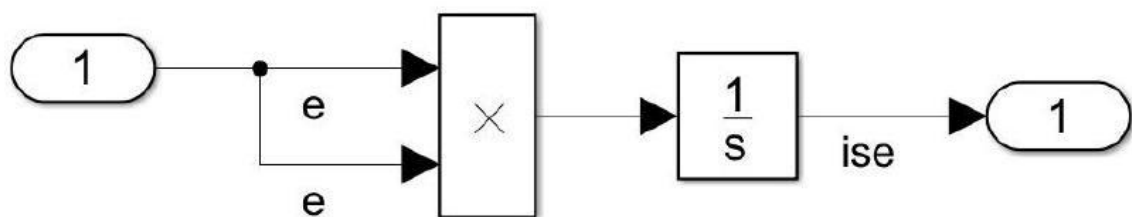
Em termos gerais, os índices integrais são utilizados para avaliar o erro total em sistemas de controle. Estes índices fornecem métricas precisas para medir o desempenho dos sistemas na correção de desvios ao longo do tempo.

Ogata *et al.* (1998) enfatiza que o critério ISE é amplamente aplicado por ser de fácil cálculo, seja utilizando métodos analíticos ou experimentais. Uma propriedade desse índice é que atribui pesos significativos a erros consideráveis, enquanto aplica pesos reduzidos a erros menores. No entanto, esse índice demonstra baixa seletividade, já que mudanças nos parâmetros do controlador resultam apenas em leves alterações no índice ISE, possibilitando que o sistema ajustado por esse método não seja ideal. Um sistema configurado com base nesse critério tende a exibir uma resposta veloz, porém com estabilidade relativa reduzida, manifestando oscilações. A definição do critério ISE é expressa pela seguinte equação.

$$J_{ISE} = \int_0^T e^2(t) dt \quad (2.62)$$

O limite superior da integral é dado pelo tempo T , escolhido de forma a ser suficientemente extenso para abarcar tanto a fase de transição quanto a fase de regime estacionário da resposta.

Figura 9 - Diagrama de blocos ISE.



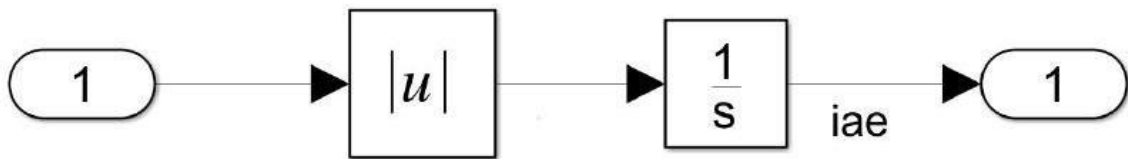
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ogata *et al.* (1998) afirma que o critério IAE, fundamentado no erro absoluto, é amplamente utilizado em simulações. Isso se deve à sua simplicidade tanto em termos de execução quanto de entendimento. Um sistema que é considerado ótimo segundo esse critério é aquele que exibe um nível adequado de amortecimento, o que se traduz em uma resposta que pode apresentar algum sobressinal, mas não se torna excessivamente oscilatória. Além disso, ele deve apresentar um comportamento transitório satisfatório, sem ser excessivamente sensível às alterações nos parâmetros do controlador.

$$J_{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt \quad (2.63)$$

O critério IAE é matematicamente definido pela Equação 2.63 e pode ser obtido conforme a Figura 10, através do Simulink.

Figura 10 - Diagrama de blocos IAE.



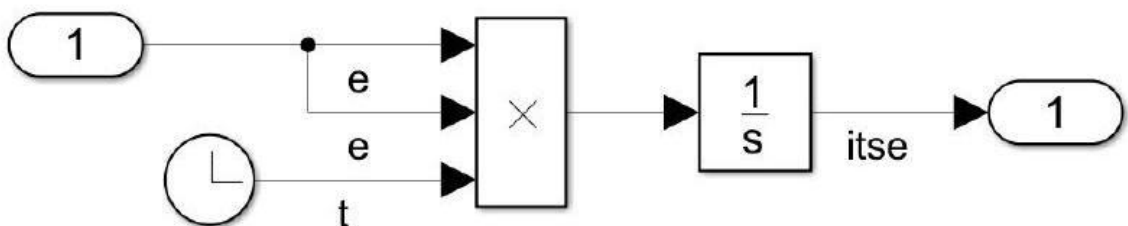
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

De acordo com Ogata *et al.*(1998), na análise da resposta de um sistema a um degrau unitário, o critério adotado inicialmente reduz a importância dos erros grandes que ocorrem no início do processo, enquanto atribui uma penalização mais intensa aos erros que surgem posteriormente durante a fase de transição. O critério ITSE exibe uma maior seletividade em relação ao critério ISE quando se trata de definir os parâmetros do controlador. A formulação matemática do critério ITSE é dada por:

$$J_{ITSE} = \int_0^T t e^2(t) dt \quad (2.64)$$

Através da representação ilustrada na Figura 11, a Equação 2.64 pode ser formulada no Simulink.

Figura 11 - Diagrama de blocos ITSE.



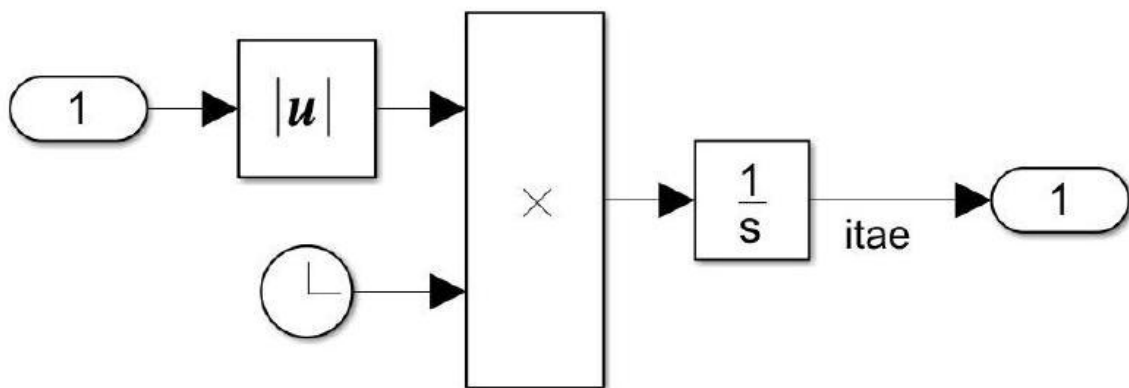
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ogata *et al.*(1998) diz que o erro absoluto é ajustado por meio do tempo. Isso significa que, no caso de um erro inicial substancial em uma resposta ao degrau unitário, o ajuste é pequeno. No entanto, para erros que se manifestam nas fases mais tardias de uma resposta transitória, o ajuste é significativamente maior. Um sistema criado usando este critério se destaca por ter um sobressinal pequeno na resposta transitória e oscilações que são efetivamente amortecidas. Este critério é eficiente na determinação precisa dos parâmetros do controlador, representando um avanço em relação ao critério IAE. De maneira matemática, o critério ITAE é expresso pela seguinte equação.

$$J_{ITAE} = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (2.65)$$

Por meio da ilustração apresentada na Figura 12, a formulação da Equação 2.65 pode ser realizada usando o Simulink.

Figura 12 - Diagrama de blocos ITAE.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

2.6.2 Parâmetros da resposta temporal

Ao elaborar a análise e o projeto de sistemas de controle, é crucial possuir um ponto de referência para avaliar o desempenho de diferentes sistemas de controle. Esse ponto de referência pode ser construído ao especificar em detalhes determinados sinais de entrada de teste e, subsequente, realizando a comparação das respostas geradas pelos diversos sistemas frente a esses sinais de entrada pré-definidos.

Uma quantidade significativa dos critérios de design fundamenta-se nas reações a esses sinais ou no comportamento do sistema em face de variações nas condições iniciais, mesmo na ausência de qualquer sinal de teste. A implementação de sinais de teste pode ser justificada pela correlação observada entre as características dos sistemas em reação a um sinal de entrada de teste característico e a habilidade do sistema em reagir a sinais de entrada reais.

Conforme indicado por Ogata (2010), as propriedades de desempenho que definem um sistema de controle são frequentemente delineadas usando a resposta transitória quando submetida a uma entrada de degrau unitário. Este tipo de entrada é notoriamente conveniente porque introduz uma alteração suficientemente abrupta e é bastante simples de implementar experimentalmente.

De acordo com Ogata (2010), antes de um sistema de controle estabilizar-se no regime permanente, a fase transitória da resposta do sistema habitualmente manifesta oscilações que são submetidas a amortecimento. Ao detalhar as propriedades das respostas transitórias de um sistema de controle, em resposta a um degrau unitário de entrada, é prática frequente esclarecer parâmetros como o tempo necessário para o sistema começar a responder (tempo de atraso, t_d), o tempo gasto para que a resposta vá da faixa inferior à faixa superior (tempo de subida, t_r), o instante em que o valor máximo da resposta é atingido (tempo de pico, t_p), o máximo valor que a resposta excede seu valor final pretendido (máximo sobressinal, M_p) e o tempo até que a resposta se aproxime suficientemente de seu valor final (tempo de acomodação, t_s).

Este estudo considera apenas os conceitos de máximo sobressinal (M_p) e tempo de acomodação (t_s). Portanto, conforme definido por Ogata (2010), o máximo sobressinal refere-se ao valor máximo atingido pelo pico da curva de resposta, mensurado em relação à unidade. Em situações nas quais o valor final da resposta em estado estacionário não corresponde à unidade, é prática corrente a utilização da percentagem máxima de sobressinal, cuja formulação é dada pela Equação 2.66.

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (2.66)$$

Conforme Ogata (2010), o tempo de acomodação t_s é o tempo necessário para que a resposta do sistema alcance e mantenha-se dentro de um intervalo de tolerância, geralmente de 2% a 5% do valor final, de forma estável. Este tempo relaciona-se diretamente com a constante de tempo predominante do sistema de controle.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

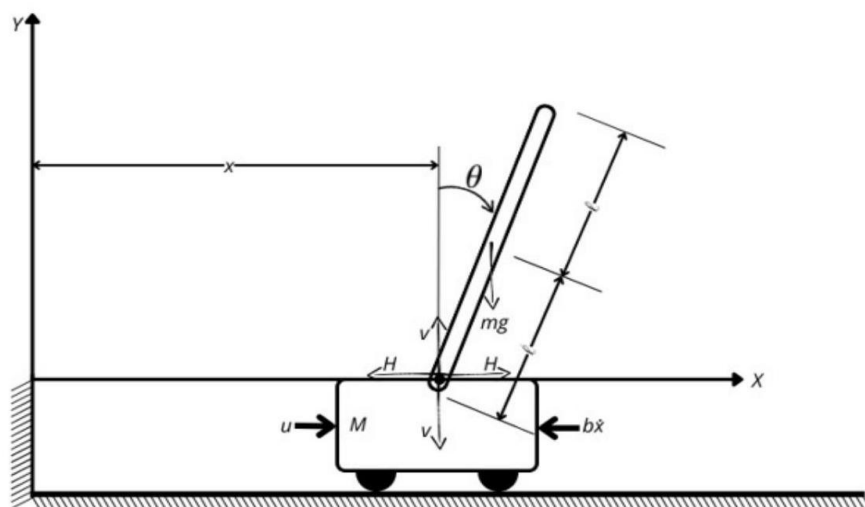
O propósito deste capítulo é delinear as equações matemáticas que são empregadas para modelar o sistema de pêndulo invertido acoplado a um carrinho com motores de corrente contínua.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNDULO INVERTIDO

O sistema de pêndulo invertido é um problema de controle clássico, não linear e instável. Tem-se como objetivo equilibrar o pêndulo verticalmente em um carrinho. Diante disso, a modelagem matemática do sistema é de grande importância no projeto, pois ela estabelece as equações que descrevem todo o sistema e serve como base para dimensionar os controladores. Portanto, escolhesse como principal abordagem na modelagem as leis de Newton para sistemas mecânicos, por serem mais intuitivas e diretas.

Esse sistema é composto por uma base móvel (o carrinho) e uma haste vertical rígida (ver Figura 13). A base móvel é responsável pela mobilidade do sistema, deslocando-se sobre uma superfície reta que possui apenas um grau de liberdade, dado na direção do eixo x . Por sua vez, o carrinho é controlado por uma força externa, permitindo a movimentação necessária para estabilizar o pêndulo. Em relação ao pêndulo, ele é fixado ao carrinho por meio de uma articulação rotacional em relação ao eixo x .

Figura 13 - Diagrama do pêndulo invertido com base móvel.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A dinâmica do carrinho e a oscilação do pêndulo determinam o comportamento do sistema. A haste do pêndulo tende naturalmente a desviar-se da posição vertical, exigindo que o carrinho se mova de maneira a produzir uma reação que mantenha a haste vertical. Conforme será demonstrado na seção subsequente, há relações entre as forças atuantes no carrinho e os torques gerados na base da haste do pêndulo, as quais são descritas por equações diferenciais.

Em suma, com o objetivo de simplificar a formulação das equações governantes do sistema, assume-se a inexistência de atrito na articulação do pêndulo e considera-se um coeficiente de atrito da base móvel. O movimento do carrinho e da haste é restrito ao plano bidimensional, sem movimentos laterais ou tridimensionais, e a força é aplicada na direção linear correspondente ao movimento do carrinho.

Prosseguindo com o desenvolvimento das equações imprescindíveis para a descrição precisa do comportamento do sistema, recorre-se à aplicação das Leis de Newton. Esta abordagem fundamenta-se na mecânica clássica e é crucial para a representação detalhada do movimento linear do carrinho, assim como do movimento angular do pêndulo. Tal representação é realizada por meio da consideração das forças resultantes e dos torques incidentes sobre o sistema.

Neste estudo, adota-se como fundamento a modelagem matemática do sistema formulada por Ogata (2010). Como primeiro passo, considera-se que o centro de massa da haste do pêndulo está localizado em seu centro geométrico. Conseqüentemente, as coordenadas respectivas são expressas por:

$$I\ddot{\theta} = V\ell\sin\theta - H\ell\cos\theta \quad (3.1)$$

A translação do carrinho e do pêndulo pode ser expressa a partir da aplicação da segunda lei de Newton da dinâmica. Conseqüentemente, o movimento horizontal H do centro de gravidade tanto da haste do pêndulo quanto do carrinho é representado pela seguinte equação, respectivamente.

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin \theta) \quad (3.2)$$

$$u - H - b\dot{x} = M\ddot{x} \quad (3.3)$$

Em última análise, o movimento vertical do centro de gravidade da haste do pêndulo é apresentado a seguir.

$$V - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos \theta) \quad (3.4)$$

Substituindo a Equação 3.2 na Equação 3.3, pode-se derivar a seguinte expressão que descreve a saída referente à posição do carrinho, conforme demonstrado a seguir.

$$\ddot{x} = \frac{U + m \ell \sin \theta \dot{\theta}^2 - m \ell \cos \theta \ddot{\theta} - b \dot{x}}{M + m} \quad (3.5)$$

Ao inserir a Equação 3.3 e a Equação 3.4 na Equação 3.1, pode-se derivar a expressão que descreve a saída angular da haste, conforme demonstrado a seguir.

$$\ddot{\theta} = \frac{m \ell}{I + m \ell^2} (\sin \theta g - \cos \theta \ddot{x}) \quad (3.6)$$

As Equações 3.1, 3.2 e 3.4 são caracterizadas por funções senoidais, classificando assim o sistema como não linear. Com o objetivo de manter a haste do pêndulo verticalmente posicionada para cima, e conforme indicado em Ogata (2010), é possível assumir que $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ representam quantidades suficientemente pequenas, permitindo a obtenção de $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ e $\theta \dot{\theta}^2 = 0$. Dessa forma, as Equações 3.1, 3.2 e 3.4 podem ser linearizadas conforme demonstrado a seguir.

$$I \ddot{\theta} = V \ell \theta - H \ell \quad (3.7)$$

$$H = m(\dot{x} + \ell \ddot{\theta}) \quad (3.8)$$

$$V = mg \quad (3.9)$$

Combinando a Equação 3.3 e 3.8, tem-se:

$$u = (M + m)\ddot{x} + m \ell \ddot{\theta} + b \dot{x} \quad (3.10)$$

Finalmente, das Equações 3.7, 3.8 e 3.9, tem-se:

$$m g \ell \theta = (I + m \ell^2) \ddot{\theta} + m \ell \ddot{x} \quad (3.11)$$

Dessa forma, com base no que foi feito em Ogata (2010), as Equações 3.10 e 3.11 ilustram o comportamento do sistema de pêndulo invertido sobre o carro, podendo assim ser consideradas como um modelo matemático linearizado representativo do sistema. Tendo isso em mente, o modelo matemático não linear que descreve o sistema é definido pelas Equações 3.5 e 3.6.

3.1.1 Representação em Função de Transferência

Aplicando a transformada de Laplace às Equações 3.10 e 3.11, as expressões resultantes são as seguintes.

$$U(s) = (M + m)s^2X(s) + mls^2\theta(s) + bsX(s) \quad (3.12)$$

$$mg\ell\theta(s) = (I + m\ell^2)s^2\theta(s) + mls^2X(s) \quad (3.13)$$

Ao isolar o termo $X(s)$ na Equação 3.13 e substituí-lo na Equação 3.12, é possível determinar a função de transferência do sistema para a saída angular, como a seguir.

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{mls}{[(ml)^2 - (M + m)(I + m\ell^2)]s^3 - b(I + m\ell^2)s^2 + mg\ell(M + m)s + bmg\ell} \quad (3.14)$$

Ao isolar o termo $\theta(s)$ na Equação 3.13 e substituí-lo na Equação 3.12, é possível determinar a função de transferência do sistema para a saída da posição, como segue.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{-s^2(I + m\ell^2) + mg\ell}{s^4[(ml)^2 - (I + m\ell^2)(M + m)] - b(I + m\ell^2)s^3 + mg\ell(M + m)s^2 + mglbs} \quad (3.15)$$

3.1.2 Representação em Espaço de Estados

Uma representação de variável de estado é um dos métodos mais eficientes de modelagem e análise de sistemas dinâmicos, especialmente quando sistemas de alta ordem ou sistemas com múltiplas entradas e saídas precisam ser descritos. Essa abordagem é bem estabelecida na área de controle moderno e teoria de sistemas.

Ao proceder à análise das Equações 3.10 e 3.11, verifica-se a presença de quatro integradores. Conseqüentemente, as variáveis de estado x_1, x_2, x_3 e x_4 são definidas como $x_1 =$

$\theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$. Importa salientar que θ e $\dot{\theta}$ caracterizam, respectivamente, o ângulo e a velocidade angular da haste, enquanto x e \dot{x} dizem respeito à posição e à velocidade do carrinho, igualmente de forma respectiva. Especificando as saídas do sistema de acordo com a equação apresentada a seguir.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Portanto, é necessário reordenar as Equações 3.10 e 3.11 de modo que as expressões $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ e \dot{x}_4 sejam formuladas em relação a x_1, x_2, x_3 e x_4 , permitindo assim que o sistema seja modelado por meio de equações em forma matricial e vetorial, conforme mostrado a seguir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{4 \times 1} u \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Nota-se inicialmente que existem as seguintes correlações entre as variáveis.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad (3.19)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x} = x_4 \quad (3.20)$$

Neste ponto, isolando $\ddot{\theta}$ da Equação 3.10 e substituindo o resultado na Equação 3.11, a expressão para \dot{x}_2 é derivada em termos de x_1 e x_4 , como apresentada abaixo.

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{(M+m)mg\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} \theta + \frac{bm\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} \dot{x} - \frac{m\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} u \quad (3.21)$$

Em última análise, isolando \ddot{x} da Equação 3.11 e substituindo o resultado na Equação 3.10, a expressão para \dot{x}_4 é derivada em termos de x_1 e x_4 , como se mostra abaixo.

$$\dot{x}_4 = \ddot{x} = \frac{-m^2g\ell^2}{(M+m)I + Mm\ell^2} \theta + \frac{I + m\ell^2}{(M+m)I + Mm\ell^2} u - \frac{b(I + m\ell^2)}{(M+m)I + Mm\ell^2} \dot{x} \quad (3.22)$$

Ao examinar as Equações 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22, observa-se que estas podem ser reorganizadas em uma forma matricial conforme demonstrado nas Equações 3.17 e 3.18, culminando na seguinte representação em espaço de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & \frac{0}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{bml}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ 0 & 0 & 1 & -b(I+m\ell^2) \\ \frac{-m^2g\ell^2}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & \frac{0}{(M+m)I + Mm\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-m\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ 0 \\ \frac{(I+m\ell^2)}{(M+m)I + Mm\ell^2} \end{bmatrix} * u \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Em conclusão, as matrizes de estados **A**, **B**, **C** e **D** que se apresentam a seguir são derivadas das Equações 3.23 e 3.24 em conformidade com as Equações 2.14 e 2.15.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & \frac{0}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{bml}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ \frac{-m^2g\ell^2}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & \frac{-b(I+m\ell^2)}{(M+m)I + Mm\ell^2} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-m\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} \\ 0 \\ \frac{(I+m\ell^2)}{(M+m)I + Mm\ell^2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0 \quad (3.26)$$

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR ELÉTRICO DE CORRENTE CONTÍNUA

Modelar o comportamento do motor de corrente contínua dentro do contexto do sistema de pêndulo invertido com base móvel constitui um passo crucial para alcançar um entendimento mais detalhado e fiel à realidade deste modelo. O motor, atuando como o dispositivo de acionamento, é o responsável pela geração de força necessária para o deslocamento do carrinho. Na ausência de uma modelagem específica do motor, presume-se erroneamente que a força aplicada ao carrinho é ideal e instantânea, desconsiderando-se as restrições físicas associadas ao motor. Considerando que motores elétricos apresentam características intrínsecas, tais como tempo de resposta, atrito interno, histerese e saturação, todos esses aspectos influenciam diretamente tanto a resposta do sistema quanto a eficácia da estratégia de controle implementada.

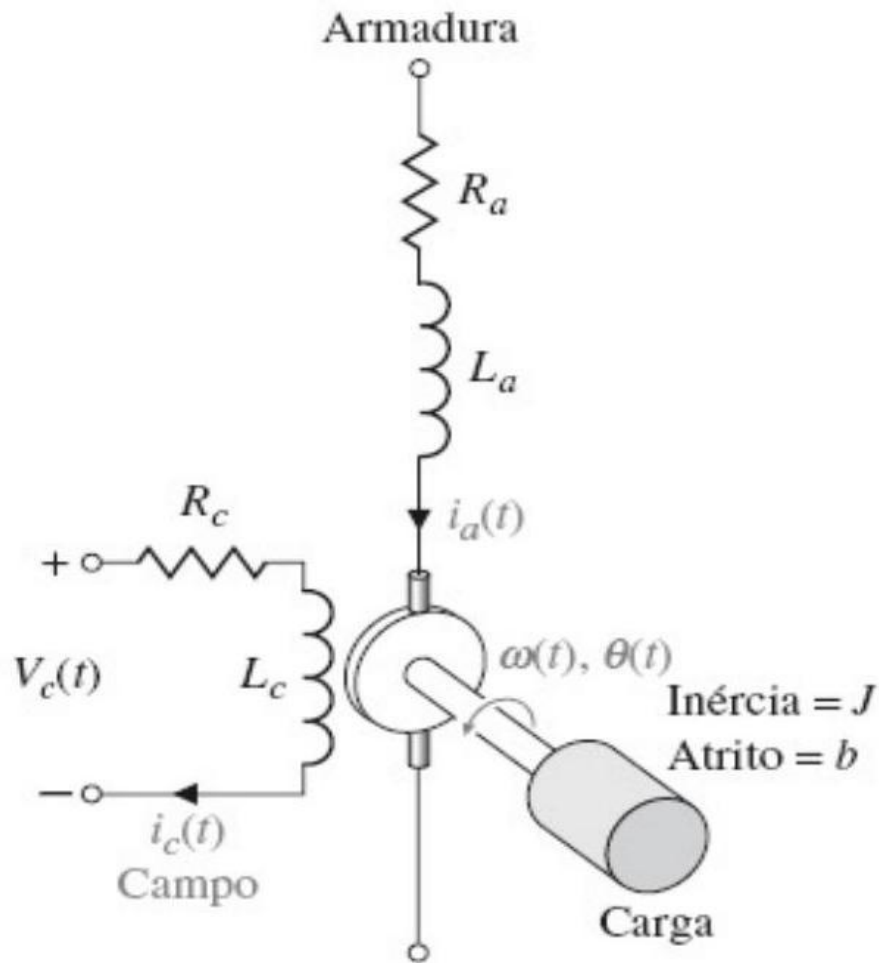
O motor incorpora componentes como a inércia associada ao rotor e o atrito de natureza viscosa, os quais influenciam significativamente a dinâmica operacional do carrinho, bem como a estabilidade do sistema de pêndulo invertido. A partir dessa perspectiva, denota-se a presença de restrições quanto ao torque e à velocidade admissíveis. Tais restrições devem necessariamente ser levadas em consideração durante a concepção do projeto de controle, de modo a evitar a emissão de comandos que não possam ser executados pelo sistema devido a essas limitações impostas.

