UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Aplicando a transformada de Laplace para a equação Logística com Retardo

Mariana Perpetua Lima de Sousa

Orientador: Dr. Filipe Andrade da Costa

RECIFE

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mariana Perpetua Lima de Sousa

Aplicando a transformada de Laplace para a equação Logística com Retardo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

S725a Sousa, Mariana Perpetua Lima de.
Aplicando a transformada de laplace para a equação logística com retardo / Mariana Perpetua Lima de Sousa. – Recife, 2025.
114 f.

Orientador(a): Filipe Andrade da Costa.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Crescimento populacional. 2. Laplace, Transformadas de. 3. Equações diferenciais - Equações com retardamento. I. Costa, Filipe Andrade da, orient. II. Título

CDD 510

Mariana Perpetua Lima de Sousa

Aplicando a transformada de Laplace para a equação Logística com Retardo

Trabalho aprovado em 19 de fevereiro de 2025.
Recife, 2025.

Dr.Filipe Andrade da Costa
Orientador

Dr.Clessius Silva
Convidado 1

Dr.Thamires Santos Cruz
Convidado 2

Recife

2025

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de força e inspiração, que me guiou até aqui e continua ao meu lado em cada passo da minha caminhada.

Sou imensamente grata aos meus pais, José Severino de Sousa e Maria José Lopes de Lima, que sempre me incentivaram a estudar, e é por eles que cheguei até aqui. Aos meus irmãos, em especial a Mariane, minha amiga e confidente. A todos os meus sobrinhos, especialmente José Gabriel, que me inspira a seguir em frente e a conquistar cada novo desafio.

Agradeço a todos os meus amigos, aqueles que conheci antes da graduação e também aos que conheci ao longo da graduação. Minha eterna gratidão pelo apoio e pelos momentos compartilhados. Às minhas colegas de quarto, em especial Bianka, cuja amizade e incentivo me impulsionaram a avançar e a acreditar cada vez mais no meu potencial.

Agradeço a todos os meus professores que tive ao longo da minha jornada, em especial aos professores do curso de Matemática da Rural, que, de alguma forma, contribuíram para o meu desenvolvimento profissional e também pessoal.

Por fim, não poderia deixar de agradecer imensamente ao trabalho e esforço do meu orientador, Filipe Andrade da Costa, que, com paciência e generosidade, me guiou nesta jornada, contribuindo significativamente para minha evolução como pesquisadora.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo" Galileu Galilei

Resumo

O crescimento populacional não ocorre de forma instantânea. Cada indivíduo necessita de um intervalo de tempo para atingir a maturidade e iniciar o processo reprodutivo, e esse retardo influencia diretamente a dinâmica da população ao longo do tempo. Para considerar esse aspecto, utilizamos equações diferenciais com retardo, ferramenta matemática robusta para modelar sistemas em que o estado atual depende de estados passados. Neste trabalho, investigamos as principais características dessas equações e discutimos como a Transformada de Laplace pode ser empregada na obtenção de soluções. Como aplicação prática, analisamos o modelo logístico com retardo, uma abordagem que descreve o crescimento populacional levando em conta o tempo necessário para a reprodução. Nosso objetivo é apresentar uma solução branda no espaço das funções contínuas, tornando o estudo mais acessível e útil para a compreensão de fenômenos naturais.

Palavras-chaves: Modelo de Crescimento populacional. Transformada de Laplace. Equações diferenciais com retardo.

Abstract

Population growth does not occur instantaneously. Each individual requires a certain amount of time to reach maturity and begin reproducing, and this delay directly influences the population dynamics over time. To account for this, we use delay differential equations, which are powerful mathematical tools for modeling systems where the current state depends on past states. In this work, we explore the main characteristics of these equations and discuss how the Laplace Transform can be used to obtain solutions. As a practical application, we analyze the logistic model with delay, an approach that describes population growth while considering the time required for reproduction. Our objective is to present a mild solution within the space of continuous functions, making the study more accessible and useful for understanding natural phenomena.

Keywords: Population Growth Model, Laplace Transform, Delay Differential Equations.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são ferramentas essenciais para compreender e modelar diversos fenômenos do cotidiano, permitindo descrever, de forma relativamente precisa, como sistemas evoluem ao longo do tempo. Um exemplo notável é o modelo de crescimento populacional, frequentemente analisado por meio da equação logística, que permite calcular a taxa de crescimento populacional.

