



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Arthur Costa de Moraes Soares

## A Transformada de Laplace e Aplicações

Recife-PE  
Dezembro de 2025

# A Transformada de Laplace e Aplicações

por

Arthur Costa de Moraes Soares

Sob orientação de

**Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Recife-PE  
Dezembro de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S676t Soares, Arthur Costa de Moraes.  
A transformada de Laplace e aplicações / Arthur  
Costa de Moraes Soares. - Recife, 2025.  
56 f.; il.

Orientador(a): Gilson Mamede de Carvalho.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –  
Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2026.

Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

1. Laplace, Transformadas de. 2. Equações  
diferenciais. 3. Funções contínuas . 4.  
Farmacocinética 5. Matemática - Estudo e  
ensino. I. Carvalho, Gilson Mamede de, orient. II.  
Título

CDD 510

Arthur Costa de Moraes Soares

## A Transformada de Laplace e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 17/12/2025

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. Clessius Silva  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

---

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente  
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife-PE  
Dezembro de 2025

*Dedico este trabalho a meus familiares, amigos e professores que contribuíram de alguma forma na minha jornada e no meu crescimento pessoal e profissional.*

# Agradecimentos

Foi uma longa jornada desde o início do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) até chegar ao momento da defesa da monografia. Muitas dúvidas, incertezas e dificuldades surgiram ao longo do caminho, tanto na universidade quanto na conciliação com o trabalho, mas cheguei ao fim do curso com muito suor, dor e esforço. Nada disso foi conquistado sozinho. Durante todo o processo tive o apoio e a motivação de algumas pessoas especiais, pelas quais sou profundamente grato por participarem da minha vida e me ajudarem a evoluir como pessoa e como profissional, pois esse caminho teria sido bem mais tortuoso sem a luz de vocês. Primeiramente, agradeço à minha base, à minha família: meu pai Ricardo, minha mãe Adriana, minha vó Leninha, meu tio Amós e minha tia Aline, pessoas que estão comigo desde o início da minha vida, me orientando, incentivando, cuidando de mim e garantindo minha educação. Vocês são meu porto seguro. Sem vocês, provavelmente nada disso estaria acontecendo, amo vocês incondicionalmente. Dentro da universidade, criei amizades com pessoas incríveis que levarei comigo para o resto da vida, tornando o processo da graduação mais leve. Minha gratidão especial à minha família do CEGEN, meus amigos Lukas Kauan, Jaqueline Mayara, Tainá Bruna, Luís e Emanuel, por torcerem por mim, treinarem a apresentação da monografia comigo, pelos conselhos, instruções e palavras de incentivo e carinho, vocês me deram força e motivação para continuar e não ter medo, sou eternamente grato, amo muito vocês. Sou grato, do fundo do meu coração, à minha melhor amiga Mirela Silva, por me incentivar e apoiar desde o começo do curso, passar horas me ajudando a estudar nas disciplinas em que eu estava encrocado e ensaiar a apresentação comigo. Você me deu forças, direção e luz, muito obrigado, Mi, te amo. Por fim, sou grato ao meu professor e orientador Gilson Carvalho por aceitar trabalhar comigo mesmo com pouco tempo para a apresentação, pela excelente orientação e pela paciência, aprendi muito com o senhor, obrigado, e aos professores Rodrigo Clemente e Clessius Silva por aceitarem fazer parte da minha banca e por me ajudarem a aperfeiçoar meu trabalho com suas excelentes pontuações e correções, aprendi muito com vocês. Um curso de Matemática não é fácil, mas eu tive uma rede de apoio igual à transformada inversa, que me ajudou a passar pelo mundo difícil e complexo para o mundo real, sou eternamente grato a todos vocês.

# Resumo

Este trabalho apresenta a transformada de Laplace de forma simplificada e aplicada, mostrando como essa ferramenta pode simplificar a resolução de equações diferenciais ordinárias e problemas de valor inicial. Após uma breve motivação sobre nosso estudo, começamos a nos aprofundar nos conceitos e propriedades fundamentais da transformada de Laplace, bem como o teorema de existência e unicidade da transformada, que assegura a passagem do domínio do tempo para o domínio complexo via transformada e do domínio complexo para o real via transformada inversa, garantida por esse teorema. Também são exploradas funções descontínuas e propriedades que tornam possível analisar derivadas e sistemas de maior ordem sem a necessidade de resolver diretamente a equação no tempo. Também iremos nos aventurar pela área da farmacocinética, onde estudaremos o comportamento de uma substância no sangue e no tecido após ser injetada no corpo.

**Palavras-Chave:** Transformada de Laplace; Equações Diferenciais; Problemas de Valor Inicial; Funções Descontínuas; Farmacocinética.

# Abstract

This work presents the Laplace transform in a clear and applied manner, showing how this tool can simplify the solution of ordinary differential equations and initial value problems. After a brief motivation for our study, we delve into the fundamental concepts and properties of the Laplace transform, as well as the existence and uniqueness theorem, which ensures the transition from the time domain to the complex domain through the transform and from the complex domain back to the real domain through the inverse transform. Discontinuous functions and properties that make it possible to analyze derivatives and higher-order systems without directly solving the equation in time are also explored. We also venture into the field of pharmacokinetics, where we study the behavior of a substance in the blood and in tissue after being injected into the body.

**Keywords:** Laplace Transform; Differential Equations; Initial Value Problems; Discontinuous Functions; Pharmacokinetics.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Equações Diferenciais Ordinárias: Conceitos e Resultados Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 EDO de primeira ordem . . . . .	11
1.2 EDO de segunda ordem . . . . .	15
<b>2 A Transformada de Laplace</b>	<b>19</b>
2.1 Produto de Transformadas e Convolução . . . . .	37
2.2 Obtenção de uma solução particular de uma equação não homogênea. . . . .	43
<b>3 Aplicações da Transformada de Laplace</b>	<b>47</b>
3.1 Funções Descontínuas . . . . .	47
3.2 Comportamento da Derivada . . . . .	50
3.3 Aplicação da transformada de Laplace a um modelo farmacocinético corporal aberto de dois compartimentos. . . . .	51
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>56</b>

# Introdução

A transformada de Laplace surgiu como uma ferramenta matemática capaz de traduzir problemas que se apresentam no tempo para uma linguagem mais simples de analisar. Suas ideias iniciais aparecem no século XVIII com Pierre Simon Laplace, que estudava fenômenos ligados à probabilidade, ao comportamento de sistemas físicos e à análise de mudanças ao longo do tempo. Para Laplace, transformar uma função em outra forma era um recurso que permitia enxergar padrões ocultos e resolver questões que, sem esse artifício, se tornariam extremamente difíceis. Ao longo dos anos seguintes, vários matemáticos contribuíram para que essa ferramenta ganhasse a forma moderna e sólida que usamos hoje. Entre os mais importantes está Gustav Doetsch, responsável por organizar e sistematizar as propriedades da transformada de Laplace no século XX, tornando-a acessível a engenheiros, físicos e matemáticos. Também se destacam Oliver Heaviside, que aplicou ideias semelhantes em equações diferenciais mesmo antes da teoria estar formalmente estabelecida, e outros estudiosos que ajudaram a consolidar o uso da transformada em problemas práticos da ciência. Assim, a transformada de Laplace que utilizamos hoje é resultado de um processo histórico que envolve curiosidade científica, refinamento teórico e a necessidade de resolver problemas do mundo real.

No primeiro capítulo deste trabalho o objetivo é apresentar a base necessária para compreender a transformada de Laplace. Como a transformada é usada principalmente para resolver equações diferenciais ordinárias, começamos revisando esse tipo de equação, observando seus casos mais comuns, suas características e as técnicas fundamentais de solução. Também são discutidos alguns resultados clássicos da análise que justificam a existência e a unicidade de soluções, de modo que possamos entender por que certos métodos funcionam. O propósito deste capítulo é criar uma base sólida, permitindo que o leitor avance para a transformada sem lacunas conceituais.

O segundo capítulo concentra-se no estudo da transformada de Laplace. Neste ponto são apresentados sua definição formal, o raciocínio que motiva seu uso e as principais propriedades que tornam a transformada uma das técnicas mais eficientes para resolver equações diferenciais. Discutimos como o processo transforma operações diferenciais em expressões algébricas, simplificando significativamente a análise de sistemas lineares. São trabalhadas transformadas de funções elementares, propriedades operacionais como a linearidade e a inversão da transformada, além de condições que garantem

sua existência. Também introduzimos a ideia de convolução, uma ferramenta que auxilia na manipulação de produtos de transformadas. A intenção deste capítulo é mostrar de maneira clara como a teoria se organiza e como cada propriedade contribui para a eficácia da transformada na resolução de problemas.

Por fim apresentamos no terceiro capítulo algumas aplicações diretas da transformada de Laplace em problemas na área da Farmacocinética. Iniciamos com funções descontínuas e observamos como a transformada lida com mudanças bruscas e comportamentos definidos por partes, algo muito comum em sistemas reais. Em seguida examinamos como a transformada enxerga derivadas, o que nos permite analisar sistemas de ordem mais alta sem resolver a equação diretamente no tempo. Por fim aplicamos a ferramenta a um modelo farmacocinético simples, estudando como uma substância se comporta no organismo ao longo do tempo. O objetivo deste capítulo é evidenciar que a transformada vai além da teoria e se conecta de maneira natural a fenômenos presentes em diversas áreas.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Ordinárias: Conceitos e Resultados Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos teóricos fundamentais que servirão de base para o desenvolvimento dos conteúdos posteriores, especialmente para a aplicação da Transformada de Laplace na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e do problema do valor inicial. Para isso, serão revisitadas as principais técnicas de solução de EDOs de primeira e segunda ordem, com ênfase nos casos lineares, amplamente aplicados em modelos físicos e de engenharia.

Além disso, por questão de completude, aqui apresentaremos alguns resultados clássicos da Análise, tais como o Teorema Fundamental do Cálculo, e o Teorema de Picard-Lindelöf. Tais resultados não serão demonstrados aqui, pois não são o foco principal de estudo deste trabalho. De toda forma, o leitor interessado em ver os detalhes das demonstrações dos resultados encontrados neste capítulo podem ser averiguados em [1, 3].

Dessa forma, o presente capítulo busca construir uma base matemática sólida e coerente, necessária para compreender o uso da Transformada de Laplace como ferramenta na resolução de EDOs e problema do valor inicial.

### 1.1 EDO de primeira ordem

O estudo das equações diferenciais ordinárias é introduzido nos primeiros cursos de Cálculo quando estudamos as primitivas de uma função, no qual a principal ferramenta é o Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo; Teorema 1, LIMA, 2012, p. 137). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é diferenciável em todo  $x \in (a, b)$  e vale que  $F'(x) = f(x)$ .

Note que se  $f$  e  $F$  são como no Teorema 1.1, então  $F$  é uma solução da seguinte Equação Diferencial Ordinária

$$y'(x) = f(x).$$

**Exemplo 1.2.** Determine uma solução para

$$y'(x) = x^2 + 2e^{3x}.$$

Note que, pelo Teorema 1.1,  $F(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2e^{3x})$  é uma solução para a EDO em questão.

No que segue, apresentamos algumas definições e resultados importantes para o estudo da Transformada de Laplace e suas aplicações.