A modelagem do motor de corrente contínua integra-se à modelagem do sistema, pois é por meio do controle da tensão de armadura que se possibilita o ajuste do ângulo da haste do pêndulo. O motor de corrente contínua, quando controlado por armadura, é amplamente utilizado no controle de sistemas devido à simplicidade de seu controle e à capacidade de linearizar sua dinâmica em torno de pontos operacionais.

Conforme apontado em Dorf e Bishop (2018), o motor de corrente contínua caracteriza-se por seu elevado torque, precisão no controle de velocidade, portabilidade, eficiência na resposta à variação de velocidade e adaptabilidade a múltiplos métodos de controle. Tais características tornam-no aplicável em robôs manipuladores, transportadores de fita, acionadores de discos, máquinas, entre outras aplicações.

A modelagem matemática do motor apresentada nesta seção está fundamentada na literatura previamente estabelecida, conforme indicado em Dorf e Bishop (2018) e sua representação simplificada do modelo de um motor elétrico de corrente contínua é ilustrada na Figura 14.

Figura 14 - Diagrama elétrico simplificado de um motor de corrente contínua.



Fonte: Dorf e Bishop, 2018.

Para modelar de maneira linear a função de transferência de um motor de corrente contínua, assume-se que os efeitos de ordem superior, tais como a histerese e a queda de tensão nas escovas, são negligenciáveis. Observa-se que a tensão de entrada pode ser aplicada tanto nos terminais do campo quanto nos da armadura. Neste contexto, considera-se que o controle do motor será feito pela armadura. Com base nas informações expostas, o fluxo magnético no entreferro é representado por $\phi(t)$ e apresenta uma relação de proporcionalidade com a corrente de campo, conforme a equação subsequente.

$$\phi(t) = K_c i_c(t) \quad (3.27)$$

Dada a intenção de controlar o motor por meio da armadura, a corrente de armadura $i_a(t)$ é designada como a variável de controle, enquanto a corrente de campo $i_c(t)$ permanece constante. Nesse contexto, o campo do estator é provido por meio de uma bobina de campo e

corrente ou por um ímã permanente. Tal abordagem possibilita a obtenção de uma relação linear entre o torque do motor $T_m(t)$ e a corrente de armadura, como demonstrado a seguir utilizando notação em transformada de Laplace.

$$T_m(s) = K_m I_a(s) \quad (3.28)$$

A constante K_m depende diretamente da permeabilidade do material magnético. Conforme ilustrado na Figura 14, a corrente de armadura se relaciona com a tensão aplicada à armadura pela equação apresentada a seguir.

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + V_{ce}(s) \quad (3.29)$$

A tensão $V_{ce}(s)$ resulta da força contraeletromotriz, a qual é proporcional à velocidade angular do eixo de armadura, conforme se expressa na equação a seguir.

$$V_{ce}(s) = K_{ce} \omega_e(s) \quad (3.30)$$

O torque gerado pelo motor corresponde ao somatório do torque aplicado à carga $T_C(s)$ e do torque de perturbação $T_p(s)$, conforme ilustrado na equação a seguir.

$$T_m(s) = T_C(s) + T_p(s) \quad (3.31)$$

O torque de perturbação é empregado na descrição de torques externos que incidem sobre o projeto e que não podem ser antecipadamente previstos, como, por exemplo, as rajadas de vento e a interferência humana. No contexto desta modelagem, assume-se que o torque de perturbação seja nulo, dado que o sistema em sua totalidade está inserido em um ambiente controlado. Diante disso, de acordo com a Figura 14, o torque da carga para a inércia rotativa é escrito a seguir.

$$T_C(s) = J s^2 \theta_e(s) + b s \theta_e(s) \quad (3.32)$$

Ao isolar $I_a(s)$ na Equação 3.29, ao tomar em conta $T_p(s) = 0$ na Equação 3.31 e com o conhecimento de que $w(s) = s\theta(s)$, são obtidas as seguintes expressões para $I_a(s)$.

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_{ce}s\theta_e(s)}{R_a + L_a s} \quad (3.33)$$

$$I_a(s) = \frac{Js^2\theta_e(s) + bs\theta_e(s)}{K_m} \quad (3.34)$$

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO CONJUNTO MOTOR E PÊNDULO

O sistema integral consiste no motor e no pêndulo, com várias maneiras de acoplar o motor ao pêndulo. Assume-se que a entrada $U(s)$ no pêndulo é a força dos motores. Como explicado por van Dijk (1997), a indutância L_a é desprezível, permitindo simplificar a Equação 3.29 para a forma da Equação 3.35.

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + V_{ce}(s) \quad (3.35)$$

Ao incorporar a Equação 3.28 juntamente com a Equação 3.30 na Equação 3.35, resulta a seguinte formulação matemática.

$$T_m(s) = \frac{K_m(V_a - K_{ce}s\theta(s))}{R_a} \quad (3.36)$$

A força linear aplicada ao sistema pode ser expressa em termos do parâmetro N_m , representando a quantidade de motores, juntamente com r , que denota o raio da roda do carrinho. Assim, multiplicando a Equação 3.36 pela relação N_m/r , chega-se à Equação 3.37, a qual denota a força aplicada pelos motores ao pêndulo.

$$F(s) = \frac{N_m K_m (V_a - K_{ce}s\theta(s))}{R_a r} \quad (3.37)$$

O ângulo de rotação das rodas do carrinho está diretamente associado ao deslocamento linear do próprio carrinho, de acordo com a seguinte relação matemática que descreve essa conexão.

$$\theta(s) = \frac{X(s)}{r} \quad (3.38)$$

Com base na expressão apresentada na Equação 3.38, a Equação 3.37 pode ser reformulada, descrevendo-a detalhadamente como a seguir.

$$F = \frac{N_m K_m V_a}{R_a r} - \frac{N_m K_m K_{ce} \dot{x}}{R_a r^2} \quad (3.39)$$

Ao integrar a Equação 3.39 dentro das Equações 3.21 e 3.22, as expressões resultantes podem ser formalizadas da seguinte maneira.

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{(M+m)mgI}{(M+m)I + Mml^2} \theta + \frac{1}{(M+m)I + Mml^2} \left[bml + \frac{N_m ml K_m K_{ce}}{R_a r^2} \right] \dot{x} - \frac{N_m ml K_m}{[(M+m)I + Mml^2] R_a r} V_a \quad (3.40)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{x} = -\frac{m^2 gl^2}{(M+m)I + Mml^2} \theta + \frac{N_m K_m (I + ml^2)}{[(M+m)I + Mml^2] R_a r} V_a - \frac{(I + ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} \left(\frac{N_m K_m K_{ce}}{R_a r^2} + b \right) \dot{x} \quad (3.41)$$

É essencial destacar que as variáveis de estado identificadas como x_1, x_2, x_3 e x_4 são expressamente definidas por $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$. Importa sublinhar que os símbolos θ e $\dot{\theta}$ descrevem, respectivamente, o ângulo e a velocidade angular da haste. Em contrapartida, x e \dot{x} estão associados à posição linear e à velocidade do carrinho com mesma ordem correspondente. A determinação das saídas do sistema é estabelecida conforme a Equação 3.16.

Uma análise pormenorizada das Equações 3.19, 3.20, 3.40 e 3.41 permite observar que estas expressões matemáticas têm a propriedade de serem reorganizadas em uma configuração matricial. Este processo de rearranjo é ilustrado nas Equações 3.16 e 3.42. Através desta transformação, obtemos a formulação de um modelo matemático que é finalmente representado no formato de um espaço de estados, oferecendo uma abordagem sistemática para a descrição de sistemas dinâmicos complexos.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg\ell}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & \frac{1}{(M+m)I + Mm\ell^2} \left(bml + \frac{N_m m \ell K_m K_{ce}}{R_a r^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2 g \ell^2}{(M+m)I + Mm\ell^2} & 0 & 0 & -\frac{(I + m\ell^2)}{(M+m)I + Mm\ell^2} \left(\frac{N_m K_m K_{ce}}{R_a r^2} + b \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{N_m m \ell K_m}{((M+m)I + Mm\ell^2)R_a r} \\ \frac{N_m K_m (I + m\ell^2)}{((M+m)I + Mm\ell^2)R_a r} \end{bmatrix} V_a \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Para se estabelecer a função de transferência completa relativa à posição angular do sistema, deve-se realizar a substituição da Equação 3.39 na Equação 3.10, o que culmina na derivação da Equação 3.43. Observa-se que a entrada do sistema de pêndulo, denotada por $U(s)$, é assumida como equivalente à força linear $F(s)$ exercida pelo motor sobre o carrinho do pêndulo.

$$N_m K_m r V_a(s) = X(s) [R_a r^2 (M + m) s^2 + (N_m K_m K_{ce} + b R_a r^2) s] + m \ell R_a r^2 s^2 \theta(s) \quad (3.43)$$

De acordo com a Equação 3.11, é possível derivar a expressão subsequente, conforme apresentada a seguir.

$$X(s) = \frac{mg\ell\theta(s) - (I + m\ell^2)s^2\theta(s)}{m\ell s^2} \quad (3.44)$$

Em conclusão, ao substituir a Equação 3.44 dentro da Equação 3.43, é possível derivar a função de transferência completa que descreve a relação da posição angular do sistema com a tensão aplicada na armadura. A versão completa desta função de transferência é apresentada na sequência.

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{Q_5 \cdot s}{s^3(Q_4 - Q) - Q_1 \cdot s^2 + Q_2 \cdot s + Q_3} \quad (3.45)$$

Pode-se observar que a Equação 3.45 foi formulada utilizando as constantes Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 com o propósito de tornar sua notação mais simples e clara. Essas

constantes não são arbitrárias, mas sim seguem um conjunto específico de relações definidas a seguir.

$$Q = (I + m\ell^2)(M + m)Rar^2, Q_1 = (I + m\ell^2)(N_m K_m K_{ce} + bR_a r^2) \quad (3.46)$$

$$Q_2 = mg\ell R_a r^2 (M + m), Q_3 = mg\ell (N_m K_m K_{ce} + bR_a r^2) \quad (3.47)$$

$$Q_4 = m^2 \ell^2 R_a r^2, Q_5 = N_m K_m r m \ell \quad (3.48)$$

Para determinar a função de transferência total correspondente à posição linear do sistema, é necessário inicialmente reformular a Equação 3.11. A equação deve ser reorganizada conforme mostrado a seguir.

$$\theta(s) = \frac{m\ell s^2 X(s)}{mg\ell - (I + m\ell^2)s^2} \quad (3.49)$$

Assim, ao inserir a Equação 3.49 na Equação 3.43, é possível derivar a expressão completa da função de transferência que descreve a posição linear total do sistema, conforme demonstrado na sequência.

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{P_2(P_5 - P_6 s^2)}{s^4(P_3 P_4 - P P_6) - P_1 P_6 s^3 + P P_5 s^2 + P_1 P_5 s} \quad (3.50)$$

A análise da Equação 4.2 revela que ela foi desenvolvida incorporando as constantes $P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ e P_6 . A principal intenção de empregar estas constantes é simplificar e clarificar a notação utilizada. Importa ressaltar que tais constantes não são escolhidas aleatoriamente, elas obedecem a um conjunto bem definido de relações que serão detalhadamente descritas a seguir.

$$P = R_a r^2 (M + m), P_1 = N_m K_m K_{ce} + bR_a r^2, P_2 = N_m K_m r \quad (3.51)$$

$$P_3 = m\ell R_a r^2, P_4 = m\ell, P_5 = mg\ell, P_6 = I + m\ell^2 \quad (3.52)$$

4 CASO DE ESTUDO

Neste capítulo, será elaborada uma exposição detalhada de uma aplicação prática referente à teoria previamente discutida. O intuito deste segmento é elucidar o emprego dos conceitos abordados no contexto de uma situação real ou simulada, permitindo a validação meticulosa dos resultados alcançados. Essa abordagem não apenas ilustra a aplicabilidade da teoria, mas também reforça a sua relevância prática, evidenciando de maneira clara as suas implicações e benefícios em situações concretas.

4.1 PARÂMETROS PÊNULO E MOTOR

Os parâmetros aplicados ao pêndulo serão aqueles derivados do estudo conduzido por Alves (2018). Nesse estudo, foi delineada, por meio de experimentações em ambiente laboratorial, uma série de parâmetros que são apresentados na Tabela 1. Esses parâmetros foram essenciais para a construção de um protótipo de sistema de pêndulo invertido, assegurando a precisão e eficiência do mesmo.

Tabela 1 - Valor das constantes do pêndulo invertido.

Constante	Descrição	Valor	Unidade
M	Massa do carrinho	0,5676	kg
m	Massa da haste	0,16985	kg
ℓ	Comprimento da haste	0,239	m
I	Momento de inércia do pêndulo	0,0032	kgm ²
g	Aceleração da gravidade	9,81	m/s ²
b	Coefficiente viscoso de amortecimento translacional do carro	5,4	Ns/m

Fonte: Alves, 2018.

Os parâmetros implementados no motor são aqueles que foram obtidos a partir da pesquisa realizada por Pires (2023). Este trabalho delineou, por intermédio de valores documentados na literatura, os parâmetros específicos do motor de corrente contínua utilizado no Lego EV3, conforme exibido na Tabela 2. Esses parâmetros foram fundamentais na montagem de um protótipo de um pêndulo invertido, que é operado por um motor de corrente contínua.

Tabela 2 - Valor das constantes do motor elétrico de corrente contínua.

Constante	Descrição	Valor	Unidade
J	Momento de Inércia	0,0021	kgm ²
R_a	Resistência do Motor	6,69	Ω
K_m	Torque	0,317	Nm/A
b	Coeficiente de atrito	0,0012	Nmrad/s
L_a	Indutância da armadura	0,00488	H
K_{ce}	FCEM	0,468	Vs/rad

Fonte: Pires, 2023.

4.2 O MODELO MOTOR E PÊNDULO

A função de transferência do sistema completo quanto à posição angular é obtida usando os valores descritos pelas Tabelas 1 e 2 na Equação 3.45, resultando na seguinte expressão.

$$G_{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{-0,001094s}{9,506 \times 10^{-5}s^3 + 0,00467s^2 - 0,003549s - 0,1441} \quad (4.1)$$

Ao realizar a fatoração da Equação 4.1, a expressão que se obtém pode ser escrita como segue detalhadamente.

$$G_{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{-11,507s}{(s + 49,26)(s + 5,482)(s - 5,615)} \quad (4.2)$$

Eventualmente, a derivação da função de transferência que caracteriza o comportamento do sistema completo em relação à posição linear é alcançada pela integração dos valores específicos indicados nas Tabelas 1 e 2 dentro do contexto matemático fornecido pela Equação 4.2. Esse procedimento conduz à formulação apresentada a seguir.

$$G_x(s) = \frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0,0003476s^2 - 0,01073}{9,506 \times 10^{-5}s^4 + 0,00467s^3 - 0,003549s^2 - 0,1441s} \quad (4.3)$$

Na execução do processo de fatoração da Equação 4.3, a fórmula resultante pode ser descrita de maneira mais pormenorizada da seguinte forma.

$$G_X(s) = \frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{3,6571(s - 5,556)(s + 5,556)}{s(s + 49,26)(s + 5,482)(s - 5,615)} \quad (4.4)$$

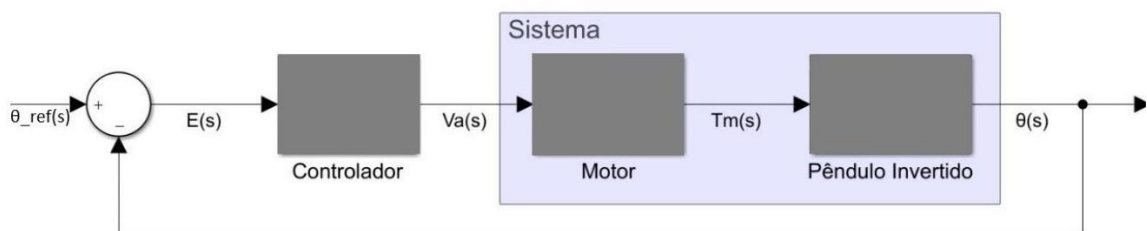
Assim, as matrizes de estado designadas como **A**, **B**, **C** e **D**, que serão introduzidas a seguir, são obtidas por meio de derivação das equações 3.16 e 3.42. Este procedimento envolve a utilização dos valores paramétricos especificados nas Tabelas 1 e 2, resultando nas matrizes seguintes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 37,3313 & 0 & 0 & 33,2504 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,0550 & 0 & 0 & -49,1277 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -11,5066 \\ 0 \\ 3,6571 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Torna-se claro que, na tarefa de desenvolvimento do sistema integral, foi crucial levar em conta que a entrada do sistema de pêndulo invertido consistisse na força linear gerada pelo motor. No entanto, este estudo foca exclusivamente na saída relacionada à posição angular da haste, assumindo que o carrinho disponha de espaço suficiente para movimentar-se e manter a haste em posição vertical. A partir dessa premissa, o diagrama de blocos do sistema completo é apresentado na Figura 15.

Figura 15 - Diagrama de bloco do sistema de controle do θ .



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Os resultados do projeto de controladores PID e suas modificações, bem como o desempenho do sistema de controle com um observador de estados, serão examinados em detalhes na seção seguinte.

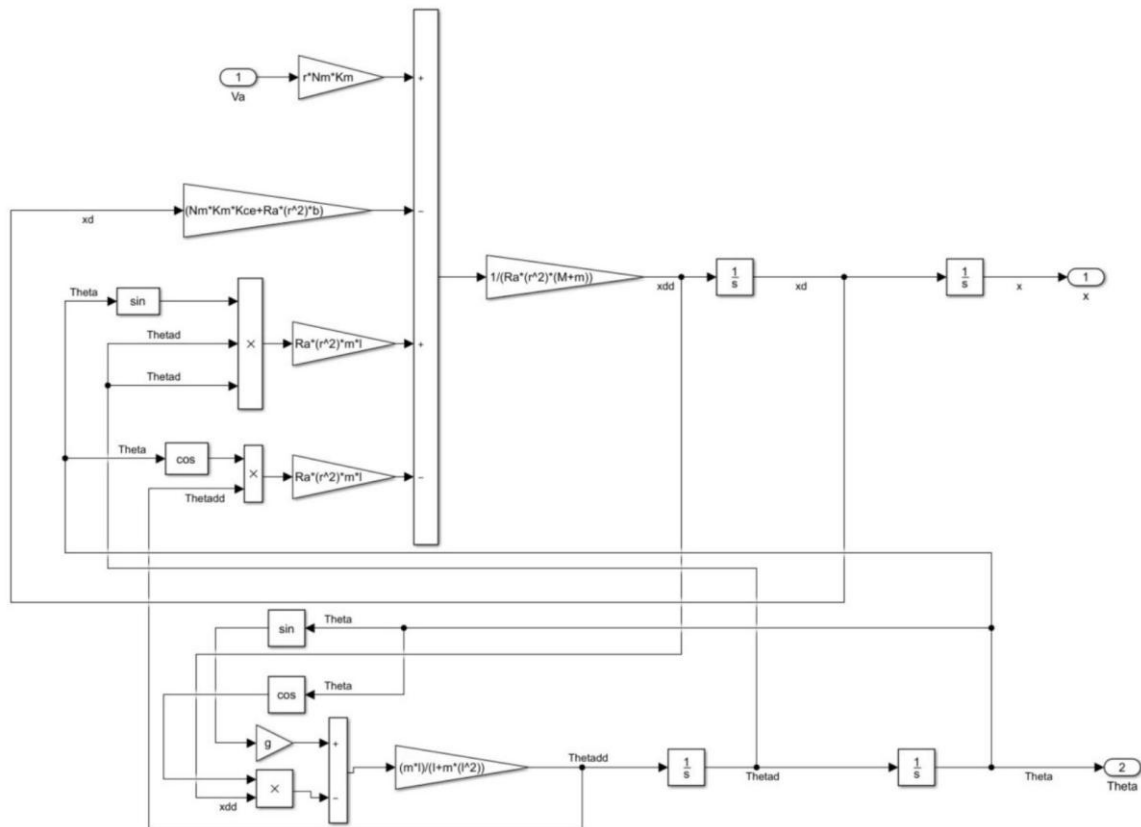
4.2.1 Validação operacional do modelo

Segundo Chwif e Medina (2014), a validação e verificação de modelos de simulação são essenciais para garantir o sucesso de um estudo de simulação. Com isso, a validação tem o intuito de examinar se as observações feitas, o grau de detalhamento e o alcance do modelo, entre outros fatores, irão representar o sistema a ser simulado de maneira apropriada. Conseqüentemente, é necessário derivar o modelo não linear que descreve o sistema composto pelo motor e pelo pêndulo, partindo das Equações 3.5 e 3.39. A partir dessa análise, pode-se extrair a expressão detalhada a seguir.

$$\ddot{x} = \frac{rN_m K_m V_a - \dot{x}(N_m K_m K_{ce} + R_a r^2 b) + R_a r^2 m l \sin \theta \dot{\theta}^2 - R_a r^2 m l \cos \theta \ddot{\theta}}{(M + m)R_a r^2} \quad (4.7)$$

Para assegurar a precisão do modelo dinâmico derivado das Equações 3.6 e 4.7, foram realizadas simulações no Simulink, conforme ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Equações 3.5 e 4.7 projetadas no Simulink

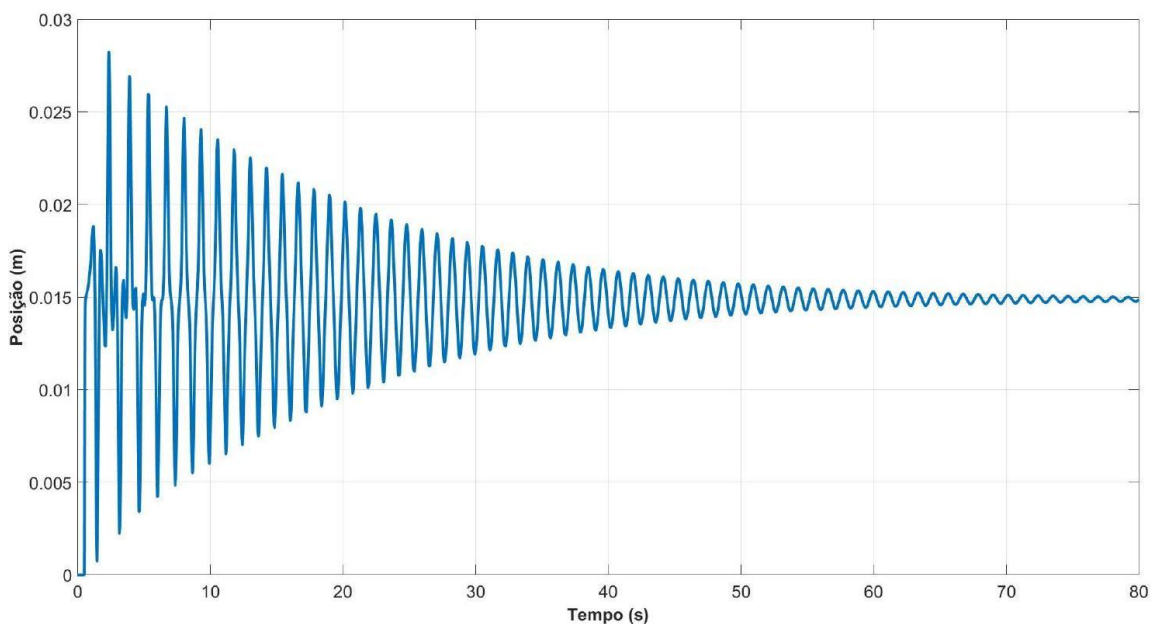


Fonte: elaborado pelo próprio autor.

O processo de validação começa com a aplicação de um ligeiro impulso ao sistema, semelhante a um breve empurrão no carro a partir de uma posição de repouso. Conseqüentemente, espera-se que o sistema físico real reaja com um pequeno movimento do carrinho, resultando na queda da haste do pêndulo. Esta haste deve oscilar em torno de sua posição de estabilidade, que é verticalmente orientada para baixo, até alcançar um estado de equilíbrio. A segunda etapa de validação envolve soltar a haste do pêndulo de uma posição inicial arbitrária, sem aplicar influências externas. Assim, prevê-se que o sistema físico original execute movimentos oscilatórios de pequeno porte no carrinho, ao redor de sua posição de partida, enquanto a haste do pêndulo continua a oscilar até atingir seu estado de equilíbrio, que é a posição vertical apontando para baixo.