A equação logística clássica foi determinada pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840. Esse modelo considera tanto o crescimento da população quanto as limitações impostas pelos recursos naturais. Na equação logística clássica, assume-se que um indivíduo conta como reprodutor imediato. No entanto, para aproximar o modelo da realidade, deve-se considerar o tempo necessário para que um indivíduo amadureça e se torne capaz de se reproduzir. Dessa necessidade surge o estudo da equação logística com retardo, que introduz um atraso temporal na modelagem do crescimento populacional. A equação logística com retardo, que considera a variável τ como fator do efeito temporal, é uma aplicação das equações diferenciais com retardo.

O objetivo deste trabalho é apresentar as equações diferenciais com retardo e sua aplicação no modelo de crescimento populacional, demonstrando a existência e unicidade de uma solução branda para a equação logística com retardo. Para isso, será utilizado o teorema do ponto fixo de Banach, que assegura a solução no espaço das funções contínuas, e a transformada de Laplace como método de resolução.

Para alcançar esse objetivo, organizamos este trabalho em quatro capítulos, descritos a seguir:

- O **Capítulo 1** é dedicado à introdução às equações diferenciais, sequências, séries, espaços normados e suas principais propriedades.
- O **Capítulo 2** aborda o espaço de Banach, com a demonstração do teorema do ponto fixo de Banach, essencial para garantir a existência e unicidade da solução branda.
- O **Capítulo 3** apresenta a transformada de Laplace e suas propriedades, que será utilizada como ferramenta para resolver as equações diferenciais com retardo.

- O **Capítulo 4** define as equações diferenciais com retardo e sua aplicação no modelo logístico, aproximando-se de situações reais. Finalizamos o capítulo obtendo uma solução branda no espaço das funções contínuas para a equação logística com retardo.

2 Preliminares

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são equações que envolvem uma função desconhecida e suas derivadas em relação a uma variável independente. Essas equações desempenham um papel fundamental na modelagem matemática de fenômenos de diversas áreas do conhecimento, como biologia (ex: crescimento populacional), física (ex: leis do movimento), química (ex: reações químicas), e economia (ex: dinâmica de mercados financeiros). Elas são instrumentos poderosos para descrever como sistemas evoluem ao longo do tempo.

O estudo das EDOs remonta ao surgimento do cálculo diferencial no século XVII, com as contribuições de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. No entanto, foi somente no final desse mesmo século que as equações diferenciais passaram a ser amplamente utilizadas como ferramentas de modelagem matemática para compreender e prever o comportamento de sistemas dinâmicos.

Neste capítulo, vamos abordar os conceitos fundamentais relacionados às equações diferenciais ordinárias e alguns métodos usados para resolvê-las. Este conteúdo servirá como base para o estudo de temas mais avançados, como as equações diferenciais com retardo, que exploraremos nos próximos capítulos.

Definição 2.1.1. Uma **Equação Diferencial Ordinária (EDO)** é uma equação da forma

$$F(x, y, y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

onde $y = y(x)$ é a função incógnita e x é a variável independente. As equações diferenciais relacionam uma função e suas derivadas. Ao resolver uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), buscamos uma função $y = y(x)$ que satisfaça a equação diferencial em todos os pontos de um determinado intervalo I. Essa função é denominada solução da EDO nesse intervalo.

Exemplo 2.1.1. Abaixo são apresentados exemplos de diferentes tipos de EDOs:

- $y' - 2y = e^{3x}$

- $(y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x)$
- $y' + y = \cos(x)$

Definição 2.1.2. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. O **grau** é o valor do expoente para a derivada mais alta, quando a equação é expressa como um polinômio nas derivadas.

Exemplo 2.1.2.
- $y' - 2y = e^{3x}$ tem ordem 1 e grau 1.
- $(y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x)$ tem ordem 2 e grau 3.
- $y' + y = \cos(x)$ tem ordem 1 e grau 1.

Neste trabalho, utilizaremos apenas as equações diferenciais de $1^{\underline{a}}$ ordem.