**Definição 1.3.** A forma explícita geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem é dada por

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real definida num aberto  $\Omega$  do plano  $xy$ . Uma solução de (1.1) é uma função diferenciável  $y = \varphi(x)$  definida em um intervalo aberto  $I$  tal que

$$(x, \varphi(x)) \in \Omega, \quad \text{para todo } x \in I,$$

e

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Ao estudarmos uma EDO de primeira ordem, se impomos uma condição sobre o valor da solução em um determinado  $x_0$ , obtemos o que chamamos de problema de valor inicial. É um problema da forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução para (1.2) se  $\varphi$  é uma solução para (1.1) e se  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Em muitas situações ao estudarmos a existência de solução para a EDO (1.1) conseguimos determinar uma família de soluções. Já ao estudarmos a solucionabilidade para o (1.2), sob certas condições sobre  $f$ , garantimos a existência e unicidade de solução para este tipo de problema, como veremos o Teorema de Picard-Lindelöf.

A seguir vejamos um tipo de EDO de primeira ordem muito importante, as EDO's lineares.

**Definição 1.4.** A EDO (1.1) é dita linear se  $f(x, y(x)) = p(x)y(x) + q(x)$ , ou seja, se (1.1) se expressa da forma

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x), \quad (1.3)$$

onde  $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto  $(a, b)$ .

**Observação 1.5.** Também podemos usar  $x(t)$  como função incógnita e  $x' = dx/dt$  para designar a derivada de  $x$  com relação à sua variável independente  $t$ .

**Definição 1.6.** Considerando a equação (1.3) e assumindo  $P(x)$  como uma primitiva de  $p(x)$ , isto é,  $P'(x) = p(x)$ , definimos o fator integrante como

$$\mu(x) = e^{-P(x)}.$$

Vamos estabelecer a solução geral para (1.3), para isto multiplicamos ambos os lados da equação (1.3) pelo fator integrante. Daí temos

$$e^{-P(x)}y'(x) - p(x)e^{-P(x)}y(x) = e^{-P(x)}q(x).$$

De onde obtemos

$$\frac{d}{dx} [e^{-P(x)}y(x)] = e^{-P(x)}q(x).$$

Assim podemos concluir que a solução geral para (1.3) é dada por

$$y(x) = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)} dx + Ce^{P(x)}. \quad (1.4)$$

**Exemplo 1.7.** Determine a solução geral para

$$y'(x) = -2xy(x) + 3x.$$

Note que  $p(x) = -2x$  e  $q(x) = 3x$ . Então,  $P(x) = -x^2$  é uma primitiva de  $p(x)$  e assim a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x^2} \int 3xe^{x^2} dx + Ce^{-x^2} \\ &= \frac{3}{2}e^{-x^2}e^{x^2} + Ce^{-x^2} \\ &= \frac{3}{2} + Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

**Definição 1.8.** Se existem  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(y) \neq 0$  para todo  $y \in (c, d)$  tais que  $f$  é dada por  $f(x, y) = h(x)/g(y)$  então a EDO (1.1) é dita uma EDO de variável separável.

Note que se (1.1) é uma EDO de variável separável, então podemos reescre-la da seguinte forma

$$y' = \frac{h(x)}{g(y)}, \quad \text{com } g(y) \neq 0 \quad (1.5)$$

Assim, se  $G(y)$  é um primitiva de  $g(y)$ , isto é, se  $G'(y) = g(y)$  para todo  $y$ , a partir da equação (1.5), sabendo que  $y = y(x)$  e usando a Regra da Cadeia obtemos

$$\frac{dG}{dx}(y(x)) = g(y(x))y'(x) = h(x).$$

Desta forma, se  $H(x)$  é uma primitiva de  $h(x)$ , então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que as soluções  $y(x)$  da equação (1.5) são dadas implicitamente por

$$G(y(x)) = H(x) + C, \quad (1.6)$$

onde  $C$  é uma constante real qualquer.

**Exemplo 1.9.** Determine a solução geral para

$$y' = xy^2. \quad (1.7)$$

Note que (1.7) é uma EDO de variável separável, com  $h(x) = x$  e  $g(y) = y^{-2}$ . Daí, por (1.6), uma vez que  $H(x) = x^2/2$  é  $G(y) = -y^{-1}$ , a solução geral para (1.7) é dada por

$$-y^{-1} = \frac{x^2}{2} + C$$

e portanto

$$y = \frac{-2}{x^2 + C} \quad .$$

Neste momento vamos enunciar o resultado mais importante da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, conhecido na literatura como Teorema de existência e unicidade de soluções de Picard.

**Teorema 1.10** (Teorema de Existência e Unicidade de Picard; Teorema 3.1, FIGUEIREDO; NEVES, 1997, p. 51). *Considere o problema de valor inicial (1.2) e suponha que  $f$  é contínua em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe e é contínua em  $\Omega$ . Então, existe um intervalo  $I$  contendo  $x_0$  e uma única função  $y = \varphi(x)$  definida em  $I$  satisfazendo (1.2).*

**Exemplo 1.11.** Determine, se existe, uma solução para o PVI

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = e^{3t} \\ x(0) = 0 \end{cases} .$$

Note que o fator integrante é  $\mu(t) = e^{-2t}$ . Multiplicando a equação pelo fator integrante

$$e^{-2t}x'(t) - 2e^{-2t}x(t) = e^t.$$

Usando a regra de derivada do produto e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$e^{-2t}x(t) = \int e^t dt = e^t + C.$$

Logo, a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{3t} + Ce^{2t}.$$

Pela condição inicial  $x(0) = 0$ , tem-se  $C = -1$ , e portanto

$$x(t) = e^{3t} - e^{2t}$$

e, pelo Teorema 1.10,  $x(t)$  é a única solução do PVI deste exemplo.

**Exemplo 1.12.** Determine, se existe, uma solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = y \operatorname{sen} x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}.$$

Note que a equação  $y' = y \operatorname{sen} x$  trata-se de uma EDO de variável separável, assim a solução  $y$  satisfaz

$$\ln |y| = -\cos x + C$$

De onde obtemos

$$y = Ce^{-\cos x}.$$

Sabendo que  $y(\pi) = 1$  temos que  $C = e^{-1}$  e, pelo Teorema 1.10, a única solução para o PVI deste exemplo é

$$y = e^{-1}e^{-\cos(x)} = e^{-\cos(x)-1}.$$

## 1.2 EDO de segunda ordem

**Definição 1.13.** Uma EDO de segunda ordem é uma equação da forma:

$$y''(x) = f(x, y, y') \tag{1.8}$$

onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Uma solução para (1.8) é uma função  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , tal que

$$\varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Aqui vamos concentrar nossos estudos a respeito das Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem lineares com coeficientes constantes, isto é, vamos estudar equações da forma:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x) \tag{1.9}$$

em que  $p, q$  são constantes reais e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

Em primeiro lugar vamos trabalhar com equações lineares com coeficientes constantes homogêneas, isto é, equações do tipo (1.9) com  $f(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Ou seja, vamos considerar a equação

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \tag{1.10}$$

**Definição 1.14.** Duas funções  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  são ditas linearmente independentes (*l.i.*) se a equação

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in I$$

admite apenas a solução nula, ou seja,  $\alpha = \beta = 0$ .

**Proposição 1.15** (Teorema 4.5, FIGUEIREDO; NEVES, 1997, p. 98). *Se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são duas soluções l.i. para (1.10), então toda solução  $\varphi$  para (1.10) pode ser escrita como combinação linear de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Isto é, se  $\varphi$  é uma solução para (1.10), então existem  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad \text{para todo } x \in \text{Dom}(\varphi).$$

Assim, usando a Proposição 1.15 temos que para determinarmos a solução geral da EDO (1.10) precisamos estabelecer duas soluções *l.i.*

Para isto vamos buscar soluções da forma  $y(x) = e^{\lambda x}$ , em que  $\lambda \in \mathbb{R}$  a ser determinado. Assim, a partir de (1.10) temos

$$0 = y''(x) + py'(x) + qy(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = e^{\lambda x}[\lambda^2 + p\lambda + q].$$

Uma vez que  $e^t \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{1.11}$$

que é chamada de equação característica da EDO (1.10). Com isto temos que as soluções

*l.i.* desejadas são determinadas a partir do sinal do discriminante  $\Delta = p^2 - 4q$  da equação característica (1.11).

**Proposição 1.16** (Seção 4.2.2, FIGUEIREDO; NEVES, 1997, p. 101–105). (i) Se  $\Delta > 0$ , então  $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  e  $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  são as soluções *l.i.* de (1.10), onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as soluções distintas de (1.11).

(ii) Se  $\Delta = 0$ , então  $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  e  $\varphi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$  são as soluções *l.i.* de (1.10), onde  $\lambda_1$  é a única solução de (1.11).

(iii) Se  $\Delta < 0$ , então  $\varphi_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\omega x)$  e  $\varphi_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x} \text{sen}(\omega x)$  são as soluções *l.i.* de (1.10), onde  $\omega = \sqrt{-\Delta}/2$ .

**Exemplo 1.17.** Determine a solução geral das EDO's abaixo.

a)  $y''(x) + 5y'(x) - 6y(x) = 0$ .

Note que  $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$  é a equação característica associada a esta EDO e que  $\Delta = 49 > 0$ . Logo, a solução geral é dada por

$$\varphi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}.$$

b)  $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$ .

Note que  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$  é a equação característica associada a esta EDO e que  $\Delta = 0$ . Logo, a solução geral é dada por

$$\varphi(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

c)  $y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = 0$ .

Note que  $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$  é a equação característica associada a esta EDO e que  $\Delta = -36 < 0$ . Logo, a solução geral é dada por

$$\varphi(x) = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \text{sen}(3x).$$

Com o estudo da EDO homogênea podemos definir a solução geral para (1.9).

**Teorema 1.18.** Considere uma EDO da forma (1.9) e  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$  a EDO homogênea associada à (1.9). Então, a solução geral para (1.9) é dada por:

$$\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \psi_P(x),$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são soluções *l.i.* da EDO homogênea associada à (1.9) e  $\psi_P$  é uma solução particular de (1.9).

**Exemplo 1.19.** Detemine a solução geral para  $y''(x) + 5y'(x) - 6y(x) = 2 + 10x - 6x^2$ . Note que do lado direito da equação temos um polinômio de segundo grau, então, é natural pensar numa solução particular  $\psi_P$  da forma

$$\psi_P(x) = Ax^2 + Bx + C ,$$

com

$$\psi'_P(x) = 2Ax + B \quad e \quad \psi''_P(x) = 2A.$$

Substituindo as derivadas de  $\psi_P$  de primeira e segunda ordem na EDO, temos que

$$\begin{aligned} \psi''_P + 5\psi'_P - 6\psi_P &= 2A + 5(2Ax + B) - 6(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 2A + 10Ax + 5B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C \\ &= (-6A)x^2 + (10A - 6B)x + (2A + 5B - 6C) \\ &= -6x^2 + 10x + 2. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes das duas últimas expressões, obtemos

$$\begin{aligned} -6A &= -6 \quad \Rightarrow A = 1, \\ 10A - 6B &= 10 \quad \Rightarrow 10 - 6B = 10 \Rightarrow B = 0, \\ 2A + 5B - 6C &= 2 \quad \Rightarrow 2 - 6C = 2 \Rightarrow C = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_P(x) = x^2.$$

Usando o item a) do Exemplo 1.17 temos que a solução geral é dada por

$$\varphi(x) = C_1e^x + C_2e^{-6x} + x^2.$$

## Capítulo 2

# A Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace, desenvolvida pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749–1827), é uma ferramenta bastante importante para a solução de problemas que envolvem equações diferenciais. Usando essa ferramenta, conseguimos facilitar a resolução dessas equações, transformando-as em equações algébricas, o que simplifica a solução da equação diferencial, visto que as equações transformadas são mais fáceis de manipular e resolver.