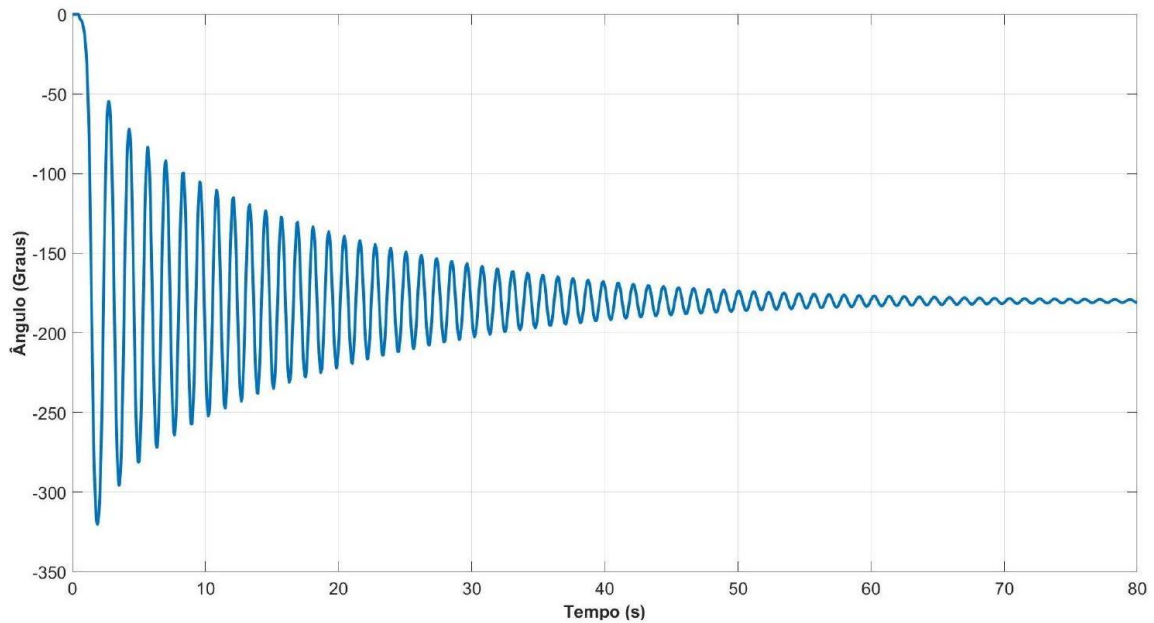
No início do processo de validação, quando um pequeno impulso é aplicado ao sistema começando com um ângulo inicial de $\theta = 0^\circ$ e uma posição inicial de $x = 0$ m, observa-se que o carrinho demonstra oscilações características em torno de sua posição final. Isto pode ser visualizado na Figura 17. Simultaneamente, a haste do pêndulo também executa oscilações, conforme mostrado na Figura 18. Este comportamento se manifesta em torno da posição original, com o carrinho movendo-se para frente e para trás até, gradualmente, estacionar-se próximo à posição de origem. Ao mesmo tempo, a haste do pêndulo decai da posição inicial e oscila dentro da posição vertical voltada para baixo, até que finalmente atinge uma condição de equilíbrio em $\theta = -180^\circ$.

Figura 17 - Efeito de um pequeno impulso no carro.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

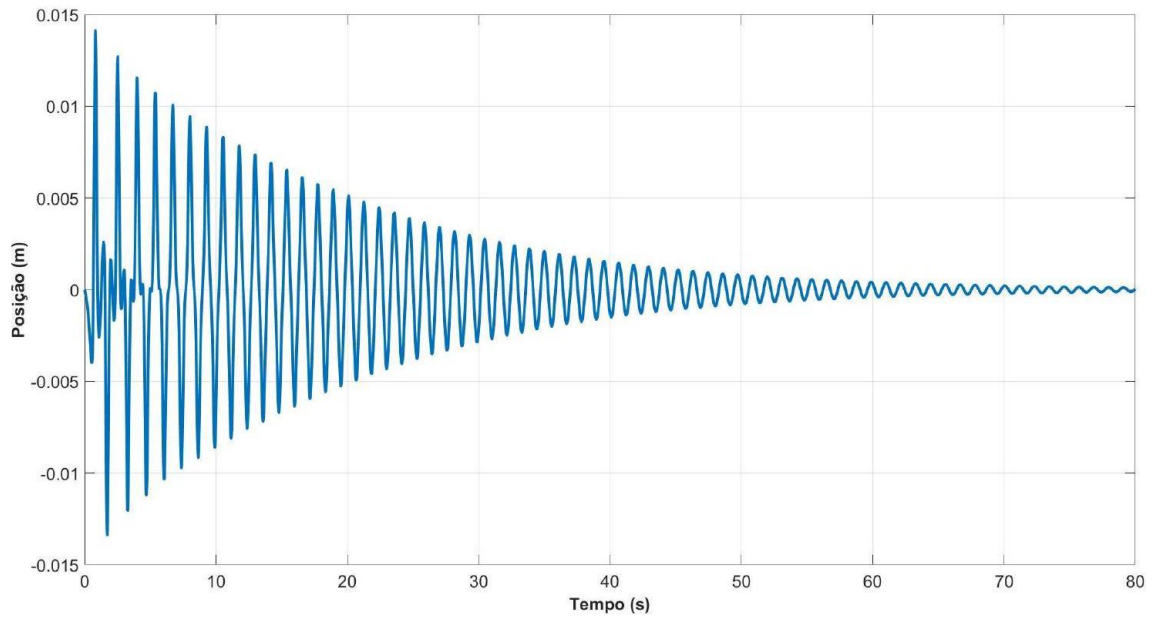
Figura 18 - Efeito de um pequeno impulso na haste do pêndulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

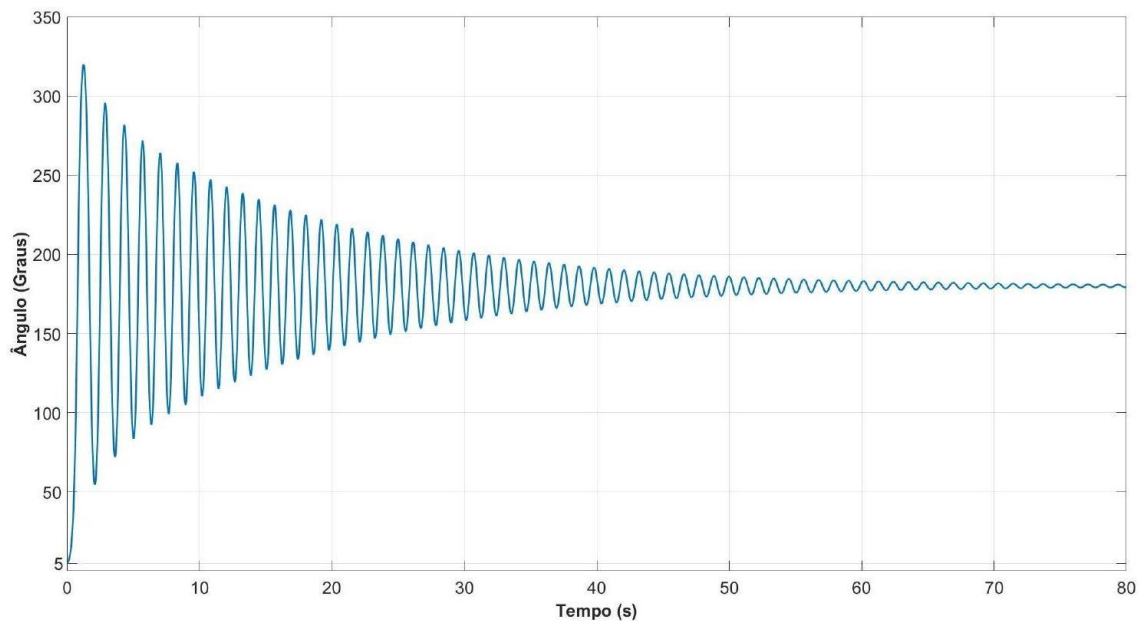
Durante a segunda fase do processo de validação, a haste do pêndulo é solta a partir de um ângulo inicial de $\theta = 5^\circ$, enquanto o carrinho permanece fixo em $x = 0$ m. Um comportamento semelhante ao observado na fase inicial do processo de validação é percebido. Nota-se que o carrinho exibe as mesmas oscilações características em relação à origem, conforme ilustrado na Figura 19. Paralelamente, a haste do pêndulo também oscila em torno de sua posição de equilíbrio em $\theta = 180^\circ$, como mostrado na Figura 20. Observa-se que o ângulo final apresenta um valor positivo em relação à primeira fase, resultado do sentido de rotação da haste. Notadamente, apesar da ausência de qualquer impulso aplicado, o movimento pendular ocasiona uma oscilação cíclica do carrinho para frente e para trás, resultando em um leve deslocamento ao redor da origem. Com o tempo, o carrinho gradualmente retorna ao repouso próximo da origem.

Figura 19 - Efeito da condição inicial de $\theta = 5^\circ$ no carro.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 20 - Efeito da condição inicial de $\theta = 5^\circ$ na haste do pêndulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Os padrões evidenciados nas Figuras 17, 18, 19 e 20 mostram uma concordância com as respostas antecipadas do sistema físico real. Essa congruência sugere que o modelo matemático formulado para este sistema está devidamente apropriado, subsidiando a precisão da simulação.

5 SISTEMA CONTROLADO

No presente capítulo, será conduzida uma análise detalhada sobre os controladores utilizando as metodologias discutidas na revisão teórica prévia. Por meio desse estudo, busca-se desenvolver uma resposta eficaz para mitigar o problema da instabilidade observada no sistema de pêndulo invertido. Adicionalmente, são efetuadas simulações visando à correção da instabilidade inerente ao sistema. Além disso, propõe-se uma análise comparativa do desempenho empregando métricas dos controladores dadas anteriormente.

5.1 ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO

Para possibilitar um desenvolvimento apropriado do projeto de um controlador, é essencial estabelecer um conjunto detalhado de especificações de desempenho. Essas especificações atuam como garantias de que o sistema projetado cumprirá efetivamente as condições operacionais almejadas.

Neste trabalho é dada ênfase às seguintes especificações de desempenho apresentadas por Ribeiro (2007): máximo sobressinal (M_p) menor ou igual a 5% e tempo de acomodação (t_s) em torno de 0,2 segundos. No início, aplica-se a técnica de aproximação através de polos dominantes de segunda ordem, o que é descrito pela equação a seguir.

$$r_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d \quad (5.1)$$

No qual, a definição de σ e ω_d é apresentada por.

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad (5.2)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.3)$$

Observa-se que os valores de ζ e ω_n são determinados com base nas especificações de desempenho definidas durante o processo de desenvolvimento do controlador. O máximo sobressinal M_p e o tempo necessário para que o sistema se estabilize, denotado por t_s , conforme o critério de 2%, podem ser determinados da seguinte maneira.

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (5.4)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (5.5)$$

Ao substituir $M_p = 0,05$ e $t_s = 0,2s$ nas Equações 5.4 e 5.5 , obtêm-se os seguintes resultados.

$$\zeta = \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(M_p))^2}} = 0,69 \quad (5.6)$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = 28,985 \quad (5.7)$$

Conseqüentemente, ao incorporar na Equação 5.1 os valores obtidos a partir das Equações 5.6 e 5.7, é possível derivar a expressão a seguir:

$$r_{1,2} = -20 \pm j20,98 \quad (5.8)$$

Para o desenvolvimento subsequente dos controladores, será considerada a configuração desejada dos polos de malha fechada, que é especificada através da Equação 5.8. Este procedimento garantirá que o posicionamento dos polos resulte em um desempenho do sistema conforme as expectativas.

5.2 PROJETO DO CONTROLADOR PID

Nesse contexto, o enfoque é dado apenas na posição angular como a saída do sistema de pêndulo invertido, sendo este o parâmetro crítico que necessita de controle. A função primordial dos controladores é a de sustentar o pêndulo na posição vertical de forma estável. Para alcançar esse propósito, empregam-se as Equações 2.32 e 2.33 que são aplicadas para determinar os ganhos típicos de um controlador PID.

Ao rever a Equação 4.2, observa-se dois polos estáveis situados nas posições $s_1 = -49,26$ e $s_2 = -5,482$. Além disso, há um polo instável em $s_3 = 5,615$ e um zero na origem.

Phillips e Harbor (1997) aponta que, para realizar o cálculo, é necessário estimar ou definir um dos três parâmetros do controlador. Após a realização de experimentos via simulação, decidiu-se pelo seguinte valor a ser utilizado para o ganho integral.

$$K_I = -14148 \quad (5.9)$$

A Equação 5.8 pode ser reescrita da seguinte forma, onde o argumento está em radianos.

$$r_{1,2} = 28,9855 \angle \pm 2,3323 \quad (5.10)$$

O sistema em malha aberta possui a função de transferência representada por $G_\theta(s)$, conforme indicado na Equação 4.2. Ao calcular o módulo e a fase de $G_\theta(r_1)$, os valores respectivos são determinados como segue.

$$|G(r_1)| = 0,0110 \quad \angle G(r_1) = 0,2204 \text{rad} \quad (5.11)$$

Substituindo os valores de 5.9, 5.10 e 5.11 em 2.32 e 2.33 encontram-se os seguintes valores.

$$K_p = -743,5717 \quad (5.12)$$

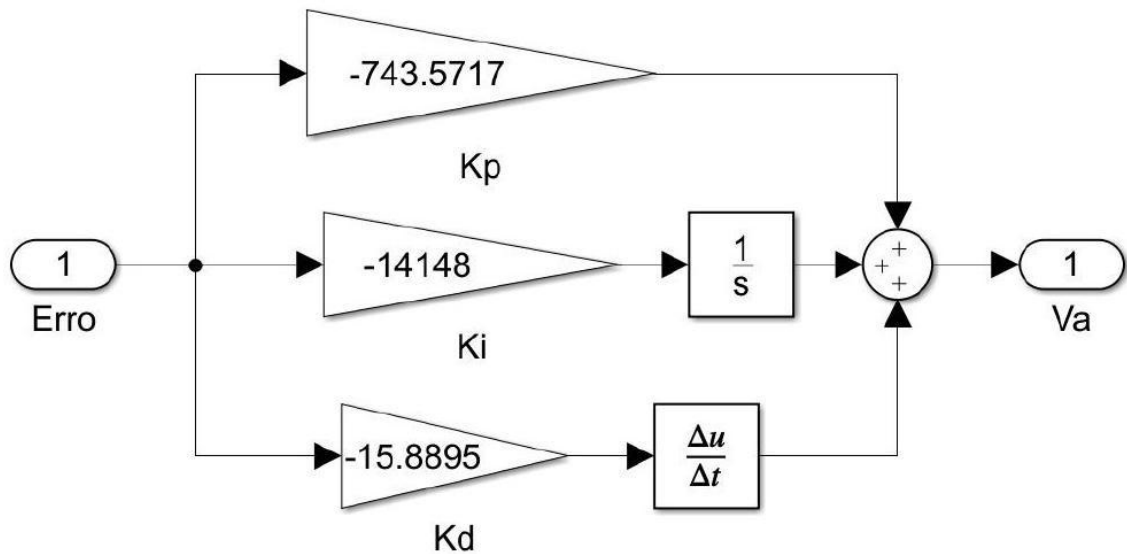
$$K_D = -15,8895 \quad (5.13)$$

Conforme a Equação 4.2, a planta apresenta um ganho negativo, o que justifica a necessidade de ganhos negativos no controlador para manter a característica de realimentação negativa, garantindo a direção correta da ação de controle. Ao inserir os valores dos ganhos K_p , K_I e K_D na Equação 2.16, chega-se à seguinte expressão como resultado.

$$G_c(s) = \frac{-15,89s^2 - 743,6s - 14148}{s} \quad (5.14)$$

Tendo em mãos os valores dos ganhos K_p , K_I e K_D , pode-se elaborar o diagrama de blocos do controlador PID no Matlab, como ilustrado na Figura 21.

Figura 21 - Diagrama PID



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Conforme discutido anteriormente, no contexto de variantes do controlador PID, especificamente as configurações PI-D e I-PD, mantêm-se os mesmos valores dos ganhos K_P , K_I e K_D , já determinados previamente. Diante disso, surge a necessidade de calcular os valores das constantes de tempo T_i e T_d . Segundo Ogata (2010), a relação matemática que conecta T_i e T_d aos ganhos K_I , K_D e K_P é expressa pelas equações apresentadas abaixo.

$$T_i = \frac{K_P}{K_I} \quad (5.15)$$

$$T_d = \frac{K_D}{K_P} \quad (5.16)$$

As equações apresentadas desempenham um papel fundamental na tradução entre os parâmetros de ganho do controlador PID e os tempos de ajuste associados. Ao inserir os valores provenientes das Equações 5.9, 5.12, e 5.13 nas Equações 5.15 e 5.16, obtêm-se os seguintes resultados mediante cálculos que consideram as respectivas relações e interações entre as constantes específicas de cada equação mencionada.

$$T_i = \frac{-743,5717}{-14148} = 0,0526 \quad (5.17)$$

$$T_d = \frac{-15,8895}{-743,5717} = 0,0214 \quad (5.18)$$

5.3 GRÁFICO DO LUGAR DAS RAÍZES

Ogata (2010) postula que as características de resposta transitória de um sistema de controle de malha fechada estão intrinsecamente ligadas ao posicionamento de seus polos de malha fechada. Nos casos em que o ganho de malha do sistema está sujeito a ajustes, o posicionamento desses polos de malha fechada torna-se dependente da magnitude específica do ganho de malha selecionado para implementação. Conseqüentemente, em determinados sistemas, é possível deslocar os polos de malha fechada para as posições almejadas mediante apenas um ajuste apropriado no ganho. Assim, o desafio de desenvolvimento pode, em certos casos, ser simplificado para a determinação do ganho mais adequado a ser utilizado.

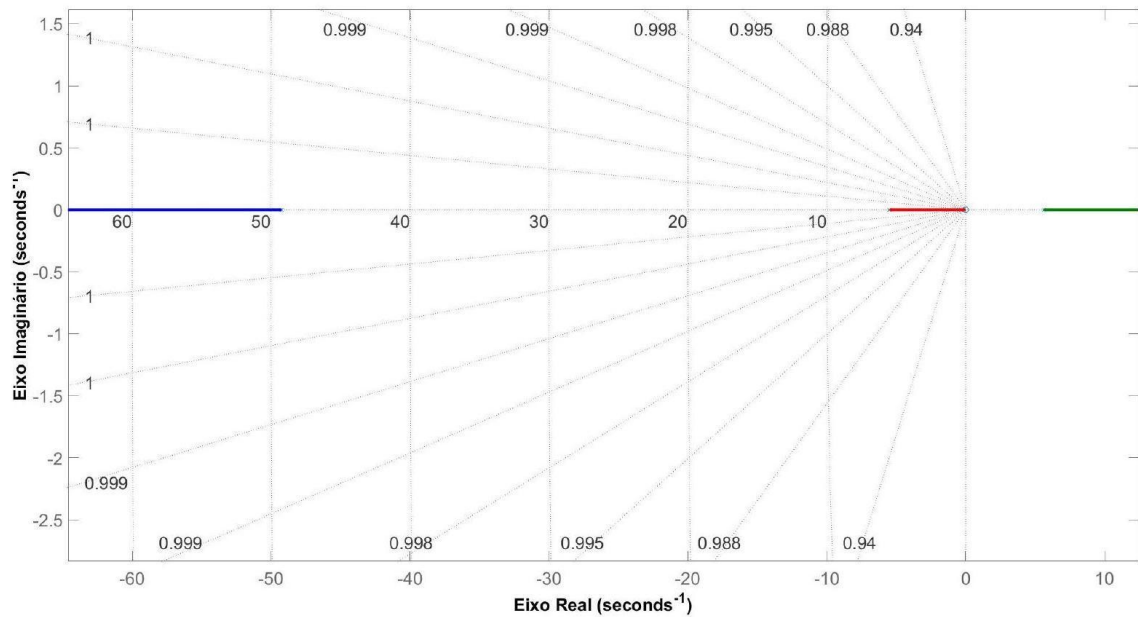
Conforme analisado por Ogata (2010), o gráfico do lugar das raízes possibilita a representação gráfica das raízes da equação característica ao longo de todos os valores de um parâmetro específico do sistema em consideração. Dessa forma, torna-se possível prever com exatidão como a modificação do valor do ganho, bem como a inserção de polos e/ou zeros de malha aberta, pode influenciar a posição dos polos de malha fechada no sistema.

Conforme discutido em Ogata (2010), a estabilidade de um sistema linear em malha fechada pode ser analisada observando a localização dos seus polos no plano s . Se qualquer um desses polos estiver localizado no semiplano direito do plano s , isso indicará que os polos entram em modo dominante, o que leva ao aumento ou a oscilações na resposta transitória com amplitudes progressivamente maiores, ou seja, o sistema é instável. Conseqüentemente, se todos os polos de malha fechada localizarem-se à esquerda do eixo $j\omega$, qualquer resposta transitória tenderá a atingir o equilíbrio, caracterizando o sistema como estável.

Os polos de um sistema com malha fechada podem ser identificados por meio da localização das raízes da equação característica associada. Um método eficaz e relativamente fácil para determinar essas raízes é o método do lugar das raízes. Por meio da aplicação deste método, as raízes da equação característica podem ser graficamente representadas em função de todas as possíveis variações de um determinado parâmetro do sistema. Conforme indicado por Ogata (2010) o parâmetro utilizado geralmente refere-se ao ganho, contudo, qualquer outra variável da função de transferência em malha aberta pode ser adotada para essa finalidade. No presente estudo, opta-se por escolher o ganho como parâmetro.

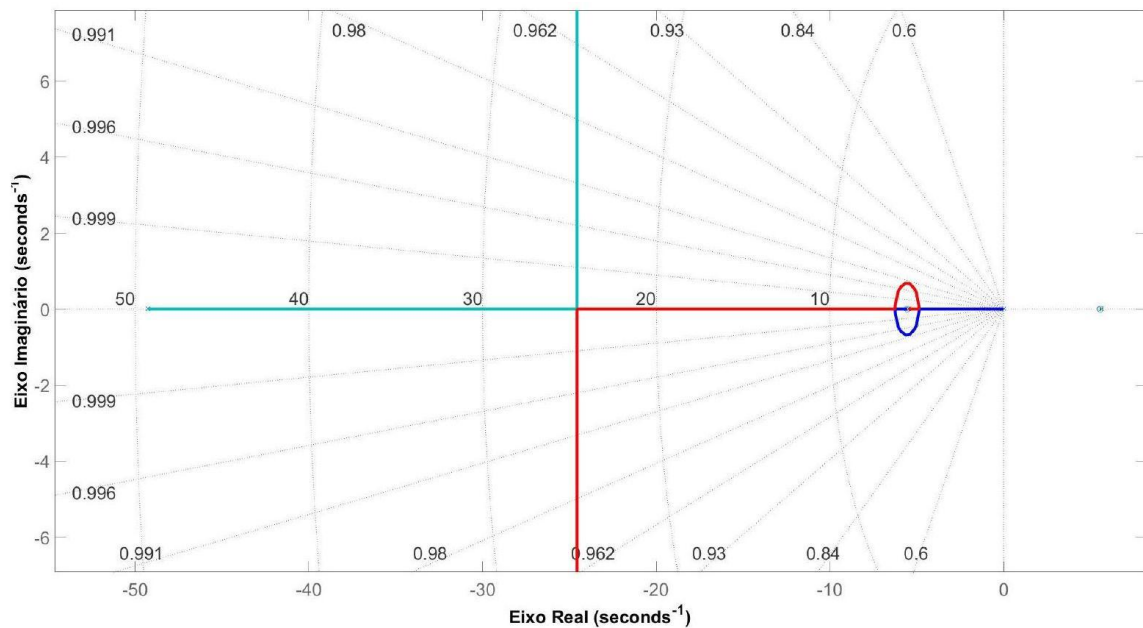
Conseqüentemente, o lugar das raízes do sistema corresponde aos pontos onde se situam os polos de malha fechada à medida que o ganho é alterado desde o valor zero até atingir o infinito. Assim, os gráficos do lugar das raízes, derivados através das Equações 4.2 e 4.4, são exibidos nas Figuras 22 e 23.

Figura 22 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.2.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 23 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.4.

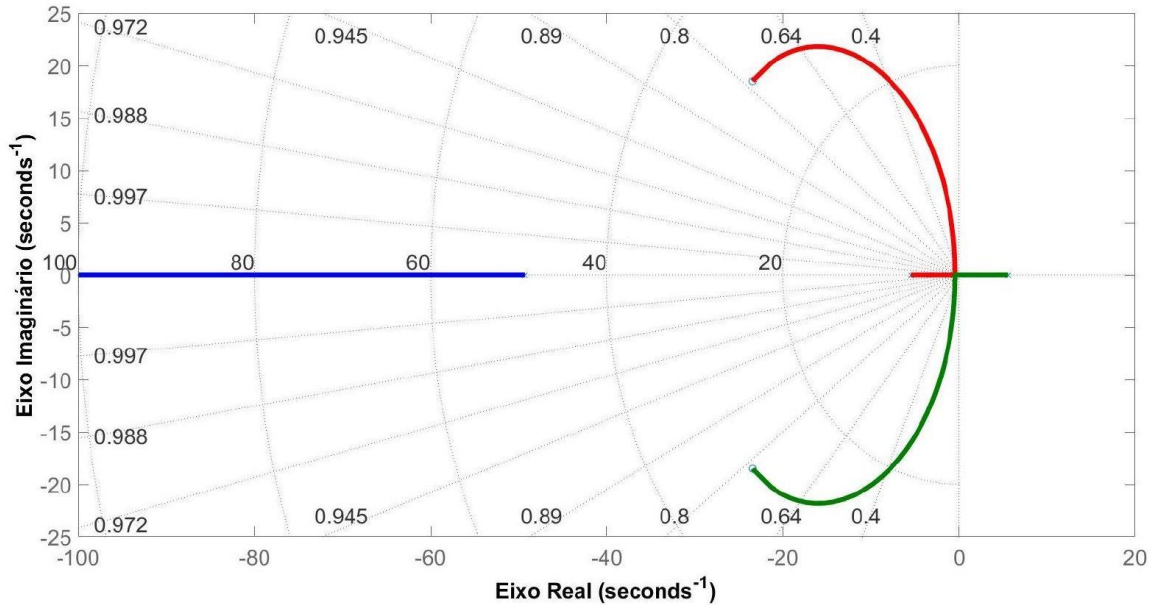


Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ao examinar as Figuras 22 e 23, observa-se a existência de polos no semiplano direito do plano s . Conseqüentemente, como discutido por Ogata (2010), o sistema é caracterizado pela instabilidade. Para mitigar esse problema, torna-se essencial o desenvolvimento de controladores adequados com o intuito de ajustar o sistema e assegurar sua estabilidade. Portanto, o ajuste de ganho do sistema não é suficiente para obter o desempenho desejado.

O Lugar das Raízes é uma ferramenta fundamental no projeto de controladores, pois permite examinar o comportamento dinâmico de um sistema de controle realimentado à medida que o ganho da malha varia. No presente trabalho, após o projeto de um controlador PID, foi traçado o Lugar das Raízes para a planta considerada, conforme Figura 24.

Figura 24 - Lugar geométrico das raízes obtido a partir de 4.4 e 5.14



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

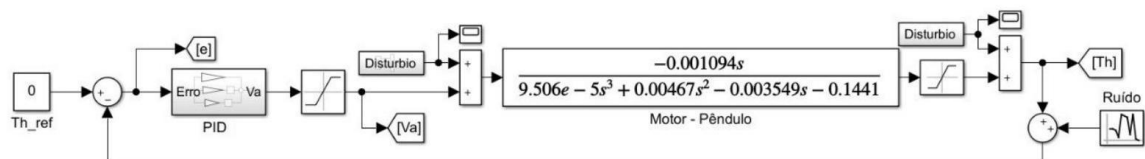
Analisando a Figura 24 observa-se que parte das trajetórias do Lugar das Raízes se desloca para o semiplano direito do plano complexo, indicando a existência de regiões potencialmente instáveis para determinados valores de ganho. Entretanto, ao aplicar os valores fixos de K_p , K_I e K_D projetados (ver Figura 21), e calcular os polos da função de transferência em malha fechada ($s_{1,2} = -20 \pm 20,98j$, $s_3 = -192$ e $s_4 = 0$), constata-se que todos os polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, com exceção de um polo na origem. Este polo na origem é característico da presença da ação integral do controlador, e contribui para a eliminação do erro em regime permanente, especialmente frente a entradas do tipo degrau.

Portanto, apesar da presença de ramos instáveis no Lugar das Raízes, a escolha adequada dos ganhos PID resultou em um sistema estável, com raízes reais negativas e um par de raízes complexas conjugadas com parte real negativa, indicando uma resposta transitória com componente oscilatório amortecido.

5.3.1 Simulação PID

Para a execução das simulações, utiliza-se a ferramenta Simulink do MatLab. A Figura 25 ilustra o modelo de simulação do sistema com o controlador PID, que é constituído por três blocos organizados em série na linha direta.

Figura 25 - Diagrama de blocos do sistema com controle PID.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

No bloco de controle PID é implementado com seus ganhos determinados de acordo com o seu projeto, conforme ilustrado na Figura 21.

Ao examinar a Figura 25, observa-se que existe um bloco identificado como motor pêndulo, apresentando a função de transferência do sistema completo, conforme mostrado na Equação 4.2. Ademais, observa-se a inserção de dois blocos de saturação. O bloco primário, posicionado em frente ao controlador PID, tem como finalidade restringir o sinal de controle V_a para que se evitem excessos que possam comprometer a operação do motor, assim, o sinal é limitado em ± 12 V. O bloco secundário, posicionado em frente ao pêndulo, tem como finalidade ilustrar a limitação do movimento da haste do pêndulo em $\pm \pi/2$ rad. A limitação mencionada em $\pm \pi/2$ rad decorre das restrições físicas do pêndulo, o qual é incapaz de exceder um ângulo de $\pm \pi/2$ rad em qualquer direção.

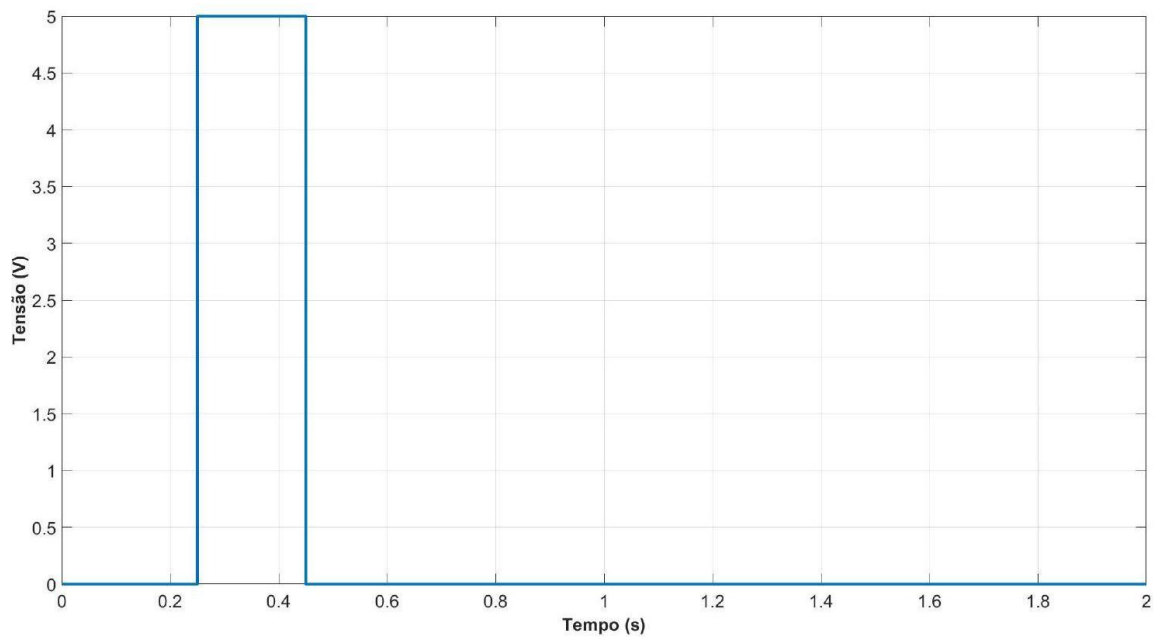
Com o propósito de demonstrar a eficácia do controlador PID, foram empregados dois blocos geradores de distúrbios e um de ruído na malha de realimentação. Os blocos de distúrbios serão usados para representar alguma perturbação no sistema, enquanto o bloco de ruído tem a função de simular incertezas no sistema. Ademais, na entrada do sistema, o sinal de referência fixa-se em 0 rad, o que denota a posição vertical, sendo este o ponto de equilíbrio instável.

A Figura 26 ilustra um sinal de perturbação no torque do motor, introduzindo um impulso na tensão da armadura do motor. Este procedimento físico resulta em uma alteração dinâmica do movimento do carrinho, que, por sua vez, provoca uma variação na posição vertical da vara do pêndulo, causando, assim, uma modificação em seu comportamento normal.

Observando a Figura 26, percebe-se que o sinal possui o formato de uma onda quadrada, caracterizada por uma amplitude de 5 V e com um tempo de duração de 0,2 s. Ademais, um

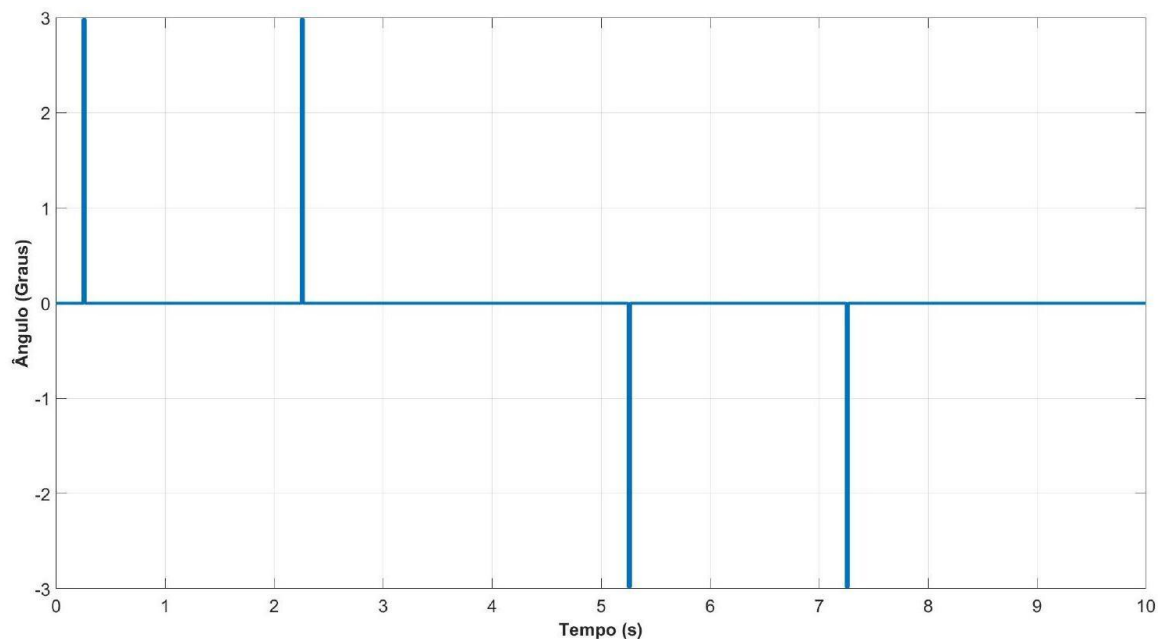
signal de distúrbio será introduzido na saída do bloco do pêndulo, com o objetivo de simular um pequeno deslocamento na haste do pêndulo. De acordo com a Figura 27, o referido sinal é gerado por quatro pulsos de forma quadrada que possuem um tempo de duração de 0,02s, começando em 0,25s. A amplitude deste pulso é de 0,052 rad ou, equivalentemente, 3° . Destes, dois pulsos são negativos e dois são positivos, cada um começando em um momento distinto.

Figura 26 - Sinal de distúrbio no torque do motor.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

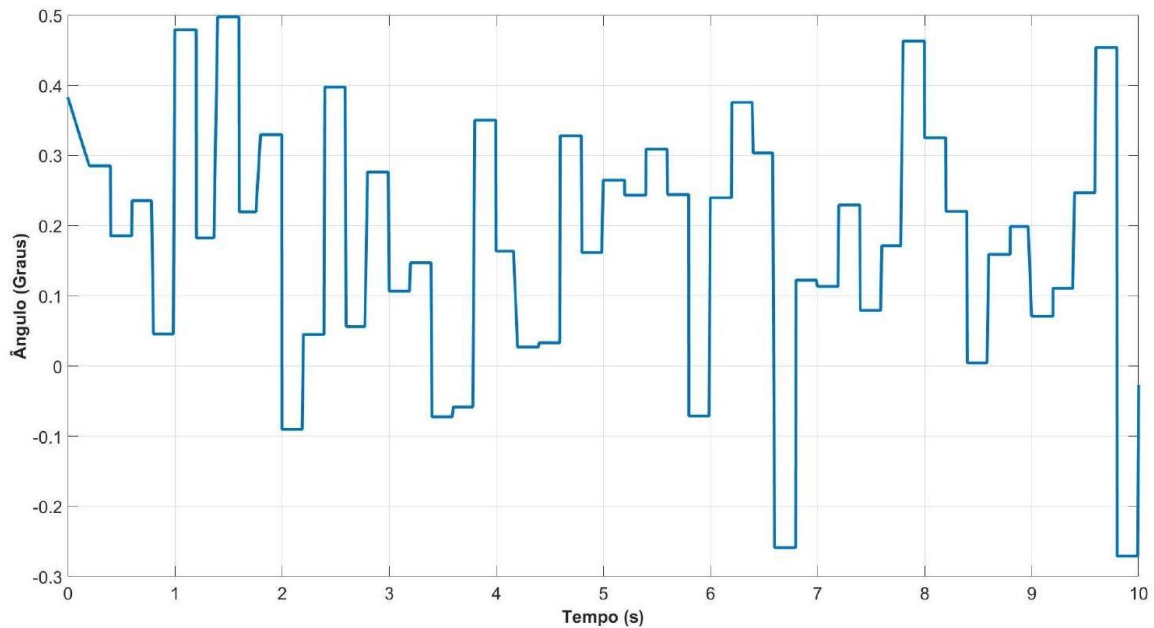
Figura 27 - Sinal de distúrbio na haste do pêndulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Por último, será implementado um módulo de Ruído Gaussiano, visando à simulação de ruído aleatório, tal como aquele presente em sensores, variações na planta e interferências externas. A Figura 28 representa o sinal usado como ruído.

Figura 28 - Sinal de ruído.



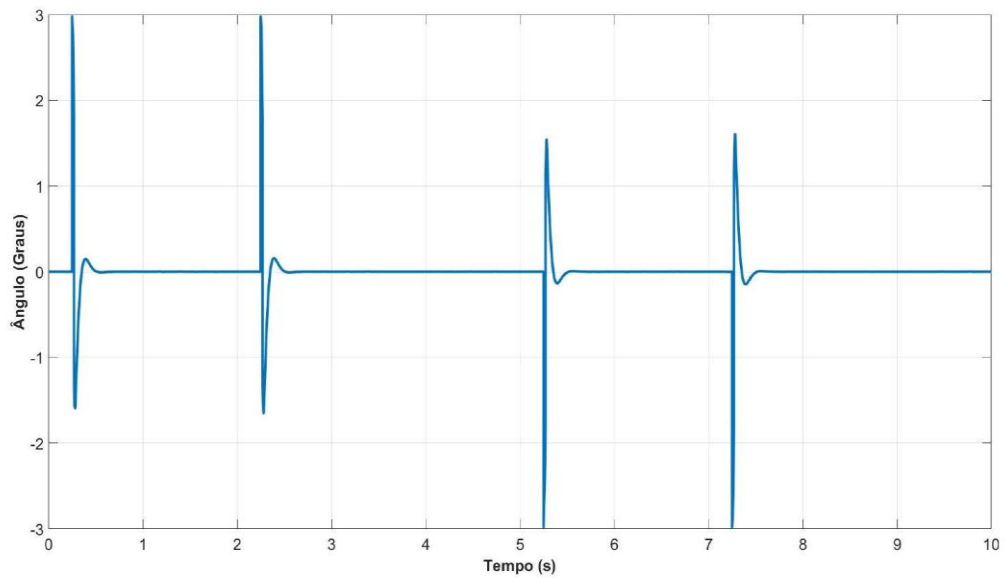
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para avaliar a capacidade do controlador PID em estabilizar a haste do pêndulo, foram selecionados os seguintes sinais mostrados na Figura 25: sinal de controle (V_a), ângulo da haste do pêndulo (T_h), distúrbios e ruídos. A indicação da saída do bloco do pêndulo refere-se à posição angular da haste. Este sinal serve para refletir a reação do sistema quando um distúrbio ou ruído é introduzido. Por último, o sinal de controle, que emerge na saída dos controladores, é responsável por acionar os motores.

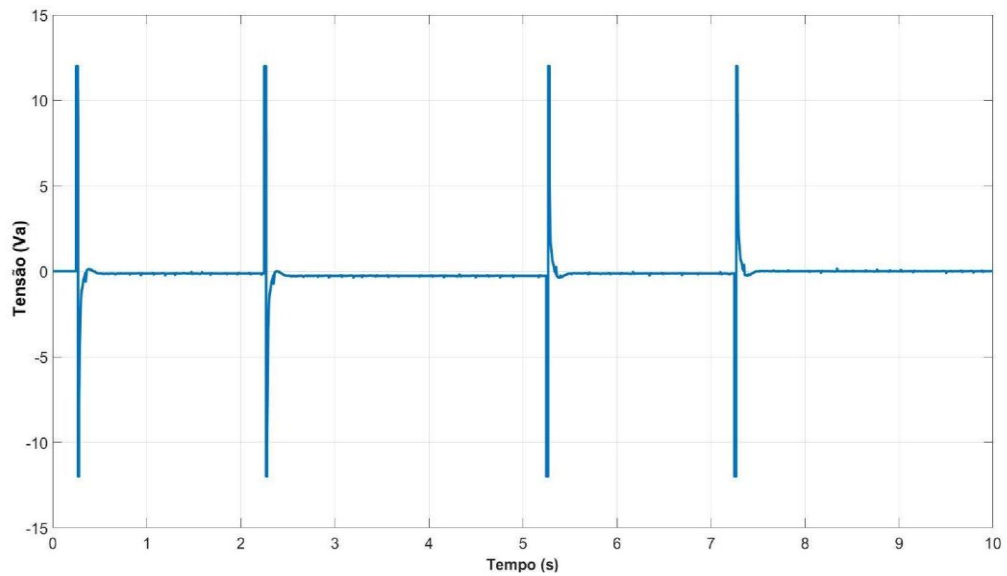
Assim, assume-se que, durante toda a simulação, o sinal de referência permanece constante e fixo conforme indicado em 0° , o que implica que a haste deve ser mantida na posição vertical. Para a execução da simulação, consideram-se três cenários de teste distintos. No cenário inicial, aplica-se à haste do pêndulo o sinal de perturbação ilustrado na Figura 27, que representa um conjunto de leves toques na haste. No cenário seguinte, aplica-se apenas a perturbação no torque do motor, conforme descrito na Figura 26. Na cena final, os sinais de perturbação na haste e no torque do motor são mantidos, contudo, o sistema passa a operar sob a influência do sinal de ruído apresentado na Figura 28. Ademais, em cada cenário de simulação exibem-se os resultados dos índices integrais do erro e alguns parâmetros da resposta temporal.

Conseqüentemente, a Figura 29 ilustra detalhadamente o padrão do sinal de controle (V_a) juntamente com a variação do ângulo da haste do pêndulo (T_h) quando considerado o cenário inicial dos testes.

Figura 29 - Primeiro cenário de simulação PID.



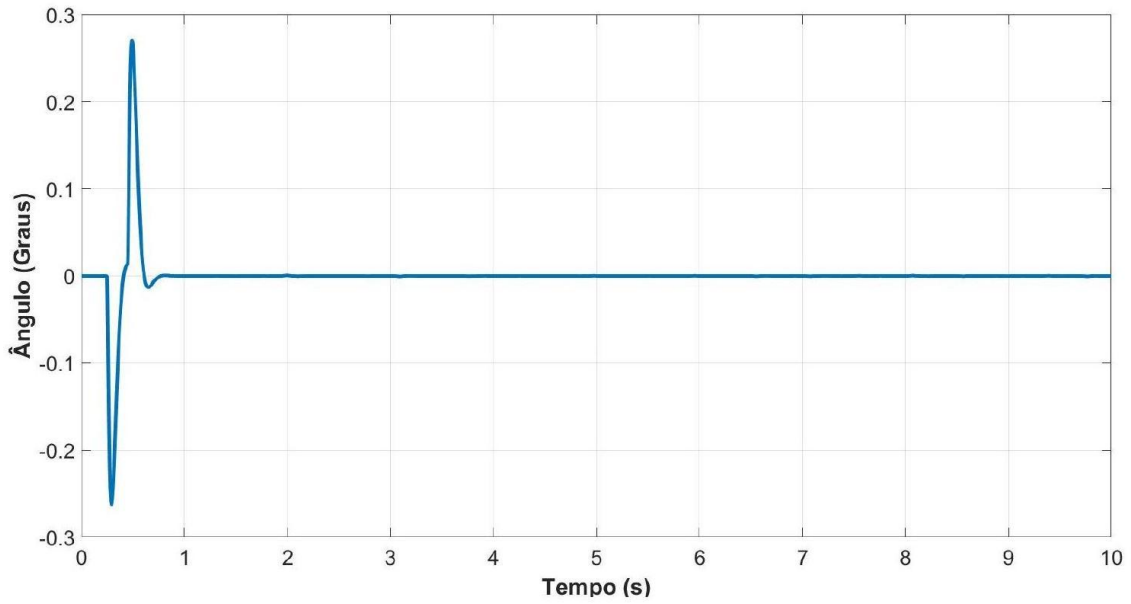
(a) Resposta do pêndulo



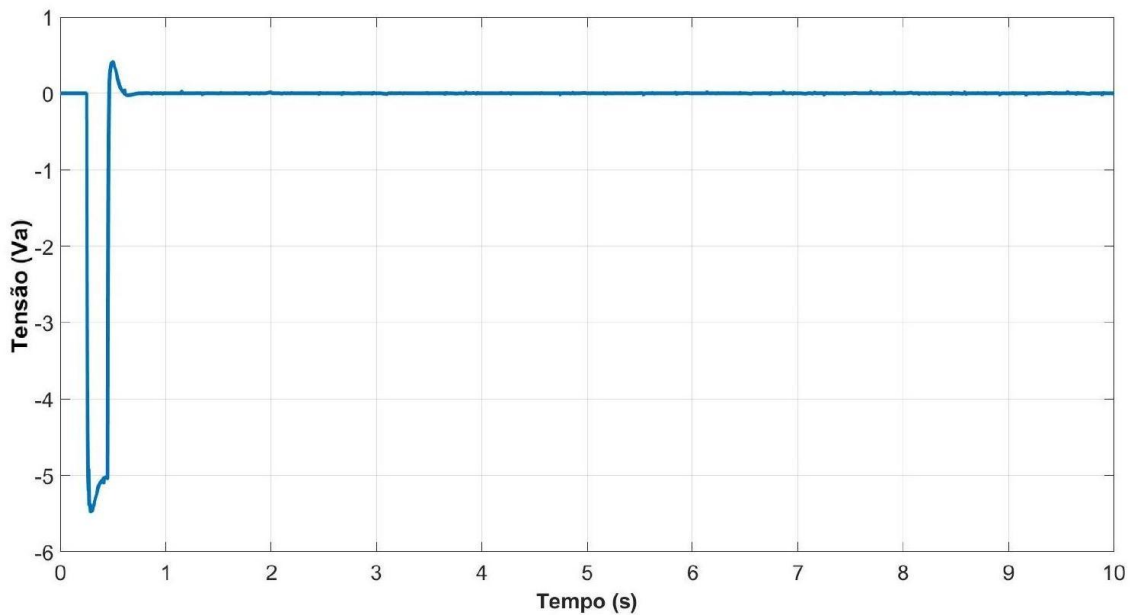
(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 30 - Segundo cenário de simulação PID.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ao analisar a Figura 29, observa-se que, após o distúrbio inicial, o pêndulo desvia de sua posição de equilíbrio estático. Observa-se que, em estado estacionário, o ângulo projetado para o pêndulo tende a ser nulo, levando ao fato de que a determinação conforme a Equação 2.66 se torna não definida. Assim sendo, considera-se que o Máximo Sobressinal corresponde à magnitude do pico observado na resposta do sistema controlado logo após a intervenção do pulso de distúrbio. Nesse ponto, ele atinge um Máximo Sobressinal de aproximadamente 2,97° no pico de sua resposta dinâmica.

Subsequentemente, inicia-se a atuação do controlador, evidenciada por mudanças significativas e abruptas no sinal de controle V_a . Este mecanismo de controle assegura que o sistema reestabeleça gradualmente sua condição de equilíbrio original, com um Tempo de Acomodação de 0,2 segundos, minimizando o desvio previamente observado. Com o índice ITSE avaliado em 0,0009529, o valor do ISE determinado foi 0,0002534, o IAE calculado resultou em 0,008926, e por último, a medida do ITAE foi registrada como 0,03382.