Considere a seguinte equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem não homogênea

$$y'' + 4y' + 5y = f(x). \quad (2.1)$$

Começaremos a transformá-la em uma equação algébrica. Escrevemos (2.1) da seguinte forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

fazendo  $D = \frac{d}{dx}$ , temos

$$D^2 + 4D + 5 = f(x).$$

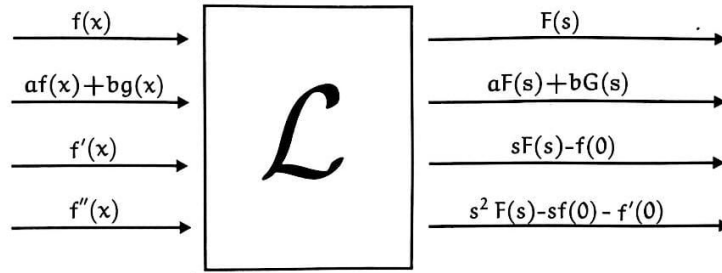
Perceba que facilitará nossa vida se a solução dessa EDO for dada pela seguinte equação algébrica

$$y(x) = \frac{f(x)}{D^2 + 4D + 5}, \quad (2.2)$$

mas, matematicamente, isso não faz sentido, pois nessa tentativa igualamos um termo algébrico à uma notação de derivada. No entanto, podemos nos basear nesse raciocínio para construir algo que consiga algebricamente resolver esta EDO.

Neste momento, a ideia da transformada de Laplace nos ajuda basicamente como uma ferramenta que atua na função, na EDO, transformando uma função no domínio do tempo e levando-a a um domínio complexo. Assim, conseguimos nosso objetivo: algebrizar essa EDO para facilitar sua solução. Segue abaixo uma imagem que exemplifica como a

ferramenta  $\mathcal{L}$  age em algumas funções.



Fonte: FIGUEIREDO; NEVES, 1997, p. 181, cap 5.

Perceba que transformamos funções do domínio real  $x$  para um domínio complexo  $s$ . Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, denotamos sua transformada da seguinte forma. Transformada de  $f(x)$  e  $g(x)$  é  $F(s)$  e  $G(s)$  respectivamente, também denotamos dessa forma  $\mathcal{L}(f(x))$  e  $\mathcal{L}(g(x))$ .

**Definição 2.1.** (Transformada de Laplace) Seja  $f(x)$  uma função em  $[0, +\infty)$ , definimos sua transformada da seguinte forma

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx. \tag{2.3}$$

Supondo que a integral convirja, para pelo menos algum  $s$ , transformamos a função  $f(x)$  na variável  $x$ , na sua transformada  $F(s)$  na variável  $s$ . A vantagem de utilizar a transformada é que na maioria das vezes  $F(s)$  é muito mais simples de manipular algebricamente do que  $f(x)$ .

**Observação 2.2.** Daqui em diante quando dissermos que  $s > k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , estaremos nos referindo à parte real de  $s$ .

**Exemplo 2.3.** Considere a função  $f(x) = e^{kx}$ . Calculando sua transformada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{kx}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{kx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-k)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-k)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(s-k)x}}{-(s-k)} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-k)A} - 1}{-(s-k)} \\ &= \frac{1}{s-k}, \quad \text{se } s > k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Além disso,  $F(s)$  é mais regular que  $f(x)$ , por exemplo. Considere a seguinte função para  $c \geq 0$ :

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases} \quad (2.5)$$

aplicando a transformada, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu_c) &= \int_c^\infty e^{-sx} 1 \, dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A e^{-sx} \, dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{-e^{-sx}}{s} \right]_c^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{-e^{-As}}{s} - \left( \frac{-e^{-cs}}{s} \right) \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{-e^{-As} + e^{-cs}}{s} \right] = \frac{e^{-cs}}{s} \quad , \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(\mu_c) = \frac{e^{-cs}}{s} \quad . \quad (2.6)$$

Observe que a função obtida após a transformada é bem mais regular que  $\mu_c$ .

Dizemos que uma função é admissível se não cresce mais rapidamente do que uma função exponencial. A transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  está definida nesse espaço, e sua inversa  $\mathcal{L}^{-1}$ , cuja existência será demonstrada adiante, está definida no espaço das funções que crescem assintoticamente como  $1/s$ . Essas noções serão aprofundadas posteriormente.

**Proposição 2.4.** *A transformada de Laplace satisfaz as seguintes propriedades:*

*i) A transformada de Laplace é linear, isto é, se  $f$  e  $g$  são funções admissíveis então*

$$\mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\}, \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

*ii) A transformada de Laplace “destrói” derivadas, isto é,  $\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$ , para toda  $f$  admissível e diferenciável.*

*iii) A transformada de Laplace é inversível, isto é, existe um operador  $\mathcal{L}^{-1}$  tal que se  $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$  então  $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}(F(s))) = F(s)$  e  $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(x))) = f(x)$ .*

**Demonstração:**

i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(x) + bg(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (af(x) + bg(x)) dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} af(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} bg(x) dx \\
&= a \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + b \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \\
&= a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\}.
\end{aligned}$$

ii)

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx$$

$$u = e^{-sx}, v = f(x)$$

$$du = -se^{-sx} dx, dv = f'(x) dx$$

integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(x)\} &= [e^{-sx} f(x)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \\
&= -f(0) + sF(s) \\
&= sF(s) - f(0).
\end{aligned}$$

Note que a derivada  $f'$  é “destruída” ao passar pela transformada.

iii) A demonstração deste item se resume a mostrar que  $\mathcal{L}$  é injetor, o que veremos mais adiante no Teorema 2.6.

■

E agora depois de definirmos a transformada de Laplace e conhecermos algumas propriedades, podemos voltar a pensar na equação (2.1). Aplicando a transformada na referida equação temos

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Assumindo sem perda de generalidade que  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s); \\
\mathcal{L}\{4y'\} &= 4\mathcal{L}\{y'\} = 4(sY(s) - y(0)) = 4sY(s); \\
\mathcal{L}\{5y\} &= 5\mathcal{L}\{y\} = 5Y(s) \text{ e} \\
\mathcal{L}\{f(x)\} &= F(s).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.4 temos

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 5Y(s) = F(s).$$

De onde concluímos que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4s + 5}, \text{ sempre que } s \neq 1 + i \text{ e } s \neq 1 - i. \quad (2.7)$$

Veja que naturalmente a transformada nos trouxe a uma equação parecida com a equação (2.2) aos poucos, agora já conseguimos pensar em uma função  $\mathcal{Y}(s)$ , que aplicando a  $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{Y}(s))$ , obtemos  $y(x)$  que é a solução da nossa EDO. Definimos essa  $\mathcal{Y}(s)$  por

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4s + 5}.$$

No próximo passo da nossa construção precisaremos saber sobre a inversa, daí conseguiremos aplicá-la e obter a solução da EDO (2.1).

Agora estamos em uma fase super importante para nosso estudo sobre a Transformada de Laplace, que é a condição de existência da transformada e da inversa. Para garantir a existência, precisamos de uma função que não cresça rapidamente, pois para a transformada existir é necessário que essa integral (2.3) convirja.

Por exemplo, a função

$$f(x) = e^{x^2}$$

não possui transformada, pois quando  $|x| \rightarrow \infty$ , o crescimento de  $e^{x^2}$  é mais rápido do que o de qualquer exponencial  $e^{\alpha x}$ , com  $\alpha > 0$ , portanto, iremos nos limitar às funções chamadas de admissíveis, que são funções que admitem transformada, isto é, são funções definidas no intervalo  $[0, +\infty)$  e que não cresçam mais que a função exponencial quando  $x \rightarrow \infty$ , ou seja, existem constantes  $C > 0$  e  $K > 0$ , tais que

$$|f(x)| \leq C e^{kx}, \quad x \in [0, +\infty). \quad (2.8)$$

Uma função  $f(x)$  é contínua por partes em  $[a, b]$  se conseguirmos dividir  $[a, b]$  em uma quantidade finita de subintervalos, onde  $f(x)$  é contínua em todos os interiores desses subintervalos, e  $f(x)$  possui limites quando  $x \rightarrow a$  e quando  $x \rightarrow b$ .

Se  $f$  é admissível, isto é, contínua por partes e com crescimento menor que a função exponencial, existe  $F(s)$  definida para todo  $s > k$  e para todo  $x_0 > 0$ . Observe o que acontece quando aplicamos A transformada em (2.8) em ambos os lados, temos o seguinte.

$$\int_0^{x_0} e^{-sx} |f(x)| dx \leq \int_0^{x_0} e^{-sx} C e^{kx} dx.$$

Note que

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} C e^{kx} dx \leq \frac{C}{s-k},$$

pois

$$\mathcal{L}(C e^{kx}) = \frac{C}{s-k},$$

portanto podemos afirmar que

$$\int_0^{x_0} e^{-sx} |f(x)| dx \leq \int_0^{x_0} e^{-sx} C e^{kx} dx \leq \frac{C}{s-k}.$$

Note que, do lado esquerdo temos,  $|F(s)|$ , portanto,

$$|F(s)| \leq \frac{C}{s-k}, \quad (2.9)$$

essa estimativa funciona para funções que são admissíveis.

Se  $f(x)$  é admissível, isto é, ela satisfaz (2.8), então uma  $g(x)$  definida por

$$g(x) = \int_0^x f(\omega) d\omega \quad (2.10)$$

também é admissível, portanto também satisfaz (2.8). Com a mesma constante  $k$ , logo  $G(s)$  existe para todo  $s > k$ .

Em relação à existência da inversa  $\mathcal{L}^{-1}$  note que se  $f(x)$  e  $g(x)$  diferirem somente nos pontos de descontinuidade, temos que  $F(s) = G(s)$ , mesmo que  $f(x) \neq g(x)$ , pois para aplicar a transformada não nos interessa os  $f(x)$  é diferente de  $g(x)$ , com isso, temos um resultado extremamente importante que nos garante a existência e a unicidade da Transformada de Laplace. Para demonstrá-lo usaremos o Teorema de Aproximação de Weierstrass enunciado como Lema abaixo, a demonstração deste resultado pode ser vista em [3].