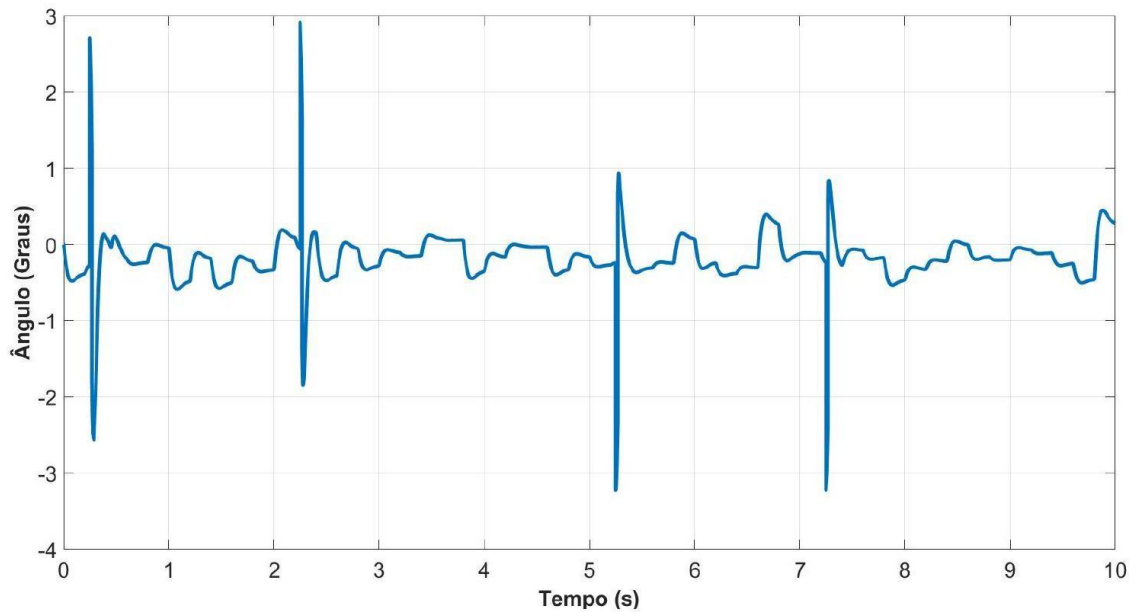
Como resultado, a ilustração da Figura 30 fornece uma descrição detalhada do padrão de sinal de controle (V_a) juntamente com a alteração no ângulo da haste do pêndulo (T_h) ao analisar o segundo cenário de testes.

Ao examinar a Figura 30, é evidente que o controlador imediatamente inverte o sinal do distúrbio aplicado na tensão de armadura do motor, ajustando-se para aproximadamente $-5,5$ V de modo a contrabalançar o efeito do empurrão que incide sobre o carrinho. Durante a aplicação do distúrbio, observa-se que o pêndulo atinge um valor máximo de sobressinal em torno de $0,27^\circ$. É crucial ressaltar que, logo após a eliminação do distúrbio, o controlador provoca um pico de tensão positivo no motor, em torno de $0,4$ V, com o propósito de retornar o pêndulo à sua orientação vertical.

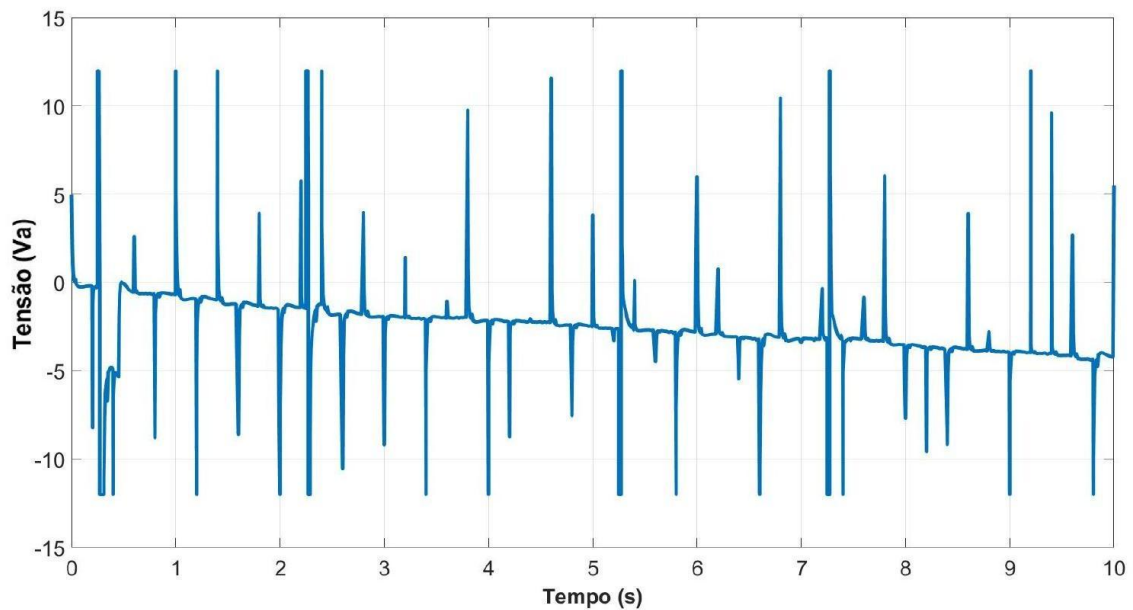
Essa ação resulta em um tempo de acomodação de aproximadamente 0,1 segundos. Além disso, é evidente que a resposta é efetivamente reajustada para zero, ou seja, a posição vertical, em aproximadamente 0,5 segundos. Finalmente, observa-se que entre o intervalo de 0,25 segundos e 0,45 segundos, o controlador mantém-se numa espécie de "trava", reagindo ao distúrbio, mas, subsequentemente, após 0,45 segundos, ele executa um ajuste fino no posicionamento. Os índices integrais de erro medidos revelaram-se da seguinte forma: primeiramente, o ITSE foi quantificado como $1,065 \cdot 10^{-6}$. Em segundo lugar, o ISE apresentou um valor determinado de $2,623 \cdot 10^{-6}$. Em sequência, o IAE foi calculado e obteve-se um resultado de 0,0007931. Finalmente, o ITAE foi medido e encontrado como 0,0003636.

A Figura 31 ilustra de forma detalhada o padrão do sinal de controle (V_a) e a variação no ângulo da haste do pêndulo (T_h) durante a análise do terceiro cenário de testes, proporcionando uma descrição abrangente desses aspectos.

Figura 31 - Terceiro cenário de simulação PID.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A análise detalhada da Figura 31 revela que, quando se combinam os três diferentes cenários das simulações - ou seja, a aplicação de um pulso de 5V ao atuador, a introdução de perturbações mecânicas na haste e a presença de ruído gaussiano no sistema de realimentação -, evidencia-se que o controlador demonstra uma resposta eficaz e imediata a cada uma dessas circunstâncias.

É essencial observar que todas as observações prévias referentes a esta situação específica são igualmente válidas e podem ser aplicadas aqui. Nesse contexto, as métricas

integrais de erro avaliadas foram reportadas da seguinte maneira: em primeiro lugar, o ITSE foi determinado a partir das medições, resultando em um valor quantificado de 0,0009863. Em segundo lugar, o ISE foi determinado ao apresentar um valor avaliado de 0,0002968. Posteriormente, o IAE foi calculado, revelando um resultado mensurado de 0,01648. Por fim, a métrica do ITAE foi medida, concluindo com um valor determinado de 0,06342.

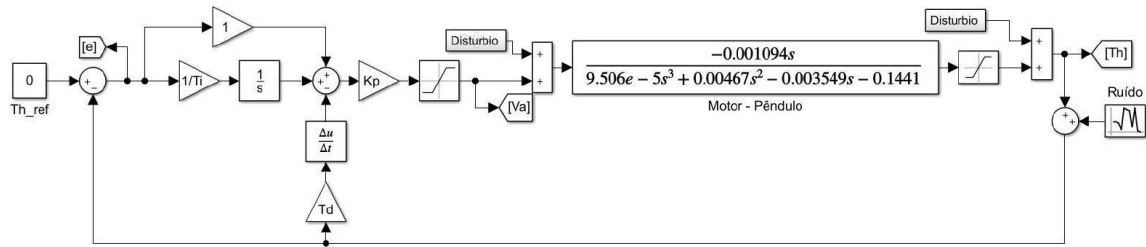
No entanto, o circuito de controle apresentado é extremamente sensível a variações de ruído na ordem de $\pm 0,5^\circ$. Como consequência, este sistema de controle realiza, continuamente, uma multiplicidade de ajustes finos no sinal de controle que, sob condições normais de operação, se manifestam como degraus discretos de aproximadamente $\pm 0,5$ V. Apesar de tais ajustes conseguirem manter a posição angular do sistema dentro de uma estreita margem de $\pm 0,1^\circ$, essa atividade constante demanda que o atuador trabalhe incessantemente, o que pode, a longo prazo, provocar um desgaste acelerado dos componentes envolvidos no mecanismo de atuação.

Em resumo, o controlador mostra uma capacidade notável de rejeitar perturbações significativas, mas há uma clara necessidade de moderação: a implementação de uma filtragem nos mecanismos de medição ou a adição de uma banda morta poderia prevenir que ruídos não significativos acionem o motor em frequências elevadas. Tal abordagem permitiria a manutenção da performance dinâmica, especificamente no que concerne ao sobressinal e ao tempo de acomodação, sem sacrificar a robustez do sistema.

5.3.2 Simulação PI-D

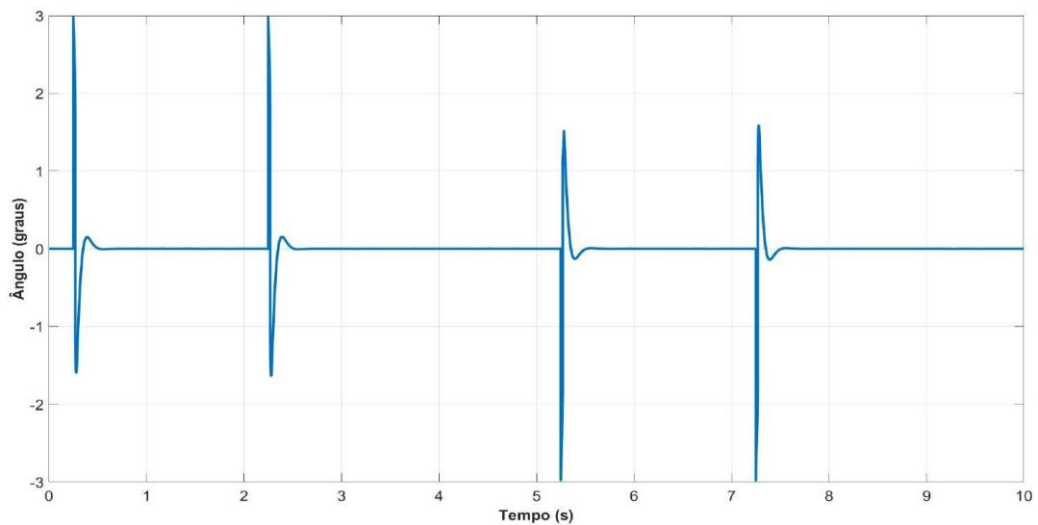
Após ter sido introduzido o controlador PI-D na seção anterior, este tópico detalha exclusivamente os resultados alcançados utilizando os mesmos cenários implementados para o controlador PID. A Figura 32 ilustra como o PI-D está configurado no Simulink.

Figura 32 - Diagrama de blocos PI-D Simulink.

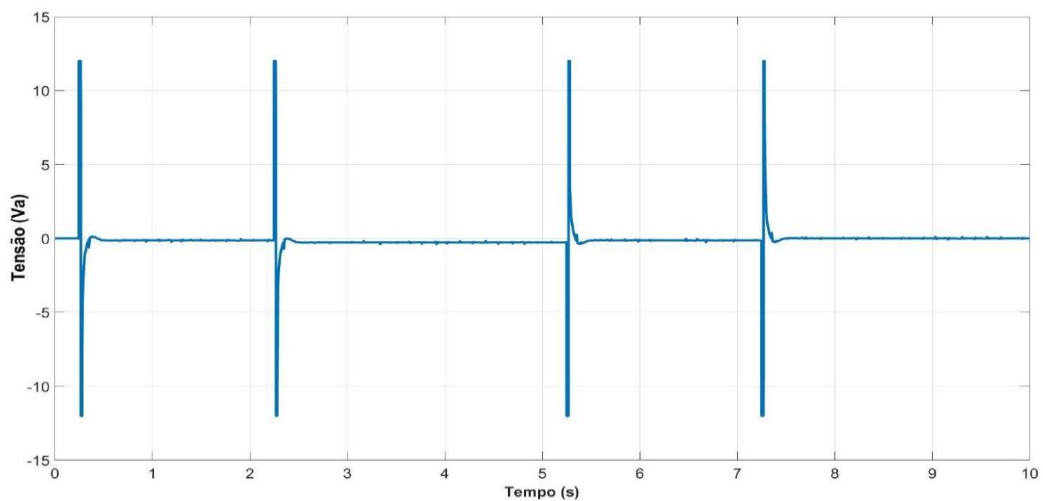


Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 33 - Primeiro cenário de simulação PI-D.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Os cenários destinados a testar a eficácia do controlador PID na estabilização da haste do sistema completo serão os mesmos cenários utilizados para o controlador PI-D. Conseqüentemente, o sinal de distúrbio imposto sobre o torque do motor, conforme ilustrado

na Figura 26, é preservado, assim como o sinal de distúrbio exercido sobre a haste do pêndulo, conforme apresentado na Figura 27. Ademais, o sinal de ruído documentado na Figura 28 é igualmente mantido.

A partir do cenário inicial de simulação, a Figura 33 apresenta de forma detalhada o padrão do sinal de controle (V_a) e a variação do ângulo da haste do pêndulo (T_h).

Ao examinar a Figura 33, observa-se que no instante em que ocorre a borda ascendente da perturbação, o ângulo eleva-se abruptamente para 3° . No entanto, devido à ação combinada do ganho proporcional e da componente derivativa do controlador, que respondem rapidamente às alterações, o ângulo é rapidamente estabilizado em $2,97^\circ$. Quando a perturbação cessa após $0,27$ segundos, é perceptível a presença de um retorno caracterizado por um pico negativo de $-1,6^\circ$, seguido de um amortecimento gradual até o repouso. Dessa forma, evidencia-se um sobressinal máximo de $2,97^\circ$ e um tempo de assentamento que dura $0,2$ segundos após o fim do distúrbio.

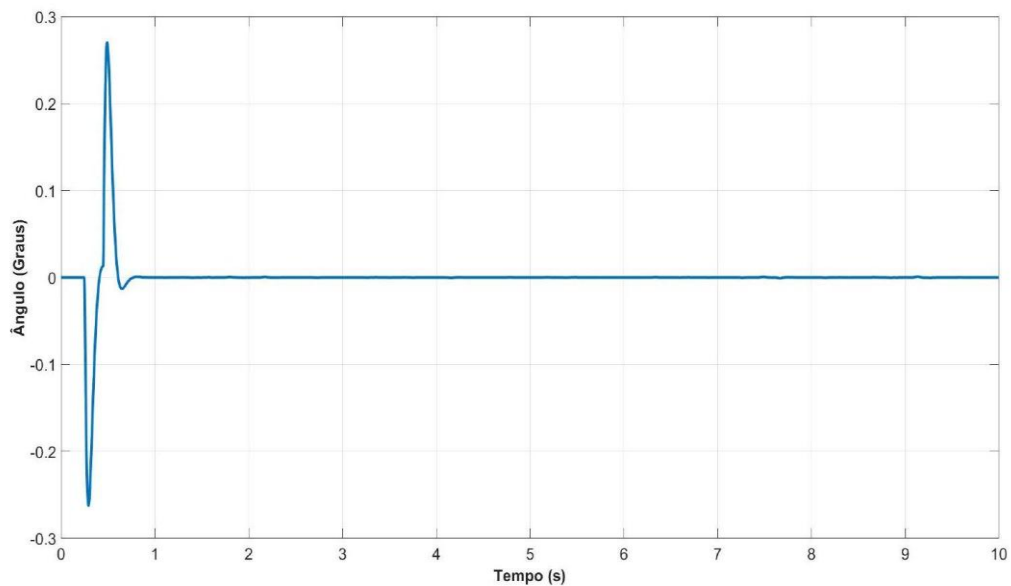
No cenário inicial da simulação, observa-se que, ao ocorrer a descida do distúrbio, o controlador rapidamente atinge sua saturação negativa de -12 V em questão de milissegundos, neutralizando assim a deflexão. Este pico extremamente abrupto é uma consequência do termo derivativo, que antecipa de maneira preditiva a alteração iminente. Durante a persistência do distúrbio, a tensão permanece consistente em 12 V, restringindo dessa forma a amplitude do ângulo da haste. Por último, as métricas integrais de erro que foram analisadas exaustivamente são descritas da seguinte forma: inicialmente, o ITSE foi calculado baseado nas medições, resultando em um valor final de $0,0009471$. Em subsequência, o ISE foi computado, apresentando um valor mensurado de $0,0002522$. A seguir, o IAE foi calculado com precisão, resultando em uma medida de $0,008899$. Por fim, a métrica do ITAE foi quantificada, encerrando com um valor estabelecido de $0,03368$.

A Figura 34 apresenta uma análise aprofundada, detalhando o padrão de sinal de controle (V_a) e como isso interage com a variação no ângulo da haste do pêndulo (T_h) no contexto do segundo conjunto de testes.

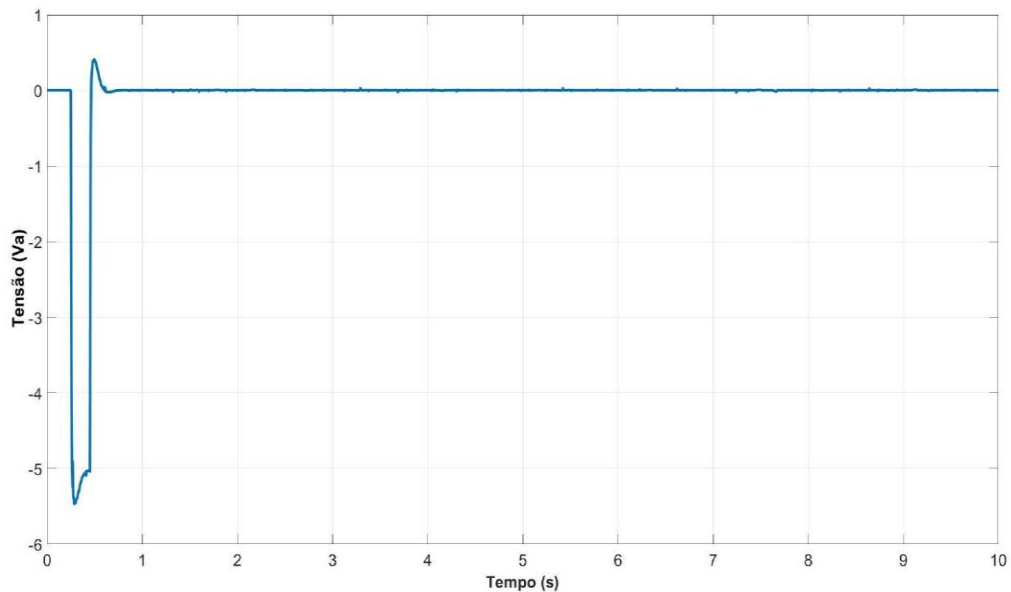
Na Figura 34, encontra-se apresentada a resposta dinâmica do sistema do pêndulo invertido ao ser submetido a um estímulo sob a forma de um pulso de tensão de armadura de 5 V, com uma duração de $0,2$ segundos. Observa-se que o pêndulo inicialmente exibe uma deflexão negativa atingindo aproximadamente $-0,3^\circ$, momento em que o controlador PI-D reage prontamente; contudo, não consegue manter a estabilização exata em zero durante a ação do pulso. Após a cessação do distúrbio, o sistema de controle provoca um pico positivo na

tensão de armadura, permitindo que o pêndulo retorne a $0,25^\circ$, o que ocasiona um pequeno sobre-pico no lado positivo. A presença do termo integral no controlador é crucial para eliminar qualquer erro médio persistente, restaurando o ângulo de forma amortecida para 0° com um tempo bem definido. Adicionalmente, o termo derivativo possibilita ao controlador antecipar a subida do pulso, e assim, prontamente aplicar uma tensão de $-5,5\text{ V}$ para limitar o desvio resultante.

Figura 34 - Segundo cenário de simulação PI-D.



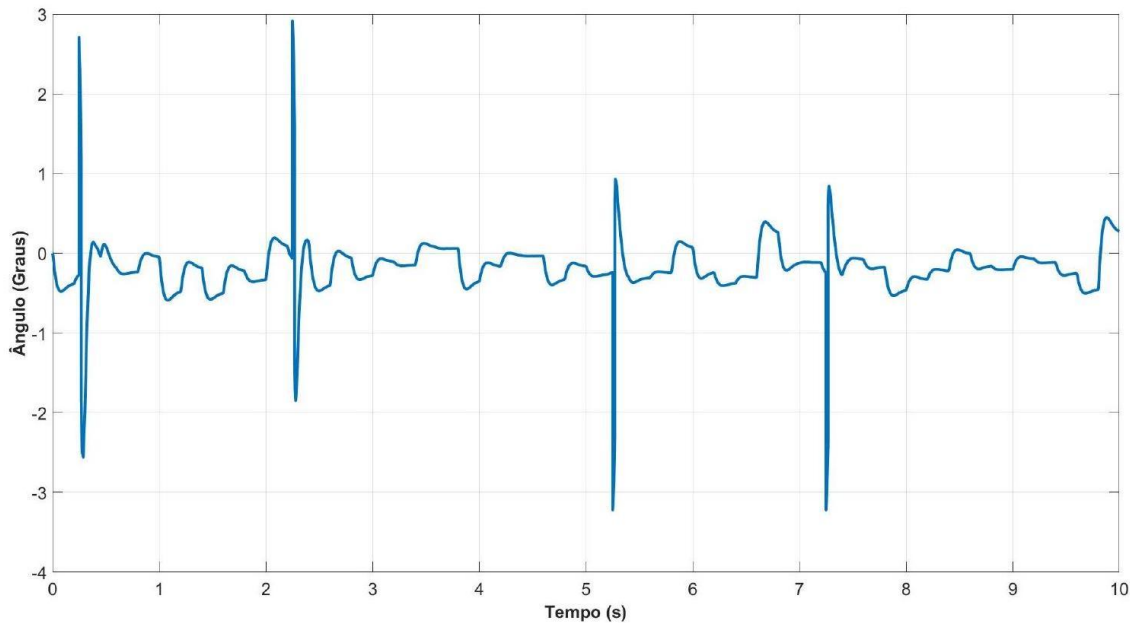
(a) Resposta do pêndulo



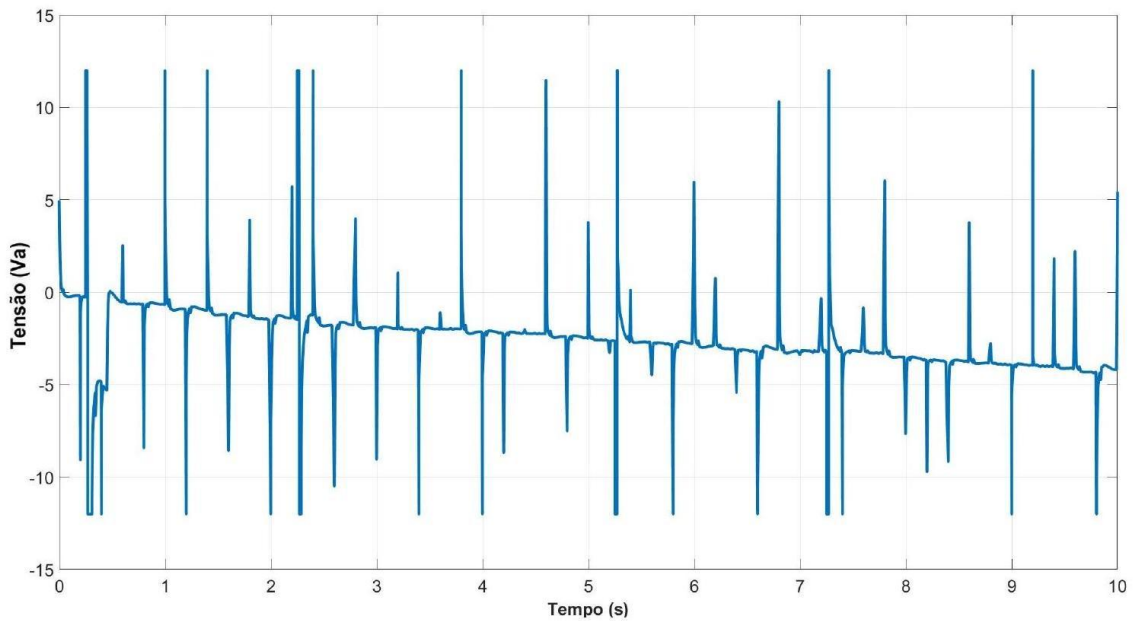
(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 35 - Terceiro cenário de simulação PI-D.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Dentro deste cenário, o máximo valor de superação do sinal aparenta atingir $0,27^\circ$. Ao final do pulso, o componente derivativo responde novamente à abrupta variação, induzindo uma elevação de V_a para aproximadamente $0,5\text{ V}$. Consequentemente, ocorre um amortecimento gradativo: o ângulo de retorno ao 0° é atingido com um tempo de estabilização de $0,14$ segundos, reduzindo significativamente o desvio inicial. A análise do índice ITSE produziu um

valor de $1,064 \cdot 10^{-6}$, enquanto o ISE foi calculado como $2,623 \cdot 10^{-6}$. O valor do IAE alcançou 0,0007937, e, por fim, a mensuração do ITAE registrou-se em 0,0003676.

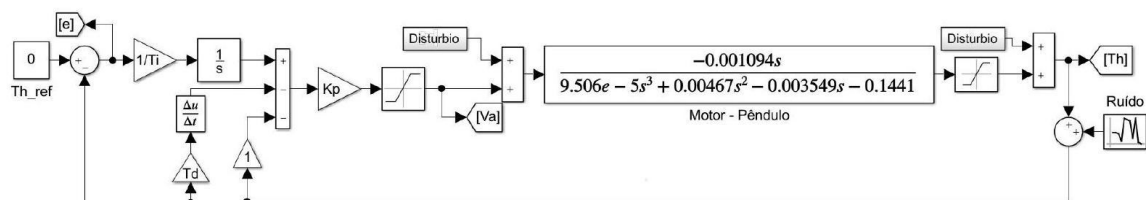
A análise detalhada na Figura 35 ilustra o padrão do sinal de controle (V_a) e sua interação com a variação no ângulo da haste do pêndulo (T_h), especificamente dentro do escopo do terceiro conjunto de ensaios.

Na Figura 35, é ilustrado como o controlador PI-D gerencia simultaneamente as perturbações no atuador, os impactos mecânicos na haste e o ruído presente na realimentação. As observações realizadas para os cenários de simulação um e dois são aplicáveis nesta análise também. Neste ambiente foi registrado um valor máximo de sobressinal de $2,7^\circ$. O tempo de acomodação não foi quantificado devido à presença contínua de ruídos, os quais impedem o sistema de atingir uma posição vertical, resultando em uma oscilação constante de $\pm 0,5^\circ$. Além disso, as variações do ruído gaussiano de $\pm 0,5^\circ$ manifestam-se no sinal de controle, provocando inúmeros pequenos ajustes com pulsos que variam entre $\pm 1V$ e $\pm 2V$. Conseqüentemente, a avaliação do índice ITSE revelou um resultado igual a 0,000987. Por outro lado, o ISE foi determinado em 0,000297. Em relação ao IAE, este alcançou um valor de 0,0165. Finalmente, a mensuração do ITAE surgiu com uma marca de 0,06349.

5.3.3 Simulação I-PD

O controlador IP-D, previamente apresentado, passa a ser o foco principal deste segmento da discussão. Esta seção explora de maneira exclusiva os resultados obtidos sob condições idênticas às utilizadas para o controlador PID. Na Figura 36, pode-se observar a configuração do IP-D no ambiente Simulink.

Figura 36 - Diagrama de blocos I-PD Simulink



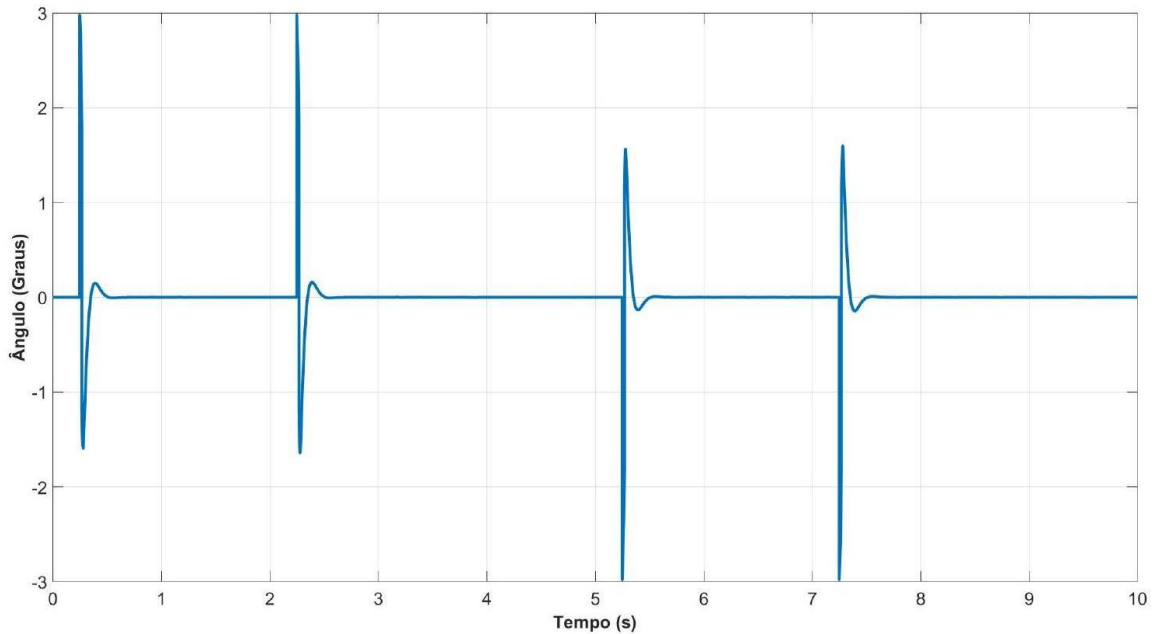
Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Os planos para avaliar a eficácia do controlador PID na estabilização da haste do sistema completo irão replicar os mesmos cenários previamente utilizados para testar o controlador I-PD. Assim, o distúrbio aplicado ao torque do motor, conforme apresentado na Figura 26, será

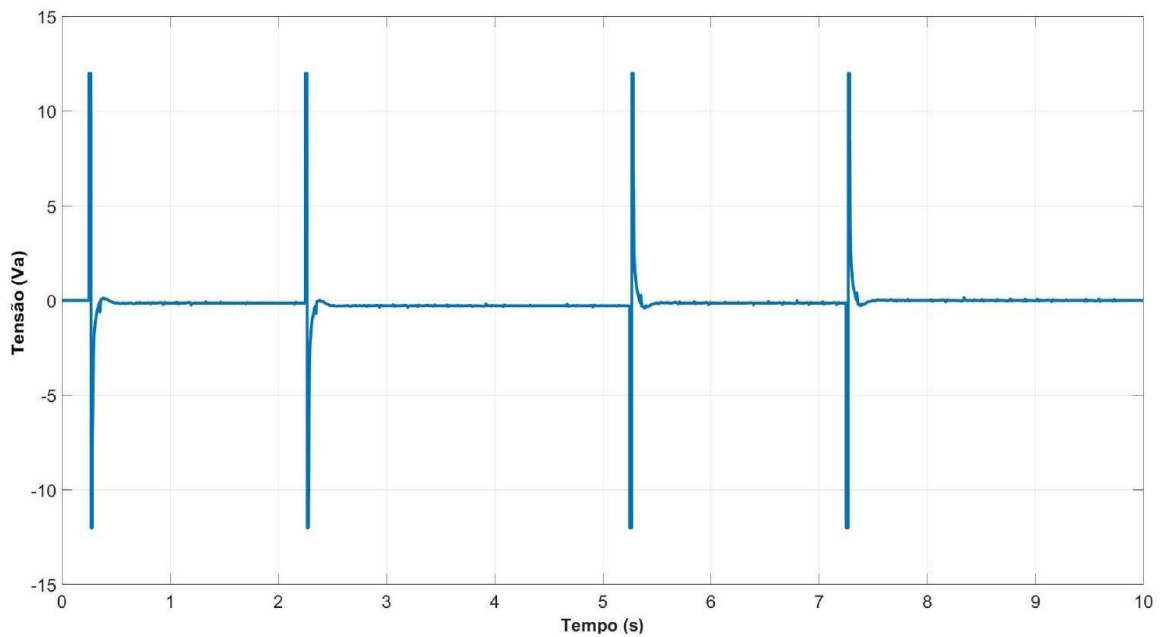
mantido, assim como o distúrbio atuante na haste do pêndulo, ilustrado na Figura 27. Além disso, o ruído descrito na Figura 28 também será preservado.

Iniciando a partir do cenário de simulação inicial, a Figura 37 ilustra minuciosamente o padrão do sinal de controle (V_a) assim como a alteração no ângulo da haste do pêndulo (T_h).

Figura 37 - Primeiro cenário de simulação I-PD.



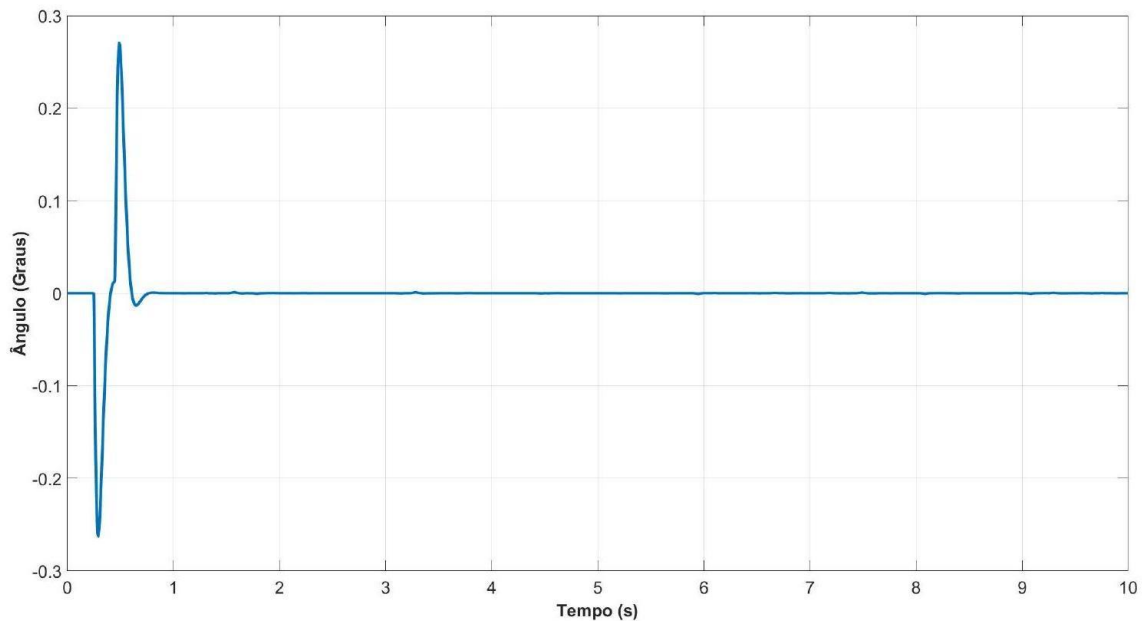
(a) Resposta do pêndulo



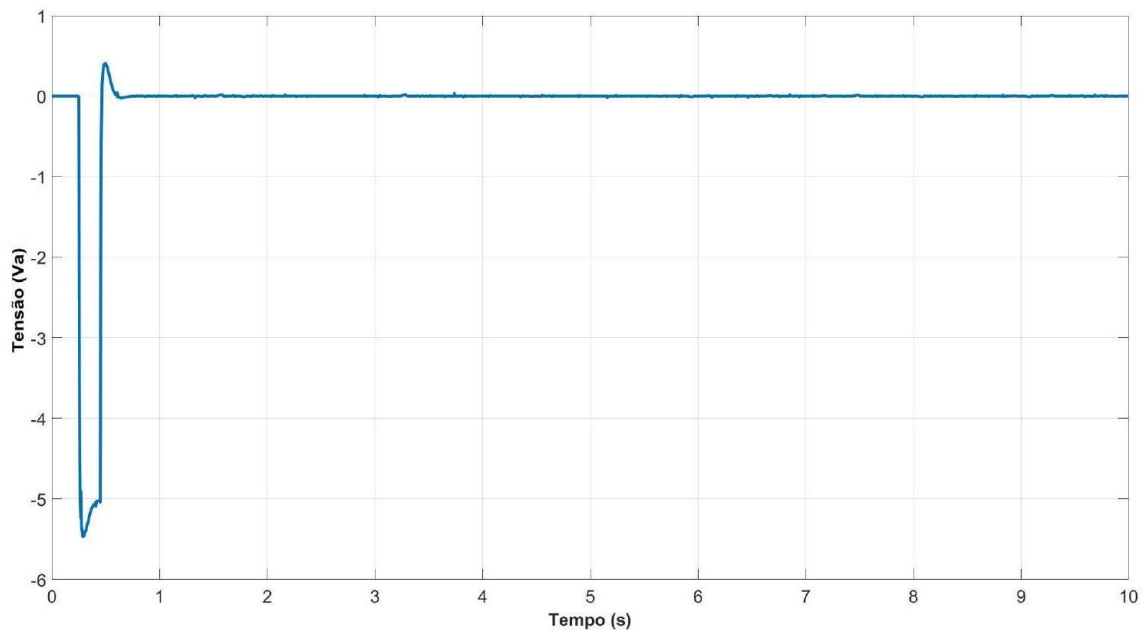
(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 38 - Segundo cenário de simulação I-PD.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Analisando a Figura 37 nota-se que a borda de subida de cada pulso é instantaneamente antevista pelo termo derivativo aplicado diretamente sobre a medição do ângulo. Isso gera picos de saturação máxima de $\pm 12\text{ V}$ no sinal de controle, reduzindo drasticamente o desvio que, sem intervenção, alcançaria $\pm 3^\circ$. Observa-se que o ângulo deflete apenas até $\pm 2,8^\circ$, comprovando a eficácia do termo derivativo. Logo após o encerramento de cada pulso, o controlador injeta um pequeno pico inverso em V_a de aproximadamente 1 V que suaviza o retorno do pêndulo,

limitando o sobrepico a cerca de $\pm 1,6^\circ$. Este comportamento mostra o papel do ganho proporcional em suavizar transientes, evitando oscilações excessivas imediatamente após a mudança abrupta de sinal. O termo integrativo, que integra o erro ao longo do pulso, corrige qualquer desvio residual sem gerar rampas de tensão prolongadas. Como resultado, o ângulo retorna a 0° e possui um máximo sobressinal de $\pm 2,8^\circ$ e tempo de acomodação medido de 0,2 segundos. Por conseguinte, a análise realizada sobre o índice ITSE indicou um resultado correspondente a 0,0009536. Em adição, o índice ISE foi calculado, culminando em um valor de exatamente 0,0002536. No tocante ao índice IAE, os cálculos resultaram em um valor que ascendeu a 0,008933. Por último, quando o índice ITAE foi medido, observou-se que ele atingiu um quantitativo de 0,03385.

A Figura 38 fornece uma análise abrangente que explora minuciosamente o padrão do sinal de controle (V_a), destacando como esse padrão interage com as alterações no ângulo da haste do pêndulo (T_h), particularmente no cenário do segundo conjunto de testes.

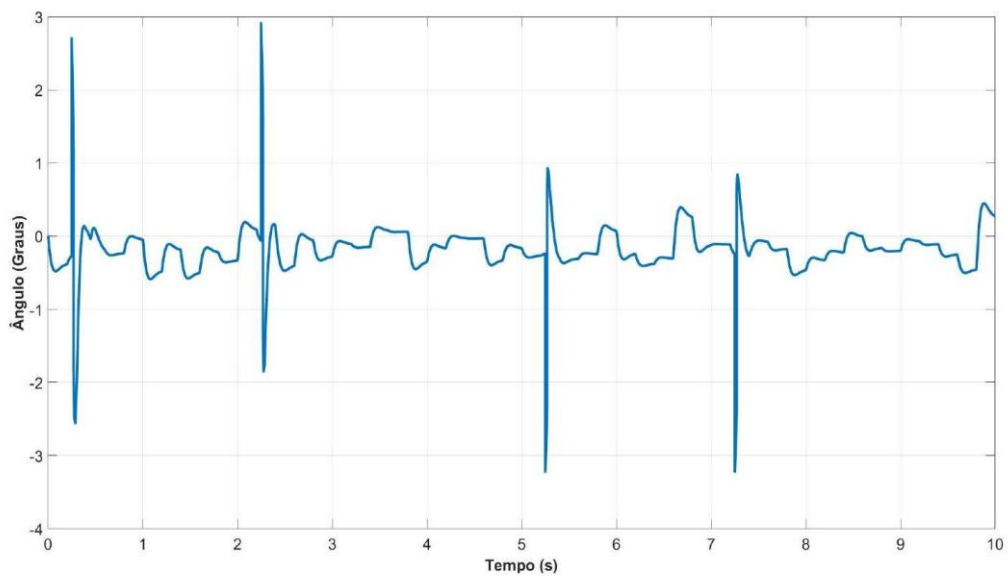
Examinando a Figura 38, observa-se que imediatamente após a introdução da perturbação, o pêndulo sofre um desvio negativo, atingindo aproximadamente $-0,26^\circ$. Este comportamento valida a atuação instantânea da componente derivativa, que exerce uma função de "freio" na deflexão. Assim que a perturbação cessa, é evidenciada a presença de um sobrepico positivo em torno de $0,27^\circ$, reflexo da antecipação feita pelo termo derivativo em relação à borda de descida. Subsequentemente, as componentes proporcional e integral entram em ação, contribuindo para a amortização das oscilações residuais. Consequentemente, o ângulo retorna ao seu valor de referência de 0° de forma estável, aproximadamente em 0,6 segundos. O máximo sobressinal observado é de $0,27^\circ$, enquanto o tempo de acomodação necessário para alcançar a estabilização é de 0,14 segundos.

Durante o aumento da perturbação, o mecanismo de controle emite um sinal de aproximadamente $-5,5$ V ao motor, restringindo o deslocamento inicial do pêndulo. Este sinal mantém-se em torno de $-5,5$ V durante o período de 0,2 segundos que corresponde à duração da perturbação. Na fase de descida, o componente derivativo contribui com um pico de $+0,5$ V, antecipando-se à intervenção dos componentes proporcional e integral na correção do sistema. Após a ocorrência desses picos, o componente proporcional rapidamente proporciona uma ação de amortecimento, enquanto o componente integral corrige de forma gradual qualquer desvio restante, reduzindo com eficácia V_a a zero de modo suave e sem causar oscilações no sistema. A análise do índice ITSE revelou um valor de $1,064 \cdot 10^{-6}$. Além disso, um cálculo foi realizado para o índice ISE, que também proporcionou um resultado exato de $2,623 \cdot 10^{-6}$. No

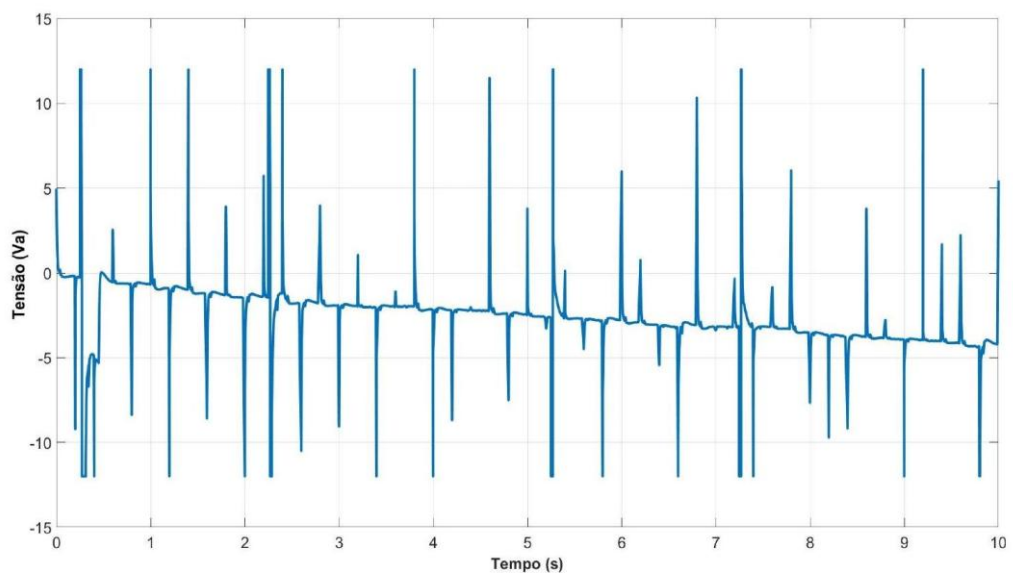
que se refere ao índice IAE, a execução dos cálculos levou a um valor que aumentou consideravelmente, atingindo 0,0007945. Finalmente, quando a medição do índice ITAE foi efetuada, este apresentou uma leitura de 0,000369.

Figura 39 oferece uma descrição abrangente das características do sinal de controle (V_a) e da alteração no ângulo da haste do pêndulo (T_h) ao longo do estudo do terceiro conjunto de testes.

Figura 39 - Terceiro cenário de simulação I-PD.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ao examinar a Figura 39, observa-se que qualquer modificação do ruído aplicado, por menor que seja, tem um impacto direto no laço de erro do controlador. Isso ocorre devido à presença do termo derivativo no ramo de realimentação, que resulta na emissão de micro-picos no sinal de controle, mesmo na ausência de pulsos maiores. Essas modificações ocorrem com alta frequência, ao longo de dezenas de vezes por segundo, manifestando-se como múltiplos impulsos de tensão de $\pm 1V$ ou $\pm 2V$ que o motor recebe de forma reiterada. Esse comportamento complexo das microatuações mantém o motor em funcionamento contínuo, aumentando conseqüentemente o consumo de energia e acelerando o desgaste mecânico. Como resultado, o ruído gera pequenas oscilações de alta frequência com amplitude de $\pm 0,4^\circ$. Embora essas oscilações não causem perda de estabilidade no sistema, elas podem induzir vibrações indesejadas na estrutura mecânica.

Dentro deste contexto de simulação, foi identificado um sobressinal máximo de aproximadamente $2,9^\circ$. Conforme discutido em seções anteriores, o tempo de acomodação não pode ser medido no âmbito deste experimento específico. Quando se examinou o índice ITSE, obteve-se um valor de 0,000987. Ademais, um cálculo detalhado foi conduzido para o índice ISE, resultando em uma medida precisa de 0,000297. No que concerne ao índice IAE, os cálculos realizados evidenciaram um aumento substancial, chegando ao valor final de 0,0165. Por último, a aferição do índice ITAE foi realizada, e este apresentou um resultado mensurado de 0,06349.

5.4 PROJETO DO CONTROLADOR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

A concepção do controlador por realimentação dos estados recorre à formulação do sistema de pêndulo invertido completo no âmbito do espaço de estados, onde a única variável de saída considerada é a posição angular. Esta é detalhadamente modelada pelas Equações 4.5 e 4.6. A totalidade do sistema quanto à posição angular é assim expressa por meio do formato de espaço de estados nas equações 4.5 e 4.6, o que permite derivar a matriz de controlabilidade conforme apresentada na Equação 5.19.

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & -11,51 & 121,6 & -6403,52 \\ -11,51 & 121,6 & -6403,52 & 298813,46 \\ 0 & 3,66 & -179,66 & 8850,23 \\ 3,66 & -179,67 & 8850,23 & -435041,62 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (5.19)$$

Pode-se concluir que o sistema é controlável, uma vez que o determinante de M_c é distinto de zero, especificamente $\det(M_c) = -7,96 \cdot 10^7$, e além disso, M_c possui posto máximo, comprovando assim que todas as condições necessárias à controlabilidade estão plenamente satisfeitas. Conseqüentemente, a análise da capacidade de observação do sistema pode ser realizada através da matriz de observabilidade, que é formalmente expressa pela Equação 5.20.

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 37,33 & 0 & 0 & 33,25 \\ -2,05 & 0 & 0 & -49,13 \\ -68,33 & 37,33 & 0 & -1633,52 \\ 100,95 & -2,05 & 0 & 2413,53 \end{bmatrix}_{8 \times 4} \quad (5.20)$$

A conclusão a que se pode chegar é que o sistema é observável, dado que o posto de M_o é igual ao número de estados, confirmando que todas as condições necessárias para garantir a observabilidade estão plenamente atendidas.

Depois de confirmar que os critérios de controlabilidade e observabilidade são satisfeitos, define-se o posicionamento dos polos para cada estado dentro do sistema. Neste estudo, analisa-se o sistema pêndulo invertido, modelado nas Equações 4.5 e 4.6, que apresenta um total de quatro estados. Conseqüentemente, precisa-se determinar quatro posições de polos desejados para esses estados. A princípio, a fim de estabelecer uma conexão com o controlador clássico, adotamos a estratégia de aproximação através de polos dominantes de segunda ordem para a determinação de duas posições, com os polos almejados especificados na Equação 5.8, em concordância com os critérios de desempenho estabelecidos. Para as duas posições restantes, optou-se por definir de forma arbitrária uma raiz real em -40 e -50. Logo, os polos desejados de malha fechada são dados na Equação 5.21.

$$\mu_1 = -20 + j20,98, \mu_2 = -20 - j20,98, \mu_3 = -40, \mu_4 = -50 \quad (5.21)$$

É indispensável realizar a estimativa dos estados, dado que as variáveis de estado descritas nas Equações 4.5 e 4.6 não são diretamente mensuráveis para se obter uma representação precisa de todos os estados reais do sistema. Conforme Ogata (2010) menciona, os autovalores escolhidos para a equação característica devem resultar em uma resposta do

observador de estado entre duas e cinco vezes mais rápida que a do sistema em malha fechada. Portanto, com o objetivo de aperfeiçoar o projeto do observador de estado, propõe-se a multiplicação dos polos apresentados na Equação 5.21 por um fator de 5. Esta modificação visa garantir que a resposta transitória do observador se estabeleça com uma rapidez superior àquela observada na malha de controle. Assim, busca-se antecipar as estimativas de forma a minimizar possíveis atrasos na resposta do sistema, possibilitando uma atualização célere do vetor de estado estimado. A equação característica correspondente está definida na Equação 5.22.

$$s^4 + 650s^3 + 161004,01s^2 + 19451804,5s + 1050200500 = 0 \quad (5.22)$$

Portanto, ao utilizar a Equação 2.51, podemos deduzir a matriz de ganho do observador de estado, denotada como \mathbf{K}_e . Esta matriz de ganho está formulada e exibida na Equação 5.23.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 344,20 & -70,67 \\ 27193,18 & -17738,40 \\ 102,53 & 256,66 \\ 15641,19 & 8735,56 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Subsequentemente, a etapa seguinte envolve a concepção da matriz de ganho de realimentação de estado, simbolizada por \mathbf{K} . A expressão matemática que representa a equação característica almejada para o sistema controlador está formulada na Equação 5.24.

$$s^4 + 130s^3 + 6440,16s^2 + 155614,43s + 1680320,79 = 0 \quad (5.24)$$

A partir disso, a matriz de ganho de realimentação de estado pode ser obtida aplicando a Equação 2.42. O resultado é apresentado na Equação 5.25.