**Lema 2.5** (Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, existe uma sequência de polinômios  $p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  uniformemente em  $[a, b]$ .*

**Teorema 2.6** (Existência e Unicidade da Transformada de Laplace). *Se  $f(x)$  e  $g(x)$ , forem funções admissíveis tais que  $F(s) = G(s)$  para  $s > s_0$ , então  $f(x) = g(x)$ , exceto nos pontos de descontinuidades.*

**Demonstração:** Começamos definindo uma função  $h(x) = f(x) - g(x)$ , temos que  $H(s) = 0$  para todo  $s \geq s_0$ . Continuaremos a demonstração supondo que  $h(x)$  seja contínua, caso  $h(x)$  tenha descontinuidades, as integrais abaixo devem ser desmembradas em somas de integrais nos intervalos em que  $h(x)$  é contínua. Logo para  $n = 1, 2, 3, \dots$

segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(h)(s_0 + n) = H(s_0 + n) = \int_0^\infty e^{-(s_0+n)x} h(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-nx} e^{-s_0x} h(x) dx = \int_0^\infty e^{-nx} v'(x) dx = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Onde  $v(x) = \int_0^x e^{-s_0t} h(t) dt$ . Integrando por partes (2.11)

com

$$u = e^{-nx}, \quad du = -ne^{-nx} dx, \quad dv = v'(x) dx, \quad v = v(x)$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-nx} v'(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-nx} v(x)]_0^A + n \int_0^\infty v(x) e^{-nx} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-nA} v(A) - e^{-n0} v(0)] + n \int_0^\infty v(x) e^{-nx} dx \end{aligned}$$

Quando  $A \rightarrow \infty$ , temos  $e^{-nA} \rightarrow 0$ . Além disso, como  $v$  é admissível, seu crescimento é no máximo exponencial, o que garante que o termo  $e^{-nA} v(A)$  tende a zero. Como  $v(0) = 0$ , o termo de fronteira se anula, restando apenas

$$\int_0^\infty e^{-nx} v(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

Nos pontos em que  $h(x)$  é contínua percebemos que  $v(x)$  é derivável. Logo, se provarmos que  $v(x) = 0$  então  $h(x) = 0$ . Para mostrar que  $v(x) = 0$ , precisamos fazer tal mudança de variável em (2.12):  $x = -\ln(t)$  e  $u(t) = v(-\ln(t))$ . Fazendo a mudança de variável, temos  $v(x) = u(t)$  com  $t = e^{-x}$ . Além disso,

$$dx = -\frac{1}{t} dt$$

e

$$e^{-nx} = e^{n \ln(t)} = t^n.$$

Em relação aos limites de integração, quando  $x = 0$  temos  $t = e^0 = 1$ , e quando  $x \rightarrow \infty$  temos  $t = e^{-\infty} = 0$ . Portanto a integral se transforma em

$$\int_0^\infty e^{-nx} v(x) dx = \int_1^0 t^n u(t) \left(-\frac{1}{t}\right) dt.$$

Note que precisamos inverter os limites de integração e conseqüentemente o sinal da integral; multiplicando por  $(-1/t)$  torna a integral positiva novamente. Assim obtemos

$$\int_0^\infty e^{-nx} v(x) dx = \int_0^1 t^n t u(t) \frac{1}{t} dt = \int_0^1 t^{n-1} u(t) dt.$$

Como a integral (2.11) é zero, concluímos que

$$0 = \int_0^1 t^{n-1} u(t) dt. \quad (2.13)$$

Usaremos um resultado clássico da análise, o teorema da aproximação de Weierstrass, para chegar a conclusão, que o fato da integral (2.13) ser nula, implica em  $u(t) = 0$ . O teorema de aproximação de Weierstrass diz que qualquer função contínua  $u(t)$  pode ser aproximada uniformemente por um polinômio  $p(t)$  tal que

$$|u(t) - p(t)| < \varepsilon, \quad t \in [0, 1].$$

Logo,

$$\int_0^1 |u(t) - p(t)|^2 dt = \int_0^1 (u(t))^2 dt - 2 \int_0^1 u(t)p(t) dt + \int_0^1 (p(t))^2 dt < \varepsilon.$$

Com isso, note que pelo teorema de aproximação de Weierstrass as integrais semelhantes a equação (2.13) são nulas, portanto a integral do produto de  $u(t)$  com  $p(t)$  se anula, e como nos restam duas integrais positivas, as duas são menores que  $\varepsilon$ , logo

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt < \varepsilon.$$

Para todo  $\varepsilon > 0$ , logo, (2.13) temos que

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt = 0.$$

Como  $u$  é contínua por partes em  $[0, \infty)$ , se existisse  $x_0 \geq 0$  tal que  $u(x_0) \neq 0$ , então existiria um intervalo  $[a, b] \subset [0, \infty)$  no qual  $u$  mantém o mesmo sinal. Nesse caso, teríamos

$$\int_0^\infty e^{-nx} u(x) dx \neq 0$$

para  $n$  suficientemente grande, o que contradiz (2.12). Portanto, conclui-se que  $u(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Daí segue que  $v(x) = 0$  e, conseqüentemente,  $h(x) = 0$  para todo  $x \in [0, \infty)$ . Assim, obtemos  $F(s) = G(s)$  e, portanto,  $f(x) = g(x)$ , exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade, o que conclui a demonstração. ■

Neste momento o foco do nosso estudo será encontrar outras propriedades da transformada de Laplace, utilizando da transformada inversa e algumas fórmulas de recorrência que irão nos ajudar a encontrar soluções para as equações diferenciais, além de demonstrar algumas propriedades que nos ajudarão a determinar a Transformada de Laplace de

outras funções. Em (2.4) calculamos a transformada de Laplace da função exponencial

$$\mathcal{L}\{e^{kx}\} = \frac{1}{s-k}, \quad s > k.$$

Ao aplicar a transformada inversa, saímos do domínio complexo de volta para o domínio real, assim, voltando ao domínio real obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kx}, \quad s > 0.$$

Podemos usar esse procedimento para calcular a transformada e a inversa de diversas funções elementares. Assim como no cálculo da transformada nos limitamos às funções admissíveis, isto é, funções que não crescem mais rápido que a exponencial. No cálculo da transformada inversa iremos nos limitar a funções que respeitem a estimativa (2.9). Em vista dessa estimativa, para  $s \rightarrow \infty$ , o termo dominante no denominador é  $s$ , pois para valores grandes de  $s$ , o valor de  $k$  torna-se insignificante, segue que

$$|F(s)| \leq \frac{C}{s-k} \sim \frac{C}{s}.$$

Denotamos

$$F(s) = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow \infty.$$

Percebe-se que  $F(s)$  se comporta como a função  $1/s$  quando  $s$  assume valores grandes, isso é importante pois, precisamos de funções que não cresçam rapidamente, assim dizemos que  $F(s)$  tem ordem  $O(1/s)$ . Portanto, para o cálculo da transformada inversa iremos levar em consideração somente esse tipo de função quando aprofundarmos nossos estudos sobre a inversa.

A primeira propriedade que decorre da definição 2.3, é que  $\mathcal{L}$  é um operador linear,

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$

Iremos explorar a linearidade de  $\mathcal{L}$  a fim de encontrar transformadas de outras funções.

**Proposição 2.7.** *Sejam  $k, \omega \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = e^{kx} \cos(\omega x)$  e  $g(x) = e^{kx} \sin(\omega x)$  admissíveis, tais que suas transformadas de Laplace existam. Então, as transformadas de Laplace dessas funções são dadas por*

$$\mathcal{L}\{e^{kx} \cos(\omega x)\} = \frac{s-k}{(s-k)^2 + \omega^2}, \quad s > k,$$

e

$$\mathcal{L}\{e^{kx} \sin(\omega x)\} = \frac{\omega}{(s-k)^2 + \omega^2}, \quad s > k.$$

**Demonstração:** Começaremos em (2.4) colocando no lugar do  $k$ , um número complexo

$k+i\omega$ , obtendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{(k+i\omega)x}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{(k+i\omega)x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k-i\omega)x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(s-k-i\omega)x}}{-(s-k-i\omega)} \right]_0^A\end{aligned}$$

note que, quando  $A \rightarrow \infty$  o termo  $e^{-(s-k-i\omega)x}$  zera, daí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{(k+i\omega)x}\} &= \left[ 0 - \left( \frac{e^{-(s-k-i\omega)0}}{-(s-k-i\omega)} \right) \right] \\ &= \left[ 0 - \left( \frac{1}{-(s-k-i\omega)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(s-k-i\omega)}\end{aligned}$$

multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do número complexo

$$= \frac{1}{(s-k-i\omega)} \frac{s-k+i\omega}{s-k+i\omega} = \frac{s-k+i\omega}{(s-k)^2 + \omega^2} .$$

Lembrando da fórmula de Euler,

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \\ e^{(k+i\omega)x} &= e^{kx} e^{i\omega x} = e^{kx} (\cos(\omega x) + i \operatorname{sen}(\omega x)) \\ &= e^{kx} \cos(\omega x) + i e^{kx} \operatorname{sen}(\omega x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

já sabemos que

$$\mathcal{L}\{e^{(k+i\omega)x}\} = \frac{s-k+i\omega}{(s-k)^2 + \omega^2}\tag{2.15}$$

aplicando a transformada em (2.14)

$$\mathcal{L}\{e^{(k+i\omega)x}\} = \mathcal{L}\{e^{kx} \cos(\omega x)\} + i \mathcal{L}\{e^{kx} \operatorname{sen}(\omega x)\}$$

separando a parte real da imaginária em (2.15) e depois comparando (2.15) com (2.14)

$$\mathcal{L}\{e^{(k+i\omega)x}\} = \frac{s-k}{(s-k)^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{(s-k)^2 + \omega^2}$$

temos

$$\mathcal{L}\{e^{kx} \cos(\omega x)\} = \frac{s-k}{(s-k)^2 + \omega^2} ,$$

$$\mathcal{L}\{e^{kx} \operatorname{sen}(\omega x)\} = \frac{\omega}{(s-k)^2 + \omega^2} \quad . \quad (2.16)$$

■

Veja que partimos da transformada de uma função e através da linearidade conseguimos encontrar outras duas transformadas.

**Proposição 2.8.** *Sejam  $A, B, k, \omega \in \mathbb{R}$ , com  $\omega > 0$ . Então, a transformada inversa de Laplace da forma*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right]$$

é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] = e^{kx} \left[ A \cos(\omega x) + \frac{Ak + B}{\omega} \operatorname{sen}(\omega x) \right].$$

**Demonstração:** A partir de uma combinação linear das duas transformadas obtidas na proposição (2.16), podemos deduzir a fórmula da transformada inversa de uma nova função. Para isso, consideremos a seguinte combinação:

$$As + B = A(s-k) + B$$

$$As + B = As - Ak + B.$$

Substituindo  $s$  por  $s-k$  e somando o termo  $Ak$ , retornamos à expressão original  $As + B$ ,

$$As + B = A(s-k) + (Ak + B).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e utilizando da sua linearidade, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A(s-k)}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Ak + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right].$$

Retirando as constantes  $A$  e  $\frac{Ak+B}{\omega}$  das transformadas, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] = A \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-k}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] + \frac{Ak + B}{\omega} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-k)^2 + \omega^2}\right].$$

Observe que foi necessário introduzir o fator  $\omega$  no numerador da segunda fração para que ela coincidissem com uma transformada já conhecida, e incluímos também  $\omega$  no denominador, preservando a expressão anterior. Note que, já foram conhecidas essas expressões e suas transformadas na proposição anterior. Assim

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As + B}{(s-k)^2 + \omega^2}\right] = Ae^{kx} \cos(\omega x) + \frac{Ak + B}{\omega} e^{kx} \operatorname{sen}(\omega x),$$

portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{(s-k)^2+\omega^2}\right] = e^{kx}\left[A\cos(\omega x) + \frac{Ak+B}{\omega}\sin(\omega x)\right]. \quad (2.17)$$