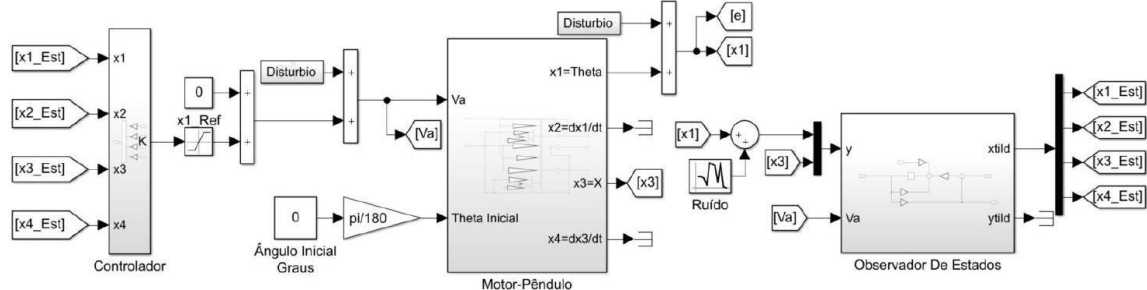
$$\mathbf{K} = [-255,74 \quad -130,66 \quad -14885,99 \quad -389] \quad (5.25)$$

5.4.1 Simulação controle realimentação de estados

O controlador por realimentação de estados, previamente apresentado, passa a ser o foco principal deste segmento da discussão. Esta seção explora de maneira exclusiva os resultados obtidos sob condições idênticas às utilizadas para o controlador PID e suas variantes. Na Figura

40, pode-se observar a configuração do controlador por realimentação de estados no ambiente Simulink.

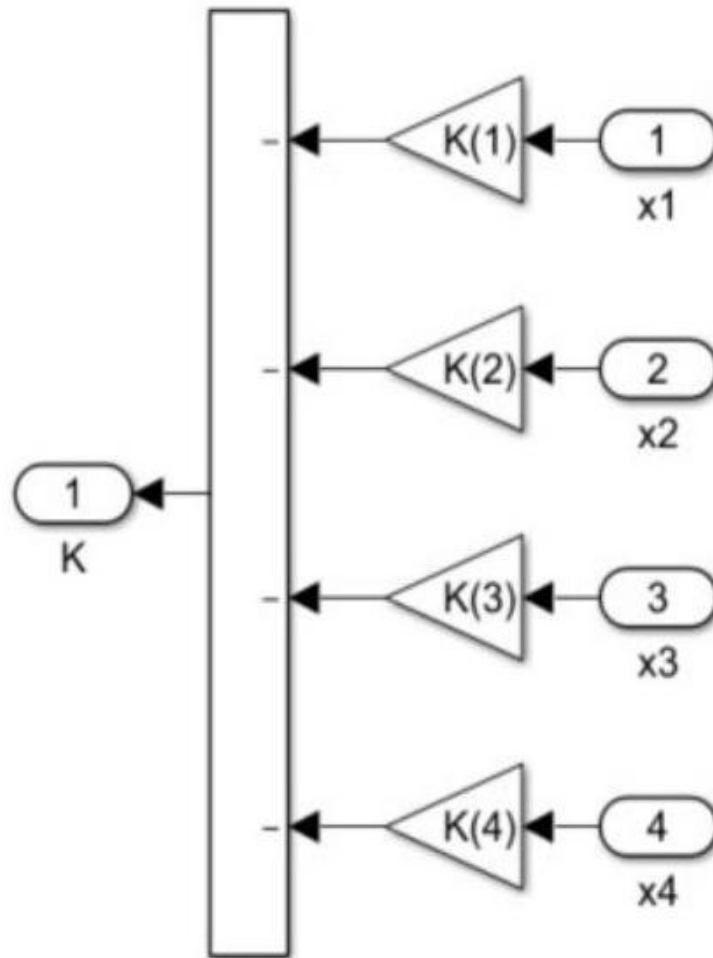
Figura 40 - Diagrama de blocos controle realimentação de estados Simulink



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A partir da análise da Figura 40, pode-se identificar a existência de três blocos principais: o bloco do controlador, o bloco correspondente ao motor e pêndulo e, por último, o bloco responsável pelo observador de estados. Este arranjo demonstra a interação complexa entre os componentes que desempenham funções integradas no modelo. Para aprimorar a compreensão da execução da simulação, cada um dos blocos principais é explicado individualmente a seguir. Na Figura 41 mostra-se o bloco do controlador que representa a lei de controle dada na Equação 2.38.

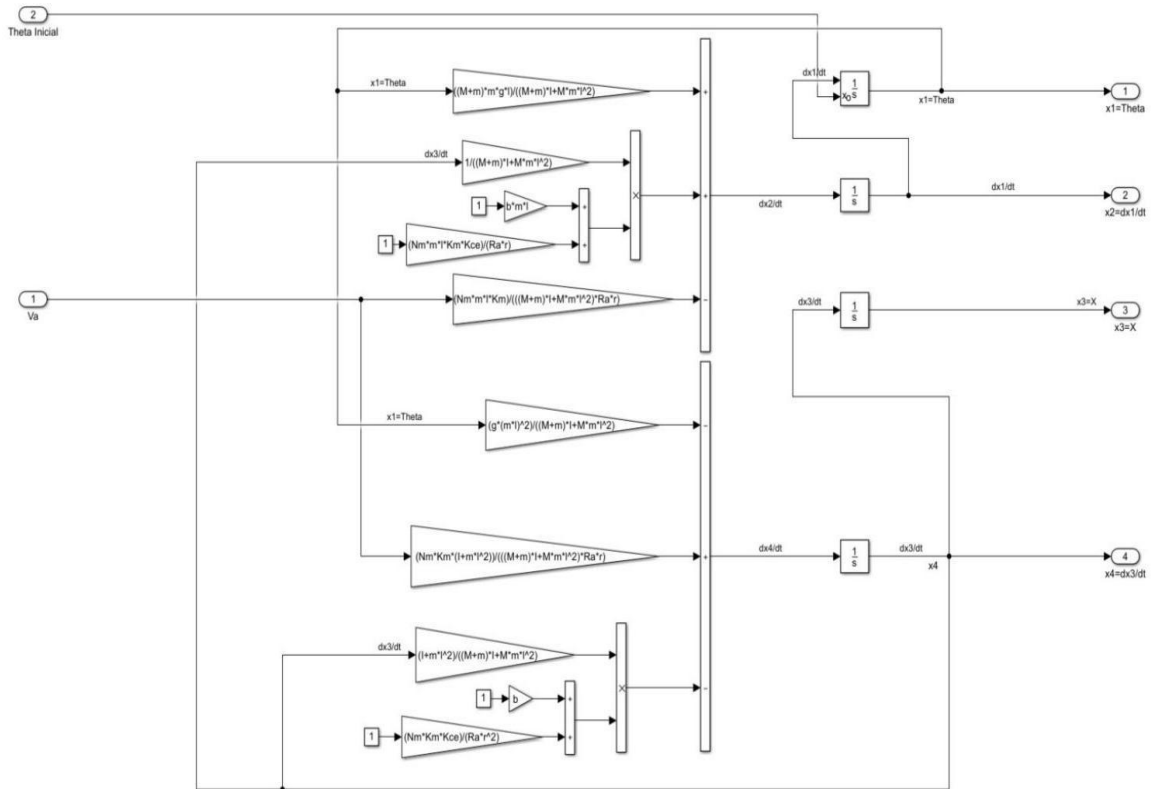
Figura 41 - Bloco do controle por realimentação de estados.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A Figura 42 ilustra o bloco destinado a modelar o conjunto motor-pêndulo, tendo como fundamento a representação em espaço de estados formulada através das Equações 3.40 e 3.41.

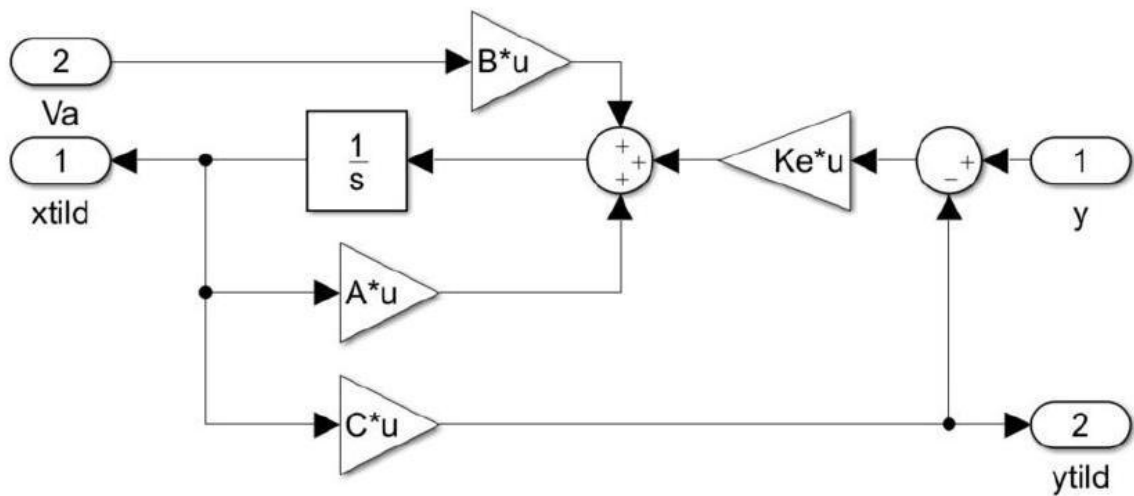
Figura 42 - Bloco do sistema motor e pêndulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A Figura 43 representa graficamente o diagrama do bloco correspondente ao observador de estados implementado para o sistema mencionado, de acordo com a Equação 2.44.

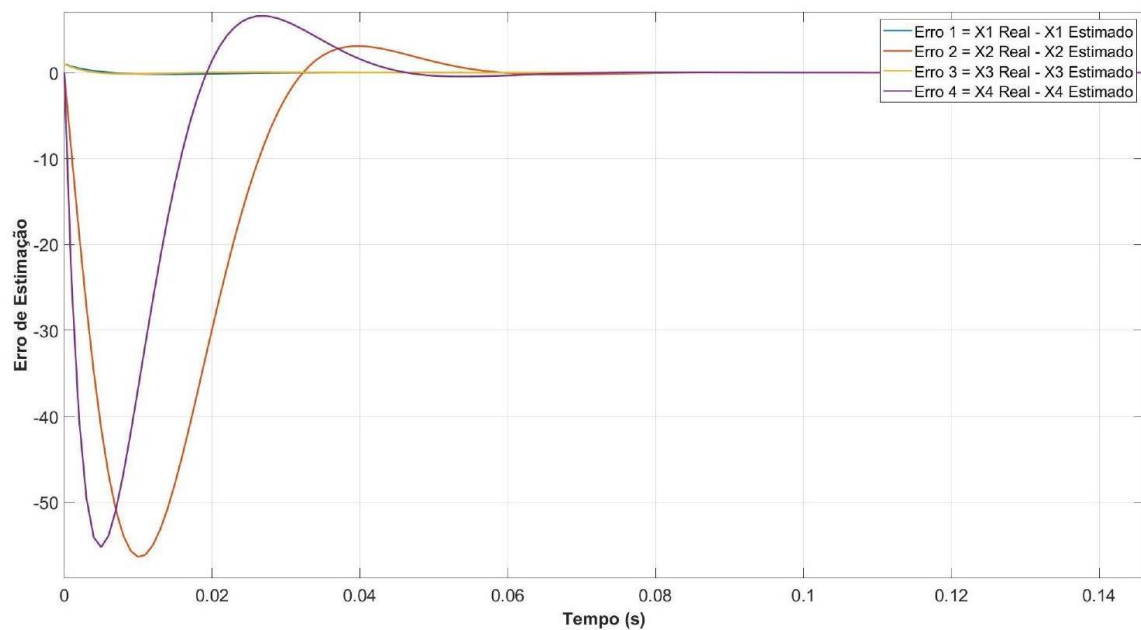
Figura 43 - Bloco do Observador de Estados.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

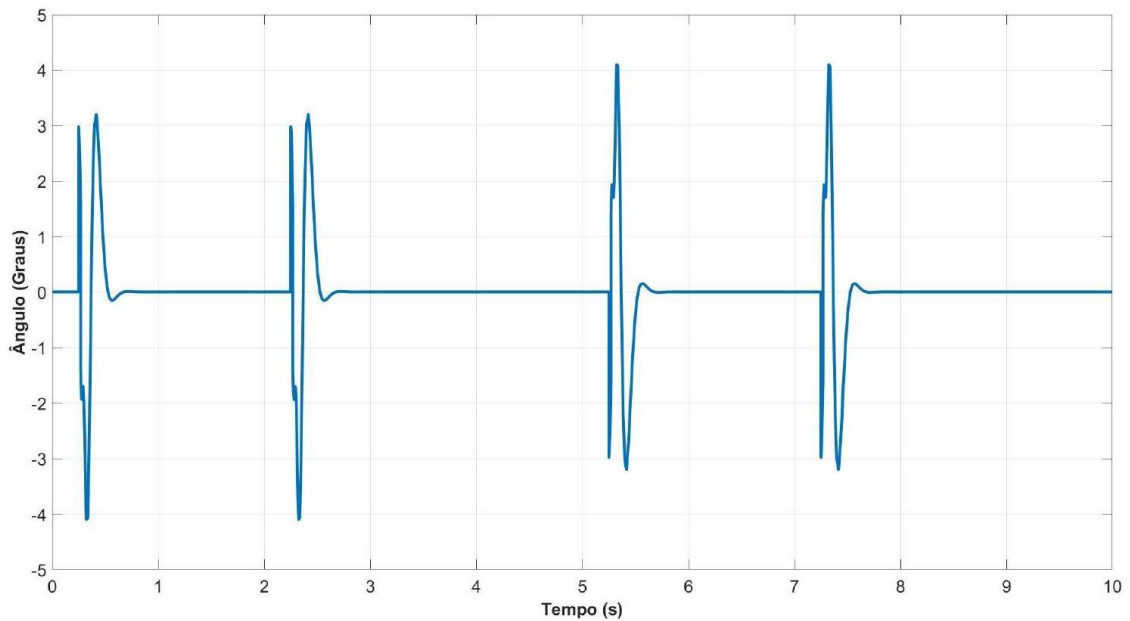
Após o projeto do observador, utilizando a matriz de ganho de acordo com a Equação 5.23, previamente calculada, foi realizada a simulação da dinâmica do sistema e do observador de forma separada. O objetivo principal desta etapa foi verificar a convergência do vetor de estados estimados em relação ao vetor de estados reais, por meio da análise do erro de estimação definido conforme a Equação 2.46. A simulação foi conduzida considerando condições iniciais distintas entre os estados reais e os estimados, conforme a Figura 44.

Figura 44 - Teste Observador de Estados.

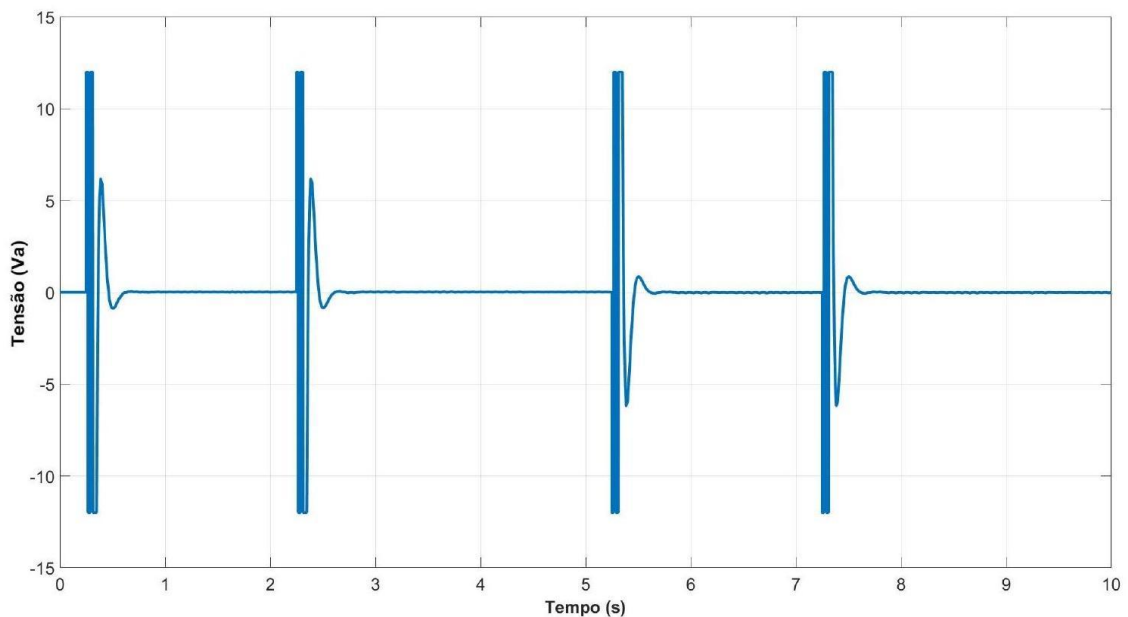


Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 45 - Primeiro cenário de simulação controle por realimentação de estados.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

A Figura 44 obtida evidencia que, apesar das discrepâncias iniciais entre os estados reais e suas respectivas estimativas, todos os componentes do vetor de erro convergem rapidamente para zero. Este comportamento confirma que os polos do sistema de erro de estimação encontram-se no semiplano esquerdo do plano complexo, resultando em dinâmica estável e convergente. Além disso, observa-se que o tempo de convergência do erro é reduzido, o que demonstra que os polos do observador foram adequadamente posicionados para garantir uma

dinâmica mais rápida do que a do sistema original. Esta escolha é fundamental para assegurar que o observador seja capaz de acompanhar em tempo real as variações do sistema, sem introduzir atrasos significativos nas estimativas.

Com base nas condições iniciais do cenário de simulação, a Figura 45 demonstra detalhadamente o comportamento do sinal de controle. Além disso, revela a variação observada no ângulo da haste do pêndulo ao longo do tempo.

Ao examinar a Figura 45, observa-se que a introdução da realimentação de estados usando um observador altera significativamente a resposta dinâmica do sistema à simulação inicial. Nesse contexto, no início de cada perturbação, o observador ainda alinha seus cálculos com os estados atuais e emite picos de comandos com valores positivos e negativos de ± 12 V. Ao mesmo tempo, os estados estimados começam a se ajustar, aproximando-se progressivamente dos valores reais, até que a realimentação de estados possa estabilizar a tensão em torno de -6 V para mitigar o efeito do distúrbio. Na presente simulação, observa-se um pico de sobressinal que se manifesta aproximadamente em $-4,2^\circ$, significativamente ultrapassando os 3° característicos do distúrbio inicial. Adicionalmente, observa-se que o intervalo temporal para a acomodação é aproximadamente 0,38 segundos. Quanto aos índices integrais de erro, os valores calculados foram 0,007208 para o ITSE, 0,001867 para o ISE, 0,04067 no caso do IAE e 0,1574 para o ITAE.

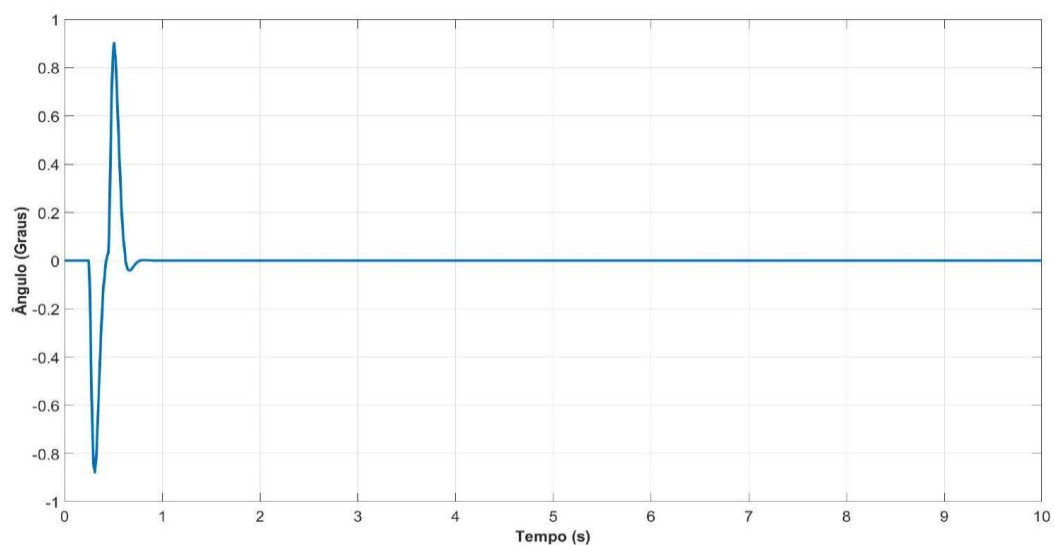
Pode-se inferir que a incorporação de um observador de estados leva à introdução de um erro significativo na estimativa inicial, que se manifesta em saturações extremas durante o período requerido para que os estados alcancem a convergência. Esse fenômeno resulta em um aumento do sobressinal na presença de distúrbios, pois uma fração do pulso tende a evadir-se durante o processo de ajuste dos estados. No entanto, o tempo necessário para o sistema atingir uma condição estável permanece aproximadamente como previsto.

Conforme se analisa a Figura 46, observa-se a presença de picos iniciais imediatamente após a ocorrência do distúrbio. O sinal de controle apresenta um salto abrupto, atingindo aproximadamente ± 5 V em questão de milissegundos. Apesar da ausência de um bloco de controle explícito, o mecanismo de ganho de realimentação se encarrega de restringir esses valores, com o objetivo de mitigar a deflexão indesejada. No término do pulso aplicado, um comando de 1,2 V é responsável por gerar um pico positivo adicional. Subsequentemente, o valor de V_a diminui rapidamente a zero, sem que ocorram oscilações indesejadas, garantindo uma resposta dinâmica adequada do sistema.

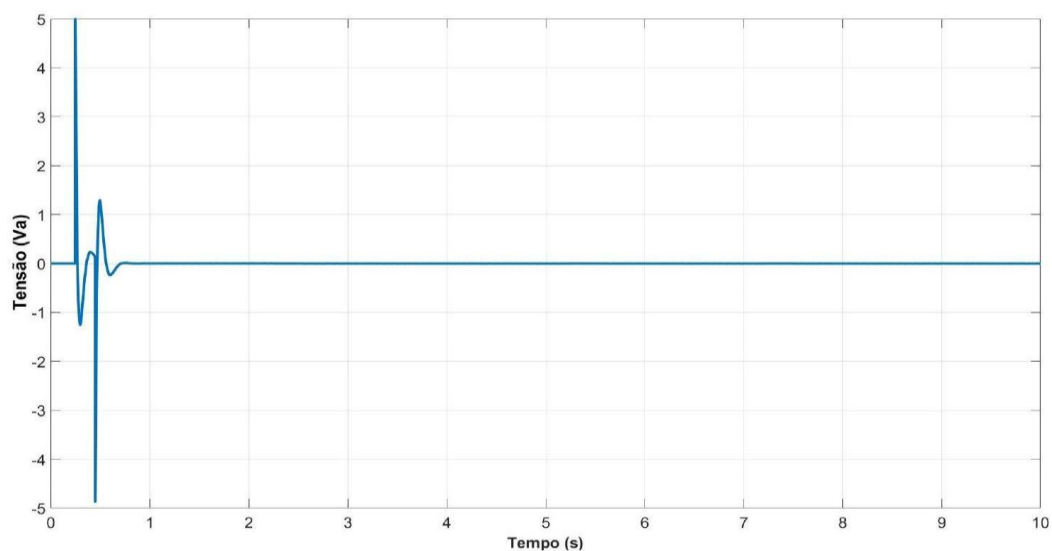
Em relação ao ângulo da haste do pêndulo, tem-se um máximo sobressinal logo após o pulso, de aproximadamente $0,9^\circ$, e um tempo de acomodação de 0,24 segundos. Quando se

examinou o índice ITSE, obteve-se um valor de $1,349 \cdot 10^{-5}$. Ademais, um cálculo detalhado foi conduzido para o índice ISE, resultando em uma medida precisa de $3,212 \cdot 10^{-5}$. No que concerne ao índice IAE, os cálculos realizados evidenciaram um aumento substancial, chegando ao valor final de 0,002859. Por último, a aferição do índice ITAE foi realizada, e este apresentou um resultado mensurado de 0,001227.