■

**Teorema 2.9.** *Se  $f(x)$  é derivável em  $(0, \infty)$ , com  $f'(x)$  admissível, então*

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+), \quad s > k, \quad (2.18)$$

onde  $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

**Proposição 2.10.** *A transformada de Laplace apresenta as seguintes propriedades fundamentais:*

i) *Se  $f(x)$  é uma função  $n$  vezes diferenciável em  $(0, \infty)$ , com  $f^{(n)}(x)$  admissível, temos que*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+), \quad s > 0.$$

ii) *Seja  $f(x)$  uma função admissível, definindo  $g$  como*

$$g(x) = \int_0^x f(\omega) d\omega,$$

*segue que  $g(x)$  também é admissível e vale a relação*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\omega) d\omega\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(x)\}, \quad s > 0.$$

iii) *Se  $k \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f(x) = x^n e^{kx}$  é admissível para  $s > k$ , e sua transformada de Laplace é dada por*

$$\mathcal{L}\{x^n e^{kx}\} = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}, \quad s > k.$$

**Demonstração:**

i) Vimos no Teorema 2.9 que,

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+).$$

Provaremos o resultado por indução para a derivada de ordem  $n$ . Para  $n = 1$ , a fórmula é válida. Suponhamos que vale para  $n = k$ , isto é,

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(x)\} = s^k \mathcal{L}\{f(x)\} - s^{k-1}f(0^+) - s^{k-2}f'(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+).$$

Para  $n = k + 1$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(x)\} = s\mathcal{L}\{f^{(k)}(x)\} - f^{(k)}(0^+),$$

substituindo a hipótese de indução,

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(x)\} = s^{k+1}\mathcal{L}\{f(x)\} - s^k f(0^+) - s^{k-1} f'(0^+) - \dots - f^{(k)}(0^+).$$

Portanto, a fórmula é válida para todo  $n \geq 1$ .

ii) Aplicando em  $g$  a propriedade (i) e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\mathcal{L}\{g'(x)\} = s\mathcal{L}\{g(x)\} - g(0) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\omega) d\omega\right\}$$

como  $g'(x) = f(x)$ , temos

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g'(x)\} = s\mathcal{L}\{g(x)\} - g(0) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\omega) d\omega\right\},$$

logo,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(\omega) d\omega\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Esse resultado é bastante interessante, pois nos diz que para encontrar a transformada da integral acumulada de uma função em  $[0, x]$  basta multiplicar sua transformada pelo fator  $\frac{1}{s}$ .

iii) Aplicando (2.18) e utilizando da linearidade de  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$\mathcal{L}\{nx^{n-1}e^{kx} + kx^n e^{kx}\} = n\mathcal{L}\{x^{n-1}e^{kx}\} + k\mathcal{L}\{x^n e^{kx}\} = s\mathcal{L}\{x^n e^{kx}\}, \quad \text{com } f(0) = 0.$$

Portanto temos a seguinte fórmula de recorrência

$$\mathcal{L}\{x^n e^{kx}\} = \frac{n}{s-k}\mathcal{L}\{x^{n-1}e^{kx}\}. \quad (2.19)$$

Aplicando (2.19) sucessivamente, e (2.4) temos

$$n = 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{kx}\} = \frac{1}{s-k}$$

$$n = 1$$

$$\mathcal{L}\{xe^{kx}\} = \frac{1}{s-k}\mathcal{L}\{e^{kx}\} = \frac{1}{(s-k)^2}$$

$$n = 2$$

$$\mathcal{L}\{x^2 e^{kx}\} = \frac{2}{s-k}\mathcal{L}\{xe^{kx}\} = \frac{2}{(s-k)^3}$$

$$n = 3$$

$$\mathcal{L}\{x^3 e^{kx}\} = \frac{3}{s-k} \mathcal{L}\{x^2 e^{kx}\} = \frac{3!}{(s-k)^4}$$

$$n = 4$$

$$\mathcal{L}\{x^4 e^{kx}\} = \frac{4}{s-k} \mathcal{L}\{x^3 e^{kx}\} = \frac{4!}{(s-k)^5}$$

$$n = 5$$

$$\mathcal{L}\{x^5 e^{kx}\} = \frac{5}{s-k} \mathcal{L}\{x^4 e^{kx}\} = \frac{5!}{(s-k)^6} \quad .$$

Portanto, temos a seguinte fórmula geral que pode ser mostrada por indução

$$\mathcal{L}\{x^n e^{kx}\} = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}, \quad s > k.$$

■

Colocaremos a seguir uma tabela com a transformada de algumas funções selecionadas e algumas fórmulas gerais. A tabela está dividida em duas partes, a primeira com transformadas de algumas funções usuais, e a segunda com transformadas de funções mais gerais.

Item	Função	Transformada
1	$f(x)$	$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$
2	$k$	$\frac{k}{s}$
3	$x$	$\frac{1}{s^2}$
4	$x^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{kx}$	$\frac{1}{s-k}, s > k$
6	$e^{kx} \text{sen}(wx)$	$\frac{w}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
7	$e^{kx} \text{cos}(wx)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
8	$e^{kx} \text{senh}(wx)$	$\frac{w}{(s-k)^2 - w^2}, s > k$
9	$e^{kx} \text{cosh}(wx)$	$\frac{s-k}{(s-k)^2 - w^2}, s > k$
10	$e^{kx} [A \text{cos}(wx) + \frac{Ak+B}{w} \text{sen}(wx)]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2 + w^2}, s > k$
11	$e^{kx} [A \text{cosh}(wx) + \frac{Ak+B}{w} \text{senh}(wx)]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2 - w^2}, s > k$
12	$\frac{x^{n-1} e^{kx}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-k)^n}, n \geq 1, s > k$
13	$f'(x)$	$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$
14	$f''(x)$	$s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
15	$e^{kx} f(x)$	$F(s-k)$
16	$f(kx)$	$\frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right)$
17	$\int_a^x f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(\tau) d\tau$
18	$x^n f(x)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s))$
19	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_s^\infty F(\tau) d\tau$ se $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ existe
20	$\text{sen}(wx)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
21	$\text{cos}(wx)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$

Fonte: Adaptado de Figueiredo e Neves (1997, p. 188, cap. 5).

Agora veremos alguns exemplos de como usar a tabela no cálculo das transformadas inversas e nas resoluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

**Exemplo 2.11.** Utilizando o item 6 da tabela, ou a fórmula (2.17), com  $A = 0, B = 1, k = -2$  e  $w = 3$ , retornamos rapidamente à sua função original

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 4s + 13}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2 + 3^2}\right) = e^{-2x} \frac{1}{3} \text{sen}(3x) \quad .$$

Usando o item 18 da tabela, com  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{xf(x)\} &= -\frac{d}{ds}F(s), & F(s) &= \mathcal{L}\{f(x)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}F(s)\right) &= xf(x) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right) &= -xf(x) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right) &= -x\mathcal{L}^{-1}(F(s)).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Usando (2.20) podemos calcular, por exemplo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+6}{(s^2+4s+13)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left((3s+6)\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left((3s+6)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left((3s+6)\frac{(-2s+4)}{(s^2+4s+13)^2}\right).\end{aligned}$$

Dividimos  $(3s+6)$  por  $(-2s+4)$  para voltarmos ao que tínhamos no início e utilizando (2.20), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+6}{(s^2+4s+13)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(3s+6)}{(-2s+4)}\frac{(-2s+4)}{(s^2+4s+13)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(3s+6)}{(-2s+4)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3(s+2)}{2(s+2)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)\right) \\ &= (-x) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right).\end{aligned}$$

Comparando com a tabela, temos uma função da forma:  $e^{kx} \operatorname{sen}(wx)$ , com  $k = -2$ ,  $w = 3$ . Como no numerador deve aparecer o  $w$ , multiplicaremos por  $\frac{1}{3}$  para corrigir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+6}{(s^2+4s+13)^2}\right) &= \frac{3}{2}x\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{3}x\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}xe^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\end{aligned}$$

**Exemplo 2.12.** Considere a seguinte equação

$$\frac{s}{(s-k)^2} = \frac{k}{(s-k)^2} + \frac{1}{s-k},$$

aplicando a transformada inversa e utilizando-se de sua linearidade, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-k)^2}\right) = k \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-k)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-k}\right)$$

portanto, usando os itens 5 e 12 da tabela obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-k)^2}\right) = kx e^{kx} + e^{kx}.$$

**Exemplo 2.13.** Considere o problema do valor inicial

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1 \quad e \quad y'(0) = 2$$

aplicando a transformada de Laplace em  $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))$ , obtemos uma equação algébrica

$$s^2 Y(s) - s + 2 + Y(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (2.21)$$

Agora iremos manipular algebricamente (2.21) para deixar a equação mais favorável para aplicar a transformada inversa e obter nossa solução  $y(x)$ . Isolando  $Y(s)$ , temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \left[ \frac{1}{s^2} + s - 2 \right] \\ &= \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{-3}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa usando itens 3, 20 e 21 da tabela, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right).$$

De onde concluímos que

$$y(x) = x + \cos x - 3 \operatorname{sen} x.$$

**Exemplo 2.14.** Considere o seguinte problema

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-3x} \cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad (2.22)$$

Aplicando a transformada, obtemos

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 4sY(s) - 8 + 5Y(s) = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \left[ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} + 2s + 9 \right] \\ &= \frac{1}{(s + 2)^2 + 1} \left[ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} + 2s + 9 \right] \\ &= \frac{s + 3 + (2s + 9)((s + 3)^2 + 1)}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} \\ &= \frac{s + 3 + (2s + 9)(s^2 + 6s + 10)}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} \\ &= \frac{s + 3 + 2s^3 + 12s^2 + 20s + 9s^2 + 54s + 90}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} \\ &= \frac{2s^3 + 21s^2 + 75s + 93}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Decompondo em frações da seguinte forma

$$\frac{As + B}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s + 3)^2 + 1}, \quad \text{com } A, B, C \text{ e } D \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{As + B}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s + 3)^2 + 1} &= \\ \frac{(As + B)((s + 3)^2 + 1) + (Cs + D)((s + 2)^2 + 1)}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} &= \\ \frac{(As + B)(s^2 + 6s + 10) + (Cs + D)(s^2 + 4s + 5)}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} &= \\ \frac{As^3 + 6As^2 + 10As + Bs^2 + 6Bs + 10B + Cs^3 + 4Cs^2 + 5Cs + Ds^2 + 4Ds + 5D}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} &= \\ \frac{s^3(A + C) + s^2(6A + B + 4C + D) + s(10A + 6B + 5C + 4D) + 10B + 5D}{((s + 2)^2 + 1)((s + 3)^2 + 1)} &= \end{aligned}$$

comparando as potências de  $s$  com seus respectivos coeficientes em (2.24), temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 6A + B + 4C + D = 21 \\ 10A + 6B + 5C + 4D = 75 \\ 10B + 5D = 93 \end{cases}$$

resolvendo esse sistema encontramos os seguintes coeficientes

$$A = \frac{9}{5}, \quad B = \frac{46}{5}, \quad C = \frac{1}{5}, \quad D = \frac{1}{5}$$

substituindo em (2.24), obtemos

$$\frac{\frac{9}{5}s + \frac{46}{5}}{(s+2)^2 + 1} + \frac{\frac{1}{5}s + \frac{1}{5}}{(s+3)^2 + 1}$$

substituindo nas parcelas  $s$  por  $s+2$  e  $s+3$  respectivamente,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{9}{5}(s+2) + \frac{28}{5}}{(s+2)^2 + 1} + \frac{\frac{1}{5}(s+3) - \frac{2}{5}}{(s+3)^2 + 1} \\ &= \frac{9}{5} \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 1} + \frac{28}{5} \frac{1}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 1} - \frac{2}{5} \frac{1}{(s+3)^2 + 1} \end{aligned}$$

aplicando a transformada inversa obtemos a solução da nossa equação diferencial

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{9}{5}e^{-2x} \cos x + \frac{28}{5}e^{-2x} \operatorname{sen} x + \frac{1}{5}e^{-3x} \cos x - \frac{2}{5}e^{-3x} \operatorname{sen} x \\ y(x) &= \frac{1}{5}e^{-2x}(9 \cos x + 28 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{5}e^{-3x}(\cos x - 2 \operatorname{sen}(x)). \end{aligned}$$

As situações vistas nos exemplos acima, nas quais precisamos inverter uma transformada que está escrita como um produto de duas expressões é muito comum e nem sempre fácil de resolver. Mesmo quando estamos trabalhando com funções racionais, temos que enfrentar um trabalho algébrico maçante, a fim de obtermos a expressão numa maneira conveniente para a inversão. A pergunta natural é se existe uma maneira alternativa para a obtenção da inversa nesses casos. Essa questão é o ponto central da próxima seção.