Figura 46 - Segundo cenário de simulação controle por realimentação de estados.



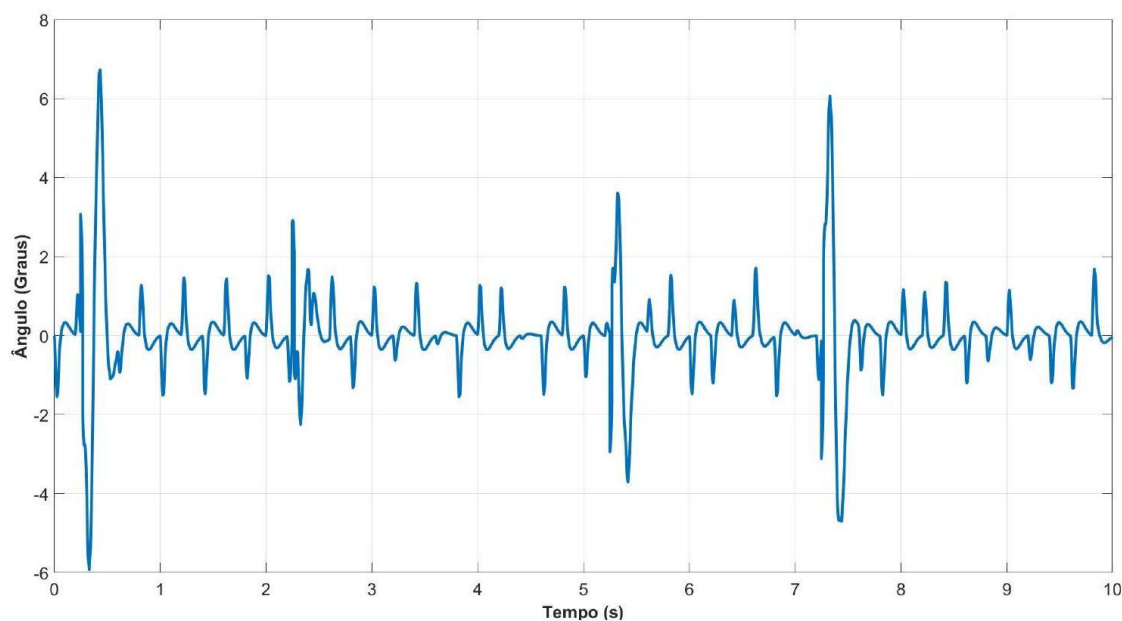
(a) Resposta do pêndulo



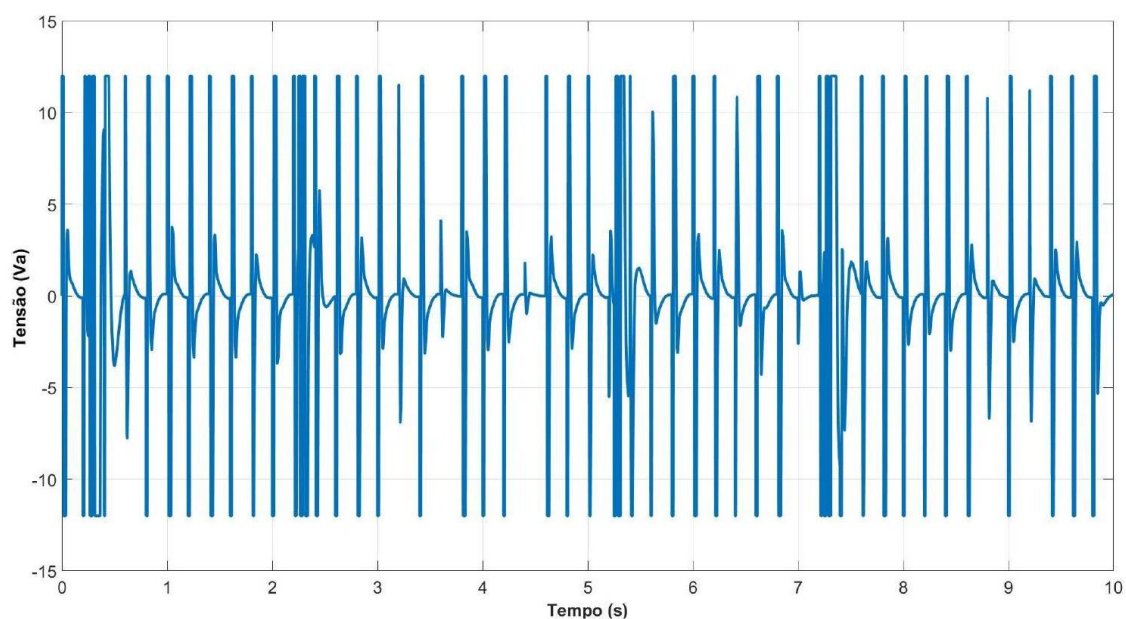
(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 47 - Terceiro cenário adaptado de simulação controle por realimentação de estados.



(a) Resposta do pêndulo



(b) Sinal de controle

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para o terceiro cenário de simulação, foi retirado o distúrbio aplicado ao motor, devido à incapacidade do controle por realimentação de estados manter o sistema estável. Portanto, analisando-se a Figura 47, nota-se que o sinal de controle está bastante saturado, trabalhando muito em cima do seu limite de ± 12 V. Portanto, o ruído gaussiano contribui com cerca de $\pm 0,5^\circ$, que é lido pelo observador e dispara inúmeras pequenas correções para o motor. Essas microatuações de ± 2 V mantêm o pêndulo oscilando em torno de zero com amplitude de cerca

de 2°. Nessa situação, o tempo de acomodação não se aplica, com isso, obtém-se um máximo sobressinal de aproximadamente 6,5°. A análise do índice ITSE revelou um valor calculado em 0,0137. Paralelamente, um exame metuculoso foi realizado para o índice ISE, possibilitando a determinação de uma medida altamente precisa de 0,003513 . No que tange ao índice IAE, os cálculos levados a cabo indicaram um aumento notório, culminando em um resultado final de 0,09326. Finalmente, a mensuração do índice ITAE foi efetuada, exibindo um resultado quantificado em 0,411.

6 ANÁLISE DE DESEMPENHO PID, PI-D, I-PD E REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

À medida que cada cenário de testagem é executado, os indicadores de desempenho abrangentes são individualizados, e as especificações de eficiência previamente destacadas são avaliadas. Para permitir a comparação dos resultados distintos entre as várias modificações do controle PID e realimentação de estados, os dados obtidos nos experimentos são organizados nas Tabelas 3, 4 e 5.

Tabela 3 - Resultado primeiro cenário de simulações

Controlador	M_p	T_s	ITSE	ISE	IAE	ITAE
PID	2,97	0,2	0,0009529	0,0002534	0,008926	0,03382
PI-D	2,97	0,2	0,0009471	0,0002522	0,008899	0,03368
I-PD	2,8	0,2	0,0009536	0,0002536	0,008933	0,03385
Realimentação de Estados	4,2	0,38	0,007208	0,001867	0,04067	0,1574

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ao conduzir uma análise minuciosa dos dados dispostos na Tabela 3, verifica-se que o comportamento transitório dos três controladores da família PID é similar. Entretanto, o controlador PI-D sobressai-se entre eles: ele preserva o mesmo fator de pico de sobressinal (M_p) característico do PID convencional, ao mesmo tempo que atinge os mais baixos valores nos critérios de avaliação integrados, qualificando-o como a solução ótima do ponto de vista global. Em contrapartida, enquanto o controlador I-PD consegue a menor taxa de pico de sobressinal, isso ocorre ao custo de uma pequena elevação nas métricas integrais, revelando-se assim a opção ideal quando a principal preocupação é a minimização do sobressinal. O controlador baseado na Realimentação de Estados, por outro lado, é notável por apresentar um declínio significativo na performance, junto a erros integrais que podem ser até oito vezes superiores aos observados nos controladores PID. Esta queda de desempenho é atribuída à ausência de um integrador, o que impede a eliminação do erro estacionário, além do uso de polos fechados situados de maneira conservadora.

Tabela 4 - Resultado segundo cenário de simulações

Controlador	M_p	T_s	ITSE	ISE	IAE	ITAE
PID	0,27	0,1	$1,065 \cdot 10^{-6}$	$2,623 \cdot 10^{-6}$	0,0007931	0,0003636
PI-D	0,27	0,14	$1,064 \cdot 10^{-6}$	$2,623 \cdot 10^{-6}$	0,0007937	0,0003676
I-PD	0,27	0,14	$1,064 \cdot 10^{-6}$	$2,623 \cdot 10^{-6}$	0,0007945	0,0003690
Realimentação de Estados	0,9	0,24	$1,349 \cdot 10^{-5}$	$3,212 \cdot 10^{-5}$	0,002859	0,001227

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Ao realizar uma análise minuciosa dos dados expostos na Tabela 4, verifica-se que os controladores PID, PI-D e I-PD conseguiram alcançar ultrapassagens praticamente inexistentes e tempos de assentamento reduzidos. O controlador PID destacou-se por apresentar o melhor desempenho geral, assim como os menores valores dos índices ITSE, ISE, IAE e ITAE. Embora os controladores PI-D e I-PD tenham mantido o mesmo valor de ultrapassagem (M_p), eles apresentaram tempos de assentamento (T_s) e índices integrais que foram ligeiramente superiores; entretanto, essas variações são consideradas insignificantes para a aplicação em questão. O controlador de realimentação de estados, projetado sem incluir uma ação integral, revelou erros integrais de 4 a 12 vezes maiores do que os observados com o PID, destacando a importância de se inserir um elemento integrador e reposicionar os polos para que o desempenho transitório se equipare aos dos controladores PID. Em resumo, o controlador PID continua sendo a melhor referência de desempenho, enquanto a técnica de realimentação de estados ainda necessita de melhorias adicionais para poder competir em termos de rapidez e precisão.

Tabela 5 - Resultado terceiro cenário de simulações

Controlador	M_p	T_s	ITSE	ISE	IAE	ITAE
PID	2,97	N/A	0,0009863	0,0002968	0,01648	0,06342
PI-D	2,7	N/A	0,000987	0,000297	0,0165	0,06349
I-PD	2,9	N/A	0,000987	0,000297	0,0165	0,06349
Realimentação de Estados	6,5	N/A	0,0137	0,003513	0,09326	0,4111

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Uma análise detalhada dos resultados apresentados na Tabela 5 revela que, ao operar em ambientes com ruído significativo e presença constante de perturbações, os controladores PID, PI-D e I-PD mantiveram o (M_p) em torno de 3° , com o controlador PI-D destacando-se ao atingir $2,7^\circ$. Além disso, todos os controladores apresentaram valores praticamente idênticos para os índices de desempenho ITSE, ISE, IAE e ITAE, o que confirma que o desempenho dos três métodos é comparável. Por outro lado, o controlador baseado na realimentação de estados, que foi projetado sem incluir a ação integral, apresentou erros integrais de uma ordem de magnitude de 10 a 15 vezes maiores, indicando claramente a necessidade de melhorias adicionais, como a inclusão de um integrador e a reconfiguração dos polos. É importante notar que o tempo de assentamento não foi medido durante este ensaio. A partir destes resultados, conclui-se que o controlador PID clássico continua sendo a referência superior em termos de desempenho ótimo, enquanto os controladores PI-D e I-PD representam alternativas com arquiteturas diferentes, mas com um desempenho comparável. A estratégia de controle por realimentação de estados precisa de ajustes adicionais, como a implementação de um controlador LQI, para atingir níveis de precisão e velocidade competitivos.

7 CONCLUSÃO

O propósito principal deste estudo foi realizar uma comparação aprofundada entre o desempenho de controladores clássicos, como o PID e suas variantes PI-D e I-PD, e um controlador contemporâneo baseado em realimentação de estados aplicado ao sistema de pêndulo invertido em uma base móvel. Para alcançar este intento, foram delineados três objetivos específicos: primeiramente, elaborar um modelo matemático preciso para o pêndulo; em seguida, desenvolver e projetar pelo menos três algoritmos de controle distintos; e, por fim, conduzir uma avaliação detalhada do desempenho destes algoritmos em situações de perturbações, ruídos e rejeição de distúrbios, utilizando para isso índices integrais de erro e parâmetros relacionados à resposta temporal.

Os achados do presente estudo exemplificam que os controladores que foram desenvolvidos cumpriram com êxito a tarefa de estabilizar o pêndulo invertido, garantindo que o bastão permanecesse ereto. Ademais, os diferentes esquemas de controle foram avaliados quanto aos seus aspectos positivos e seus potenciais defeitos, cujo impacto no desempenho do sistema foi detalhadamente analisado. Deste modo, os objetivos do estudo foram completamente atingidos. Os resultados evidenciaram que o desafio de estabilizar a haste em sua posição vertical foi de fato solucionado: após várias perturbações, todos os controladores conseguiram manter o ângulo próximo de 0° .

REFERÊNCIAS

- ALVES, Rafael Gustavo. **Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação**. 2018. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018. Disponível em: <https://www.monografias.ufop.br/handle/35400000/1651>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- CHWIF, L.; MEDINA, A. **Modelagem e simulação de eventos discretos: Teoria e aplicações**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2014.
- CORTÉS, F. R. **Robótica: control de robots manipuladores**. Barcelona: Marcombo, 2020.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 13. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- FERMINO, F. *et al.* **Estudo comparativo de métodos de sintonia de controladores PID**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014. Disponível em: https://bdta.abcd.usp.br/directbitstream/131ce341-2579-4362-b86f-faf01d3e8ed1/Fermino_Fernando.pdf. Acesso em: 23 mar. 2025.
- FERNANDES, H. V. **Análise de controle do pêndulo invertido empregando técnicas clássicas e modernas de controle**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Automação Industrial) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Araxá, 2015. Disponível em: <https://www.eng-automacao.araxa.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/152/2018/01/Trabalho-de-Conclus%C3%A3o-de-Curso-Hygor-Viegas-Fernandes.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- GADELHA, N. F. **Controle de um pêndulo invertido utilizando lógica fuzzy**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia Mecânica, Caraúbas, Rio Grande do Norte. 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufersa.edu.br/server/api/core/bitstreams/2b003e32-f4e7-45e6-9ae3-62f10804fc45/content>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- KATO, Emilia Harumi. **Análise do estudo da modelagem e do controle do pêndulo invertido para fins educacionais**. 2023. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Eletrônica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2023. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/36943>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- MOREIRA, Melkzedekue de Moraes Alcântara Calabrese *et al.* Controlador PID aplicado ao controle de um pêndulo invertido. *In: SIMPÓSIO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, 7.*, 2021, São Carlos. **Anais**. São Carlos, SP: EESC-USP, 2021. Disponível em: <http://soac.eesc.usp.br/index.php/SiPGEM/vsipgem/paper/view/3171/2307>. Acesso em: 30 jun. 2025.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

OGATA, K.; SOUZA, H. C. de; TANNURI, E. A. **Engenharia de controle moderno**. São Paulo: Pearson, 1998.

PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. **Sistemas de controle e realimentação**. São Paulo: Makron, 1997.

PIRES, Laio da Silva. **Técnicas de controle para robôs tipo pêndulo invertido**. 2023. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) - Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2023. Disponível em: <https://www.monografias.ufop.br/handle/35400000/5600>. Acesso em: 23 mar. 2025

POOLE, D. **Álgebra Linear: uma introdução moderna**. Tradução da 4ª ed. norte-americana. 2. ed. Porto Alegre: +A Educação - Cengage Learning Brasil, 2016.

RIBEIRO, Ricardo. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido**. 2007. 85 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2007. Disponível em: <https://repositorio.unifei.edu.br/xmlui/handle/123456789/3386>. Acesso em: 23 mar. 2025

SILVA, C. G. N.; GONÇALVES, K. L. **Controle de um pêndulo invertido sujeito a erros de comunicação**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2021. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/34405/1/penduloinvertidoerroscomunicacao.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2025

TABORDA, Renan Augusto. **Análise de desempenho de controladores aplicados ao sistema pêndulo invertido**. 2014. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2014. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/15812>. Acesso em: 23 mar. 2025

VAN DIJK, H. **Modelling and control of an inverted pendulum on a cart**. 1997. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Eindhoven University of Technology, Department of Electrical Engineering, Eindhoven, 1997. Disponível em: <https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/46850814/495804-1.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2025.

ANEXO A - CÓDIGO MATLAB PARA PROJETO PID

```

clc; clear; close all;
// Parametros do pendulo
M = 0.5676; % Massa do carro [Kg]
m = 0.16985; % Massa da haste do pendulo [Kg]
l = 0.239; % Metade do comprimento da haste [m]
I = 0.0032; %  $m \cdot l^2/3$  Momento de inercia da haste [kgm2]
b = 5.4; % Coeficiente de atrito do carrinho [N/m/s]
g = 9.81; % Gravidade [m/s2]
// Parametros do Motor
Km = 0.317; % Const Torque [Nm/A]
Kce = 0.468; % Constante eletromotriz [Vs/rad]
Ra = 6.69; % Resistencia [Ohm]
// Conjunto Motor-Roda
Nm = 2; % Numero de motores
r = 0.0425; % Raio da roda [m]
// Calculo da FT Do pendulo saida angular
// Definicao dos coeficientes do denominador
A = (I+m*l^2);
B = (M+m);
C = (Ra*r^2);
D = (Nm*Km*Kce+b*C);
E = (m*g*l);
F = (Ra*(m*l*r)^2);
// Definicao dos coeficientes do numerador
G = (Nm*Km*r*m*l);
// Definicao das funcoes de transferencia
s = tf('s');
Gp = (G*s) / ((F-A*B*C)*s^3 - (A*D)*s^2 + (E*C*B)*s + (E*D));
// Calculo da FT Do pendulo saida posicao
// Definicao dos coeficientes

P = (Ra*(r^2)*(M+m));
P1 = (Nm*Km*Kce+b*Ra*r^2);
P2 = (Nm*Km*r);
P3 = (m*l*Ra*r^2);
P4 = (m*l);
P5 = (m*g*l);
P6 = (I+m*l^2);
// Definicao da funcao de transferencia
GP = (P2 * (P5 - P6*s^2)) / ((P3*P4 - P*P6)*s^4 - (P1*P6)*s^3 + (P*P5)*
s^2 + (P1*P5)*s);
// LGR DO SISTEMA SAIDA ANGULAR
figure;
rlocus(Gp)
h = rlocusplot(Gp);
set(findobj(h, 'Type', 'line'), 'MarkerSize', 25); % Increase marker
size
// LGR DO SISTEMA SAIDA POSICAO
figure;
rlocus(GP)
h = rlocusplot(GP);

```

```

set(findobj(h, 'Type', 'line'), 'MarkerSize', 25); % Increase marker
size
// ECONTRAR ZEROS E POLOS DA TF DO SISTEMA
pzmap(Gp);
pzmap(GP);
// CONTROLE PID METODO ANALITICO
// Verificar Ki Ideal por meio do SISOTOOL:
sisotool(Gp)
Ki=(-14148); % Escolher Ki
p=(-20+20.98i); % Determinar o PMF
ang_pmf=angle(p); % Calcular a fase do PMF
mod_pmf=abs(p); % Calcular o modulo do PMF
num_GHs_pmf=((G)*(p)); % Num da tf de malha aberta avaliado em PMF

den_GHs_pmf=((F-A*B*C)*((p)^3)-(A*D)*((p)^2)+(E*C*B)*(p)+(E*D)); % Den
da tf de malha aberta avaliado em PMF
ang_GHs_pmf=angle(num_GHs_pmf/den_GHs_pmf); % Calcular a fase da tf de
malha aberta avaliada em PMF
mod_GHs_pmf=abs(num_GHs_pmf/den_GHs_pmf); % Calcular o modulo da tf de
malha aberta avaliada em PMF
Kp=(-sin(ang_pmf+ang_GHs_pmf)/(mod_GHs_pmf*sin(ang_pmf))-(2*Ki*cos(
ang_pmf))/(mod_pmf); % Calculo Kp
Kd=(sin(ang_GHs_pmf)/(mod_pmf*mod_GHs_pmf*sin(ang_pmf))+(Ki)/(mod_pmf
^2); % Calculo Kd
PID=pid(Kp,Ki,Kd); % TF PID e Ganho Obtido a partir do LGR de G.
Gp_pid=series(Gp,PID); % TF PID e Sistema completo
rlocus(Gp_pid) % Verificar LGR em busco do Ganho Ideal conforme PMF
sys=feedback(Gp_pid,1); % Fechar a malha
t=0:0.01:3;
step(sys,t);
// CALCULO Ti e Td
Ti = Kp/Ki;
Td = Kd/Kp;

```

ANEXO B - CÓDIGO MATLAB PARA PROJETO REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

```

clc; clear; close all;
// Parametros do pendulo
M = 0.5676; % Massa do carro [Kg]
m = 0.16985; % Massa da haste do pendulo [Kg]
l = 0.239; % Metade do comprimento da haste [m]
I = 0.0032; % Momento de inercia da haste [kgm^2]
b = 5.4; % Coeficiente de atrito do carrinho [N/m/s]
g = 9.81; % Gravidade [m/s^2]
// Parametros do Motor
Km = 0.317; % Const Torque [Nm/A]
Kce = 0.468; % Constante eletromotriz [Vs/rad]
Ra = 6.69; % Resistencia [Ohm]

// Conjunto Motor-Roda
Nm = 2; % Numero de motores
r = 0.0425; % Raio da roda [m]
// Constantes intermediarias
d1 = ((M+m)*I+M*m*l^2);
d2 = (Ra*r);
d4 = (Km*Kce);
n1 = ((M+m)*m*g*l);
n2 = ((-g)*(m*l)^2);
n3 = (b*m*l);
n4 = (m*l*Km*Kce);
n5 = (-(I+m*l^2));
n6 = (Ra*r^2);
n7 = (-m*l*Km);
n8 = ((I+m*l^2)*Km);
// Matrices do sistema linearizado
A = [0, 1, 0, 0;
     n1/d1, 0, 0, (1/d1)*(n3+((Nm*n4)/d2));
     0, 0, 0, 1;
     n2/d1, 0, 0, (n5/d1)*((Nm*d4/n6)+b)];
B = [0;
     (Nm*n7)/(d1*d2);
     0;
     (n8*Nm)/(d1*d2)];
C = [1 0 0 0;
     0 0 1 0];
// Controlabilidade e observabilidade
Mc = ctrb(A, B);
R_Mc = rank(Mc);
Mo = obsv(A, C);
R_Mo = rank(Mo);

// Polos desejados
p_c1 = [-20+20.98j, -20-20.98j, -40, -50];
p_o = 5*p_c1;
// Ganhos
Ke = place(A', C', p_o);
K = place(A, B, p_c1);

```

```

// Autovalores para verificacao
v1 = eig(A - B*K);
v2 = eig(A - Ke*C);
// Condicoes iniciais
x0 = [0.052; 0; 0; 0]; % Estado real
x_hat0 = zeros(4,1); % Estimado
x_aug( = [x0; x_hat0]; % Estado aumentado
// Simulacao
tspan = [0 5];
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);
[t, x_aug] = ode45(@(t,x_aug) closed_loop_dynamics(t, x_aug, A, B, C, K
, Ke), tspan, x_aug(, options);
// Resultados
x = x_aug(:, 1:4);
x_hat = x_aug(:, 5:8);
y = x(:, 1);
// Plot da saida
figure;
plot(t, y, 'LineWidth', 2);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Saida y = x1');
title('Resposta do sistema com controle por realimentacao de estados
estimados');
grid on;

// Comparacao angulo do pendulo (x1)
figure;
plot(t, x(:,1), 'b', t, x_hat(:,1), 'r--', 'LineWidth', 1.5);
legend('x1 real (angulo)', 'x1 estimado');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Angulo do pendulo [rad]');
title('Estimativa vs Estado real');
grid on;
// Funcao do sistema
function dx_aug = closed_loop_dynamics(~, x_aug, A, B, C, K, Ke)
x = x_aug(1:4);
x_hat = x_aug(5:8);
y = C * x;
y_hat = C * x_hat;
Vmax = 12; % Valor tipico de saturacao para um motor CC
u_unsat = -K * x_hat;
u = max(min(u_unsat, Vmax), -Vmax);
%u = -K * x_hat;
dx = A * x + B * u;
dx_hat = A * x_hat + B * u + Ke * (y - y_hat);
dx_aug = [dx; dx_hat];
end

```