## 2.1 Produto de Transformadas e Convolução

Dadas duas funções admissíveis  $f(x)$  e  $g(x)$  queremos determinar  $h(x)$  tal que

$$\mathcal{L}(h(x)) = \mathcal{L}(f(x))\mathcal{L}(g(x)).$$

Temos então formalmente que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(h(x)) &= \int_0^\infty e^{-sx} f(u) du \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) dudv\end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0 \text{ e } v > 0\}.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $x = u+v$  e  $y = u$ , a região  $\mathbb{R}_+^2$  é transformada na seguinte região,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\},$$

fazendo as mudanças necessárias na integral, temos que os novos limites de integração serão :  $y \in [0, x]$ , e  $x \in [0, \infty)$  e  $dudv = |J|dydx$ . Sendo o  $|J|$  o Jacobiano de mudança de variáveis. Calculando o Jacobiano temos,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-1| = 1 \quad ,$$

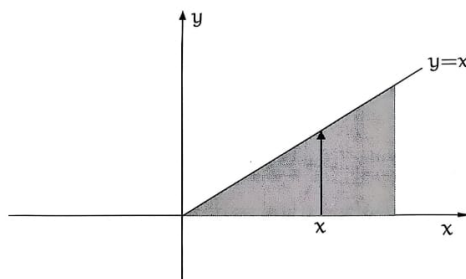
daí nossa integral dupla

$$\mathcal{L}(h(x)) = \iint_A e^{-sx} f(y) g(x-y) dydx$$

se torna,

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(y) g(x-y) dydx.$$

Segue abaixo o gráfico que representa nossa região  $A$ .



Fonte: FIGUEIREDO; NEVES, 1997, p. 191, cap 5.

Escrevendo a integral dupla sobre  $A$  como integral iterada podemos retirar  $e^{-sx}$ ,

pois não depende de  $y$ , daí

$$\mathcal{L}(h(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} \left[ \int_0^x f(y)g(x-y)dy \right] dx \quad .$$

Note que o termo entre colchetes é a própria função  $h(x)$  dentro de sua transformada, portanto, temos que

$$h(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy. \quad (2.25)$$

Como nossas funções estão definidas somente para valores positivos de  $x$ , podemos estendê-las iguais a zero para valores negativos de  $x$ , definindo  $f$  e  $g$  da seguinte forma,

$$f(y) = \begin{cases} f(y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \quad g(y) = \begin{cases} g(y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases},$$

portanto (2.25) pode ser escrita como

$$h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y)dy.$$

Essa integral é conhecida como o produto de convolução das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , que é escrito da seguinte maneira:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y)dy. \quad (2.26)$$

Portanto, mostramos acima que

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g). \quad (2.27)$$

**Proposição 2.15.** *Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções integráveis em  $\mathbb{R}$ , de modo que todas as convoluções envolvidas estejam bem definidas, o produto de convolução definido por (2.26) satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) *Comutativa:*  $f * g = g * f$ ,
- ii) *Associativa:*  $f * (g * h) = (f * g) * h$
- iii) *Distributiva:*  $f * (g + h) = f * g + f * h$ .

**Demonstração:**

i) Queremos mostrar que

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty g(y) f(x-y) dy = \int_{-\infty}^\infty f(y) g(x-y) dy = (g * f)(x).$$

Fazendo a mudança de variável  $u = x - y$ , temos que  $y = x - u$  e  $dy = -du$ , além disso, quando  $y \rightarrow -\infty$ ,  $u \rightarrow +\infty$  e quando  $y \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow -\infty$ . Assim

$$(f * g)(x) = \int_{\infty}^{-\infty} f(x - u) g(u) (-du).$$

Note que o fator  $-1$  multiplicando  $du$  nos permite inverter os limites de integração, daí

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(x - u) du = (g * f)(x).$$

Portanto, concluímos que  $f * g = g * f$ .

ii) Iremos demonstrar que  $f * (g * h) = (f * g) * h$ . Calculando primeiramente  $(g * h)$ , temos

$$(g * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(x - \tau) d\tau,$$

fazendo a convolução de  $f$  com  $(g * h)$ , obtemos

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) (g * h)(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(\tau) h(t - \tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $u = t - \tau$ , temos que  $t = u + \tau$  e  $dt = du$ . Assim obtemos

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - (u + \tau)) g(\tau) h(u) du d\tau \\ f * (g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f((x - u) - \tau) g(\tau) d\tau \right] h(u) du \end{aligned}$$

note que, o termo entre colchetes é  $(f * g)(x - u)$ , então

$$f * (g * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x - u) h(u) du = (f * g) * h(x).$$

Logo,

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

iii) Demonstremos agora a distributividade da convolução perante a soma. Fazendo a

convolução  $f * (g + h)$  e aplicando a distributiva dentro da integral, temos

$$\begin{aligned}(f * (g + h))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(g + h)(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &= (f * g)(t) + (f * h)(t).\end{aligned}$$

■

Devemos também chamar a atenção, que na obtenção da fórmula (2.27), o ponto mais delicado é passar da integral dupla para integrais iteradas, essa passagem é garantida pela convergência absoluta da transformada de Laplace.

**Exemplo 2.16.** Considere novamente (2.23). Desta vez, ao invés de resolvermos por frações parciais, iremos realizar a distributiva e aplicar (2.27). Daí segue que,

$$Y = \frac{2s + 9}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 2)^2 + 1} \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1}.$$

Observando a tabela e usando (2.27), já conseguimos determinar a inversa de outra forma, sem precisar aplicar o método das frações parciais. Utilizando a tabela para aplicar a transformada inversa, obtemos

$$y(x) = e^{-2x}(2 \cos x + 5 \operatorname{sen} x) + (e^{-2x} \operatorname{sen} x) * (e^{-3x} \cos x) \quad (2.28)$$

que é a solução do problema (2.23), onde

$$(e^{-2x} \operatorname{sen} x) * (e^{-3x} \cos x) = \int_0^x e^{-2u} \operatorname{sen} u e^{-3(x-u)} \cos(x-u) du = e^{-3x} \int_0^x e^u \operatorname{sen} u \cos(x-u) du.$$

Calcular essa integral pode ser, na maioria das vezes, mais agradável que o método tradicional das frações parciais. Para calculá-la, usaremos a seguinte identidade trigonométrica,

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)).$$

Fazendo  $a = u$  e  $b = x - u$ , temos

$$\operatorname{sen} u \cos(x - u) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2u - x)).$$

Substituindo em (2.16), obtemos

$$\int_0^x e^u \operatorname{sen} u \cos(x - u) du = \frac{1}{2} \left( \operatorname{sen} x \int_0^x e^u du + \int_0^x e^u \operatorname{sen}(2u - x) du \right).$$

Note que a primeira integral é imediata,

$$\operatorname{sen} x \int_0^x e^u du = \operatorname{sen} x (e^x - 1).$$

Na segunda integral, fazendo a mudança de variável  $t = 2u - x$ , com  $du = \frac{1}{2} dt$  e  $e^u = e^{(t+x)/2} = e^{x/2} e^{t/2}$ , obtemos

$$\int_0^x e^u \operatorname{sen}(2u - x) du = \frac{e^{x/2}}{2} \int_{-x}^x e^{t/2} \operatorname{sen} t dt. \quad (2.29)$$

Integrando (2.29) por partes duas vezes, temos que

$$\int_{-x}^x e^{t/2} \operatorname{sen} t dt = \frac{1}{5} (e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + \operatorname{sen} x + 2 \cos x),$$

daí,

$$\int_0^x e^u \operatorname{sen}(2u - x) du = \frac{1}{5} (e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + \operatorname{sen} x + 2 \cos x).$$

Juntando com a primeira integral que resolvemos, obtemos

$$\int_0^x e^u \operatorname{sen} u \cos(x - u) du = \frac{1}{2} \left( \operatorname{sen} x (e^x - 1) + \frac{1}{5} (e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + \operatorname{sen} x + 2 \cos x) \right).$$

Multiplicando pelo fator  $e^{-3x}$ , que ocultamos para facilitar o cálculo, chegamos a

$$e^{-3x} \int_0^x e^u \operatorname{sen} u \cos(x - u) du = e^{-3x} \frac{1}{2} \left( \operatorname{sen} x (e^x - 1) + \frac{1}{5} (e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + \operatorname{sen} x + 2 \cos x) \right).$$

Organizando, obtemos

$$\begin{aligned} e^{-3x} \int_0^x e^u \operatorname{sen} u \cos(x - u) du &= \frac{1}{5} (3e^{-2x} \operatorname{sen} x - e^{-2x} \cos x - 2e^{-3x} \operatorname{sen} x + e^{-3x} \cos x) \\ &= \frac{1}{5} (3e^{-2x} \operatorname{sen} x - e^{-2x} \cos x - 2 \operatorname{sen} x + \cos x) \\ &= \frac{1}{5} (\cos x - 2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{5} (3e^{-2x} \operatorname{sen} x - e^{-2x} \cos x). \end{aligned}$$

Voltando a (2.28), finalmente obtemos a seguinte solução

$$y(x) = e^{-2x} (2 \cos x + 5 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{5} (\cos x - 2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{5} (3e^{-2x} \operatorname{sen} x - e^{-2x} \cos x).$$

## 2.2 Obtenção de uma solução particular de uma equação não homogênea.

Um problema básico para a obtenção da solução geral de equações diferenciais lineares, com coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = G(x)$$

é encontrar uma solução particular da equação não homogênea. No caso de equações lineares com coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = h(x), \quad (2.30)$$

com o objetivo de determinar uma solução particular, podemos tomar condições iniciais nulas

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (2.31)$$

Segue do Teorema de Existência e Unicidade, que para cada  $h(x)$  contínua, existe uma única solução  $y(x)$  do problema (2.30)-(2.31) pertencente a  $C^n$ . Usaremos, neste ponto, a notação  $C$  para designar o espaço das funções reais contínuas definidas na reta,  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A notação  $C^n$  designa o subespaço de  $C$  formado pelas funções que possuem derivadas até a ordem  $n$ , com  $y^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Isto é, o operador linear  $\mathcal{J} : C^n \rightarrow C$ , dado por

$$\mathcal{J}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = h(x) \quad (2.32)$$

possui uma inversa  $\mathcal{J}^{-1} : C \rightarrow C^n$ , que associa a cada função contínua  $h(x)$  a solução  $y(x)$  de (2.30)-(2.31), ou seja  $\mathcal{J}^{-1}(h) = y$ . Aplicando em (2.30) a transformada de Laplace para derivadas de uma função que vimos em (2.18), e a condição (2.31), temos

$$\begin{aligned} & (s^n \mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)) \\ & + a_{n-1}(s^{n-1} \mathcal{L}\{y\} - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)) \\ & + \cdots + a_1(s \mathcal{L}\{y\} - y(0)) + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{h\} \end{aligned}$$

agrupando os termos que multiplicam  $\mathcal{L}\{y\}$ , obtemos

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0) \mathcal{L}\{y\} - Q(s) = \mathcal{L}\{h\},$$

onde,

$$\begin{aligned} Q(s) &= s^{n-1}y(0) + s^{n-2}y'(0) + \cdots + y^{(n-1)}(0) \\ &+ a_{n-1}(s^{n-2}y(0) + \cdots + y^{(n-2)}(0)) + \cdots + a_1y(0) \end{aligned}$$

pela condição (2.31), temos que  $Q(s) = 0$ , daí

$$p(s)\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(h)$$

onde  $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ , portanto

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{p(s)}\mathcal{L}(h).$$

Se  $g(x)$  é uma função tal que

$$\mathcal{L}(g(x)) = \frac{1}{p(s)}, \text{ ou } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(s)}\right) = g(x). \quad (2.33)$$

Vimos em (2.27) que  $y(x) = g(x) * h(x)$ . Usando a fórmula (2.26), obtemos

$$y(x) = \int_0^x g(x-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (2.34)$$

**Exemplo 2.17.** Aqui também, usando o método da transformada de Laplace, vemos facilmente que  $g(x)$ , dada por (2.33), é a solução de

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

pois com as seguintes condições

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad \text{e} \quad y^{(n-1)}(0) = 1$$

temos que,

$$p(s)\mathcal{L}\{y\} - Q(s) = 0, \quad Q(s) = 1,$$

segue que

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{p(s)}.$$

Vimos em (2.27) que  $y(x) = g(x) * h(x)$ . Usando a fórmula (2.26), obtemos

$$y(x) = \int_0^x g(x-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (2.35)$$

A função  $K(x, \tau) = g(x - \tau)$ . A função  $K(x, \tau)$  que aparece nessa integral é chamada *Função de Green* para o problema (2.30)-(2.31). No caso de equações de primeira ordem, estudadas no Capítulo 1, a função de Green é dada por:  $K(x, \tau) = e^{P(x)-P(\tau)}$ , comparando com a forma da equação (1.4).

**Exemplo 2.18.** Considere a equação diferencial linear

$$y'(x) = k y(x) + q(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Por (1.4), a solução é dada por

$$y(x) = e^{P(x)} \int_{x_0}^x q(s) e^{-P(s)} ds + y_0 e^{P(x)}.$$

No caso homogêneo  $q(x) = 0$  e  $y(0) = 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{P(x)} \int_0^x 0 \cdot e^{-P(s)} ds + 1 \cdot e^{P(x)} \\ &= e^{P(x)}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.19.** Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$y'(x) = 2y(x) + x, \quad y(0) = 0.$$

A função de Green associada à equação é dada por

$$K(x, s) = e^{P(x)-P(s)}, \quad 0 \leq s \leq x.$$

Para  $k = 2$  e  $f(s) = s$ , a solução é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x e^{P(x)-P(s)} s ds \\ &= e^{P(x)} \int_0^x e^{-P(s)} s ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^x s e^{-P(s)} ds = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{4},$$

substituindo na expressão de  $y(x)$ , obtemos

$$y(x) = e^{P(x)} \left( -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{4} \right),$$

portanto,

$$y(x) = -\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

**Exemplo 2.20.** Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$y'(x) = 3y(x) + x, \quad y(0) = 1.$$

A função de Green associada à equação é dada por

$$K(x, s) = e^{P(x)-P(s)}, \quad s \leq x.$$

Assim, a solução da equação pode ser escrita por meio da função de Green como

$$y(x) = e^{P(x)}y(0) + \int_0^x e^{P(x)-P(s)} q(s) ds,$$

onde  $q(s) = s$ . Daí temos,

$$y(x) = e^{P(x)} 1 + \int_0^x e^{P(x)-P(s)} s ds = e^{P(x)} + e^{P(x)} \int_0^x s e^{-P(s)} ds.$$

calculando a integral por partes, obtemos

$$\int_0^x s e^{-P(s)} ds = \left[ -\frac{s}{3} e^{-3s} \right]_0^x + \frac{1}{3} \int_0^x e^{-3s} ds = -\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{9} (1 - e^{-3x}).$$

substituindo na expressão de  $y(x)$

$$y(x) = e^{P(x)} + e^{P(x)} \left[ -\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{9} (1 - e^{-3x}) \right],$$

assim a solução da nossa EDO é dada por

$$y(x) = e^{P(x)} - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} (e^{P(x)} - 1).$$

**Observação 2.21.** Observe que no Exemplo 2.20 aparece explicitamente a parte homogênea da solução, dada por  $e^{P(x)}y(0)$ . Essa forma decorre da expressão geral obtida pela fórmula de variação das constantes,

$$y(x) = e^{P(x)} \int q(s) e^{-P(s)} ds + C e^{P(x)},$$

como apresentada em (1.4). Comparando com a expressão do exemplo, nota-se que o primeiro termo corresponde à solução homogênea e o segundo ao termo particular obtido pela função de Green.

## Capítulo 3

# Aplicações da Transformada de Laplace

Neste capítulo reunimos três aplicações que mostram, de maneira prática, como a transformada de Laplace pode simplificar problemas que, no domínio do tempo, se tornariam bem mais trabalhosos de resolver. Começamos analisando funções descontínuas e entradas definidas por partes, onde a transformada se mostra especialmente útil por lidar naturalmente com mudanças abruptas. Em seguida, exploramos como as propriedades da transformada facilitam o tratamento de derivadas de ordem superior, tornando possível estudar equações diferenciais mais complexas sem recorrer diretamente a métodos sucessivos de integração, o que torna o processo mais organizado e direto.

Por fim, aplicamos as ideias desenvolvidas ao longo do trabalho a um modelo farmacocinético de dois compartimentos, que descreve o comportamento de uma substância no sangue e nos tecidos após sua administração. Essa aplicação mostra claramente como a transformada de Laplace ajuda a entender a dinâmica de distribuição e eliminação do fármaco, transformando um sistema de equações diferenciais em expressões algébricas mais fáceis de manipular. Dessa forma, este capítulo reúne exemplos que ilustram tanto o alcance quanto a praticidade da transformada de Laplace em situações reais e em diferentes tipos de problemas matemáticos.

### 3.1 Funções Descontínuas

Na análise de circuitos elétricos e de sistemas mecânicos é comum encontrarmos modelos descritos por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, nas quais o termo forçante  $f(x)$  apresenta descontinuidades. Essas descontinuidades podem representar o acionamento repentino de uma fonte de tensão, a aplicação instantânea de uma força externa ou outras variações súbitas no sistema. A presença de funções desse tipo torna o tratamento analítico mais complexo, pois os métodos tradicionais exigem continuidade das funções envolvidas. A Transformada de Laplace, entretanto, permite tratar de forma natural essas situações, convertendo funções descontínuas em expressões mais

simples no domínio de  $s$  e possibilitando a análise e a resolução de sistemas mesmo quando as entradas atuam de maneira brusca ou irregular. É comum, por exemplo, funções do tipo,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi \leq x < 2\pi, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad (3.1)$$

mostrando que a influência do termo forçante ocorre somente num intervalo.

Quando trabalhamos com funções apresentando descontinuidades do tipo salto, é favorável utilizarmos a função  $u_c(x)$  definida em (2.5), afim de facilitar os cálculos da transformada.

**Exemplo 3.1.** Analisando (3.1) por intervalos, sendo  $\mu_\pi(x)$  e  $\mu_{2\pi}(x)$  funções definidas da forma (2.5). Obsveve a seguinte tabela

$x$	$\mu_\pi(x)$	$\mu_{2\pi}(x)$	$\mu_\pi(x) - \mu_{2\pi}(x)$
$x < \pi$	0	0	0
$\pi \leq x < 2\pi$	1	0	1
$x \geq 2\pi$	1	1	0

Fonte: Autoria própria.

Note que a diferença entre  $\mu_\pi(x)$  e  $\mu_{2\pi}(x)$  se comporta como (3.1), logo, faz sentido escrevermos (3.1) como

$$f(x) = \mu_\pi(x) - \mu_{2\pi}(x).$$

Dessa forma a transformada de Laplace de  $f(x)$  segue imediatamente de (2.6)

$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}.$$

Para funções descontínuas mais gerais, em geral obtidas por translações das funções usuais, observamos que a translação para a direita de uma função  $f(x)$ , de uma quantidade  $c$ , pode ser obtida fazendo

$$g(x) = \mu_c(x)f(x - c),$$

onde  $\mu_c(x)$  “liga” e “desliga” a função assumindo o valor de 1 ou 0 e  $f(x - c)$  é a função deslocada  $c$  unidades para direita, isso serve para a função “ligar” em  $x = c$ . Portanto, através de uma mudança de variável, podemos calcular sua transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(\mu_c(x)f(x - c)) = \int_0^\infty e^{-sx} \mu_c(x)f(x - c) dx = \int_c^\infty e^{-sx} f(x - c) dx.$$

Note que,  $\mu_c(x) = 1$  para  $c \geq 0$ . Fazendo a seguinte mudança de variável  $u = x - c$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mu_c(x)f(x-c)) &= \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u) du \\ &= e^{-sc} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-cs} \mathcal{L}(f(x)) \\ &= e^{-cs} F(s).\end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-cs}F(s)) = \mu_c(x)f(x-c). \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.2.** Para equações diferenciais com termo forçante descontínuo, como por exemplo

$$y'' + 4y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

com  $f(x)$  dada em (3.1), definimos como solução uma função  $y(x)$  que satisfaz a equação nos três intervalos disjuntos  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  e  $(2\pi, \infty)$ , que satisfaz as condições iniciais dadas, e tal que  $y(x)$  e  $y'(x)$  são contínuas nos pontos de salto  $x = \pi$  e  $x = 2\pi$  (note que não podemos exigir a continuidade de  $y''$ ). Podemos, em cada ponto de descontinuidade, ajustar as duas constantes arbitrárias da solução geral de modo a garantir a continuidade de  $y(x)$  e  $y'(x)$ . Mostraremos a seguir que o processo de cálculo dessa solução é muito mais simples utilizando a transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace ao problema de valor inicial acima, obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \mathcal{L}(f(x)).$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 4}\right) = \frac{1}{2} \text{sen}2x,$$

temos que

$$y(x) = \frac{1}{2} \text{sen}2x * f(x),$$

isto é,

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \text{sen}(2x - 2\tau) f(\tau) d\tau.$$

Como  $f$  é uma função descontínua do tipo (2.5), que atua como um termo de ativação, a solução pode ser escrita de forma compacta como

$$y(x) = f(x) \frac{1}{4} (1 - \cos 2x),$$

entendendo-se essa expressão no sentido de uma definição por partes, a solução é nula fora do intervalo em que  $f$  é não nula e coincide com  $\frac{1}{4}(1 - \cos 2x)$  nesse intervalo.

**Observação 3.3.** O fator  $f(x)$  que aparece multiplicando na expressão acima representa o fato de que o termo forçante descontínuo ativa a solução apenas no intervalo em que está definido.

## 3.2 Comportamento da Derivada

Suponha que queiramos estudar o comportamento da derivada  $x'(t)$  da solução de um problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = f(t) \\ x'(0) = x_0, \quad x(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Obviamente podemos resolver a equação e depois derivar a solução  $x(t)$ . O que queremos mostrar aqui é que, usando a transformada de Laplace, podemos obter  $x'(t)$  sem necessidade de calcular  $x(t)$ . Para isso, transformamos o problema (3.3) num sistema de equações diferenciais. Fazendo  $x' = y$ , obtemos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - bx + f(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Aplicando a transformada de Laplace nessas duas equações, obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas  $X = \mathcal{L}(x)$  e  $Y = \mathcal{L}(y)$

$$\begin{cases} sX - Y = x_0 \\ bX + (a + s)Y = F(s) + y_0 \end{cases}$$

onde  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ . Portanto, pela regra de Cramer, obtemos

$$Y = \frac{sF(s) + sy_0 - bx_0}{s^2 + as + b} \quad (3.5)$$

que aplicando a transformada inversa obtemos a solução  $y(t) = x'(t)$ .

Antes de apresentar o exemplo a seguir, introduzimos a função impulso que será utilizada. A função  $\delta(t - a)$  representa um impulso aplicado no instante  $t = a$ , isto é, uma força concentrada em um único instante de tempo, de duração desprezível e intensidade finita, sendo nula para todo  $t \neq a$ .

**Exemplo 3.4.** Considere o sistema modelado pelo seguinte problema do valor inicial

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 2x = 2\delta(t - \pi) \\ x'(0) = 0, \quad x(0) = 0. \end{cases}$$

Esse sistema está em repouso até o instante  $t = \pi$ , nesse instante o sistema sofre um impulso de intensidade 2. Montando o sistema como em (3.4) e aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$\begin{cases} sX - Y = 0 \\ 2X + (2 + s)Y = 3e^{-\pi s} \end{cases} .$$

Aplicando Cramer e usando (3.5), temos que

$$Y = \frac{2s}{(s+1)^2 + 1} e^{-\pi s}$$

Comparando o termo do lado direito da equação com o resultado (3.2) e aplicando a transformada inversa, obteremos o produto da função  $f$  aplicada em  $(t - \pi)$  com a função  $\mu_\pi$  também aplicada em  $(t - \pi)$ , sendo  $\mu_\pi$  uma função do tipo (2.5). Portanto, invertendo  $Y$ , temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \right) = e^{-t}(2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t).$$

Logo, pelo resultado (3.2)

$$x'(t) = u_\pi(t) 2e^{-(t-\pi)} (\cos(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)).$$

### 3.3 Aplicação da transformada de Laplace a um modelo farmacocinético corporal aberto de dois compartimentos.

Neste momento iremos estudar como a transformada de Laplace pode ser empregada na resolução de modelos que descrevem a distribuição e a eliminação de uma substância no corpo humano. O modelo considera dois compartimentos interligados, representando o sangue e os tecidos, e permite compreender o comportamento da substância ao longo do tempo após uma administração da substância. O modelo baseia-se nas seguintes definições e parâmetros

- $X_C(t)$ : quantidade de substância no compartimento central (sangue)
- $X_T(t)$ : quantidade de substância no compartimento periférico (tecidos)
- $k_{10}$ : constante de eliminação do compartimento central
- $k_{12}$ : taxa de transferência do compartimento central para o periférico

- $k_{21}$ : taxa de retorno do compartimento periférico para o central
- $I(t)$ : função de entrada no compartimento central, podendo assumir
  - $I(t) = X_0\delta(t)$  para injeção instantânea (bolus)
  - $I(t) = k_0u(t)$  para infusão constante
  - $I(t) = k_aX_G(t)$  para absorção gradual.

A variação da substância no compartimento central e no periférico são modeladas pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \frac{dX_C}{dt} &= -(k_{10} + k_{12})X_C(t) + k_{21}X_T(t) + I(t) \\ \frac{dX_T}{dt} &= k_{12}X_C(t) - k_{21}X_T(t) \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aplicando a transformada de Laplace e considerando as condições iniciais  $X_C(0) = X_{C0}$  e  $X_T(0) = X_{T0}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} (s + k_{10} + k_{12})X_C(s) - k_{21}X_T(s) &= X_{C0} + I(s) \\ -k_{12}X_C(s) + (s + k_{21})X_T(s) &= X_{T0} \end{aligned}$$

Para o caso de injeção tipo bolus, considera-se  $I(t) = X_0\delta(t)$ , em que  $\delta(t)$  é uma função impulso, que atua em um único instante de tempo e é nula no restante do intervalo e cuja transformada é  $I(s) = X_0$ , ou, de modo equivalente,  $X_C(0) = X_0$  e  $I(s) = 0$ . Assim, com  $X_T(0) = 0$ , o sistema reduz-se a

$$\begin{cases} (s + k_{10} + k_{12})X_C(s) - k_{21}X_T(s) = X_0 \\ -k_{12}X_C(s) + (s + k_{21})X_T(s) = 0 \end{cases}$$

O determinante do sistema é

$$D(s) = (s + k_{10} + k_{12})(s + k_{21}) - k_{21}k_{12}.$$

Note que pela regra de Cramer, temos que

$$X_C(s) = \frac{X_0(s + k_{21})}{s^2 + s(k_{10} + k_{12} + k_{21}) + k_{10}k_{21}} \quad . \tag{3.7}$$

As raízes do denominador são chamadas de constantes híbridas  $\alpha$  e  $\beta$ , definidas por

$$\alpha + \beta = k_{10} + k_{12} + k_{21}, \quad \alpha\beta = k_{10}k_{21}, \quad \alpha > \beta.$$

A equação reescrita fica

$$X_C(s) = X_0 \frac{s + k_{21}}{(s + \alpha)(s + \beta)} ,$$

decompondo em frações parciais, temos

$$\frac{s + k_{21}}{(s + \alpha)(s + \beta)} = \frac{A}{s + \alpha} + \frac{B}{s + \beta} . \quad (3.8)$$

Após aplicar o método das frações parciais, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\beta + B\alpha = k_{21} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos os seguintes coeficientes:

$$A = \frac{k_{21} - \alpha}{\beta - \alpha} , \quad B = \frac{k_{21} - \beta}{\alpha - \beta} .$$

Invertendo a transformada (3.8), temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \alpha} + \frac{B}{s + \beta} \right\} = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

daí, obtemos

$$X_C(t) = X_0 (Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}) .$$

Substituindo os coeficientes  $A$  e  $B$  chegamos à seguinte solução

$$X_C(t) = X_0 \left( \frac{k_{21} - \alpha}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{k_{21} - \beta}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} \right) , \quad t \geq 0 .$$

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  representam as fases rápida (distribuição) e lenta (eliminação), com meias-vidas  $t_{1/2,\alpha} = \ln 2/\alpha$  e  $t_{1/2,\beta} = \ln 2/\beta$ . Os coeficientes  $A$  e  $B$  indicam a participação de cada fase e satisfazem  $A + B = 1$ . A quantidade total é  $X(t) = X_C(t) + X_T(t)$ , cuja variação segue  $X'(t) = -k_{10}X_C(t) + I(t)$ , indicando que apenas a eliminação e a entrada alteram o total.

A transformada de Laplace simplifica a resolução do sistema e fornece uma solução analítica bi-exponencial, adequada para descrever processos de distribuição e eliminação de substâncias, permitindo estudar níveis de concentração, tempos de depuração e toxicidade.

**Exemplo 3.5.** Após a aplicação de uma certa substância em um paciente, observou-se as seguintes taxas:  $k_{10} = 0,10 \text{ h}^{-1}$ ,  $k_{12} = 0,50 \text{ h}^{-1}$ ,  $k_{21} = 0,40 \text{ h}^{-1}$  e  $X_0 = 100 \text{ mg}$ . Após 5 horas qual será a concentração dessa substância no sangue do paciente?

Note que as constantes híbridas  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes do polinômio que aparece no

denominador em (3.7). Substituindo as taxas, temos

$$s^2 + s(0,10 + 0,50 + 0,40) + 0,10 \cdot 0,40 = 0 \quad .$$

Calculando as raízes, encontramos  $\alpha \approx 0,9583 \text{ h}^{-1}$  e  $\beta \approx 0,0417 \text{ h}^{-1}$ . Calculando

$$A = \frac{0,40 - \alpha}{\beta - \alpha} \approx 0,6091, \quad B = \frac{0,40 - \beta}{\alpha - \beta} \approx 0,3909.$$

Substituindo os coeficientes na equação, obtemos

$$X_C(t) = 100(0,6091 e^{-0,9583t} + 0,3909 e^{-0,0417t}) \text{ mg.}$$

Para saber a concentração após 5 horas, substituímos  $t = 5$ .

$$\begin{aligned} XC(5) &= 100 (0,6091 e^{-0,9583 \cdot 5} + 0,3909 e^{-0,0417 \cdot 5}) \\ &= 100 (0,6091 e^{-4,7915} + 0,3909 e^{-0,2085}) \\ &= 100 (0,6091(0,0083) + 0,3909(0,812)) \\ &= 100(0,00506 + 0,317) \\ &= 100(0,322) \\ &= 32,2 \end{aligned}$$

Logo, após 5 horas, ainda existe uma concentração de  $32,2 \text{ mg/L}$  no sangue do paciente.

Após quanto tempo essa substância será eliminada totalmente da corrente sanguínea do paciente? A quantidade de substância na corrente sanguínea  $X_C(t)$  decai seguindo o comportamento de uma função exponencial  $e^{-\alpha t}$ . Seguindo esse raciocínio, iremos estipular a meia-vida da quantidade de fármaco no sangue da seguinte forma

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t_{1/2}} &= \frac{1}{2} \\ -\alpha t_{1/2} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\alpha t_{1/2} &= -\ln 2 \\ \alpha t_{1/2} &= \ln 2 \\ t_{1/2, \alpha} &= \frac{\ln 2}{\alpha} \end{aligned}$$

A expressão meia-vida determina o tempo necessário para que o termo exponencial reduza à metade de seu valor inicial. Esse tempo é chamado de meia-vida e depende diretamente do parâmetro  $\alpha$ . Veja na tabela a seguir, como se comporta esse decaimento.

$n$ (meias-vidas)	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
1	0,5	0,5
2	0,25	0,75
3	0,125	0,875
4	0,0625	0,9375
5	0,03125	0,96875
6	0,015625	0,984375
7	0,0078125	0,9921875

Fonte: Autoria própria.

A tabela mostra a fração que resta após  $n$  meias-vidas e a fração que já foi eliminada. Após sete meias-vidas, resta menos de um por cento da substância, o que caracteriza eliminação prática da substância no corpo do indivíduo.

## Referências Bibliográficas

- [1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloísio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), CNPq, 1997. (Coleção Matemática Universitária).
- [2] SAUTER, Esequias; AZEVEDO, Fábio Souto de; STRAUCH, Irene Maria Fonseca. **Transformada de Laplace: Um Livro Colaborativo**. Porto Alegre: UFRGS, 2002.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020. (Coleção Matemática Universitária).
- [4] HERMANN, Tadeusz Wladyslaw. Application of Laplace transforms to a pharmacokinetic open two-compartment body model. *Acta Poloniae Pharmaceutica – Drug Research*, v. 74, n. 5, p. 1527–1531, 2017.