Definição 2.1.3. As equações diferenciais ordinárias de $1^{\underline{a}}$ ordem podem ser apresentadas de duas maneiras equivalentes:

(a) Forma Normal: $y' = f(x,y)$

(b) Forma Diferencial: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Ao resolver uma equação diferencial, é possível encontrar a solução geral e soluções particulares para EDOs. A solução que encontramos depende do tipo e das condições iniciais da EDO. Abaixo, serão descritos detalhadamente as soluções e os métodos mais utilizados para encontrar a solução das equações. Nos exemplos ilustrativos, usaremos a mesma letra C para representar diversas constantes.

Definição 2.1.4. Seja uma equação diferencial ordinária da forma

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0,$$

onde F é uma função que relaciona x, y e suas derivadas.

A **Solução Geral** da EDO é uma família de soluções que contém n constantes arbitrárias (para uma equação diferencial de ordem n), representando todas as soluções possíveis da equação em um intervalo I.

Uma **Solução Particular** é obtida ao fixar valores específicos para as constantes da solução geral, resultando em uma única função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial.

Exemplo 2.1.3. Para a equação diferencial :$y' - 2y = e^{3x}$

- **Solução Geral:** $y(x) = e^{3x} + Ce^{2x}$, onde C é uma constante arbitrária.
- **Solução Particular:** $y(x) = e^{3x}$, para condição inicial $y(0) = 1$.

Mais adiante destacaremos o método para encontrar a solução desse exemplo.

Os métodos para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDO), dependem do tipo de EDO. A seguir serão descritos os tipos de equações diferenciais e o seu método de resolução.

2.1.0.1 Equações Separáveis

Uma equação separável, é uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Método de Resolução: Rearranje para separar as variáveis:

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

Exemplo 1: Resolva $y' = xy$.

Solução: 1. Separe:

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$

2. Integre ambos os lados:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

3. Solução geral:

$$y(x) = Ce^{x^2/2}$$

2.1.0.2 Equações Lineares de Primeira Ordem

Definição 2.1.5. Uma equação linear, é uma equação diferencial do tipo:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x.

Método de Resolução: Utilizaremos o método do fator para resolver a EDO linear

O método do fator integrante consiste em multiplicar ambos os lados da equação por uma função $\mu(x)$, chamada de fator integrante, de forma que o lado esquerdo se torne a derivada de um produto:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

Queremos encontrar uma função $\mu(x)$ tal que:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y].$$

Expandindo a derivada do produto no lado direito, obtemos:

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)y' + \mu(x)P(x)y.$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$$\mu'(x) = \mu(x)P(x)$$

Essa é uma equação diferencial separável, que podemos resolver da seguinte forma:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$ln|\mu(x)| = \int P(x)dx.$$

Logo, o fator integrante é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Multiplicando a equação original pelo fator integrante, obtemos:

$$e^{\int P(x)dx}y' + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

O lado esquerdo é a derivada do produto $[e^{\int P(x)dx}y]$. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

Integrando ambos os lados em relação a x, obtemos:

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C.$$

Finalmente, isolando y, temos a solução geral da equação diferencial:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right]$$

onde, C é uma constante arbitrária.

Portanto;

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx.}$ é o fator integrante.

Exemplo 2.1.4. Encontrando a soluçao da seguinte EDO: $y' - 2y = e^{3x}$

Para resolver a equação diferencial $y' - 2y = e^{3x}$ usando o fator integrante, seguimos os seguintes passos:

1. Identificamos a equação na forma padrão $y' + p(x)y = q(x)$, onde $p(x) = -2$ e $q(x) = e^{3x}$.

2. Calculamos o fator integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}.$$

3. Multiplicamos ambos os lados da equação por $\mu(x) = e^{-2x}$:

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = e^{-2x}e^{3x},$$

o que simplifica para:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) = e^{x}.$$

4. Integramos ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right)dx = \int e^{x}dx,$$

resultando em:

$$e^{-2x}y = e^{x} + C.$$

5. Multiplicamos ambos os lados por e^{2x} para encontrar a solução:

$$y(x) = e^{2x}(e^{x} + C) = e^{3x} + Ce^{2x}.$$

Portanto, a solução geral é:

$$y(x) = e^{3x} + Ce^{2x}.$$

Exemplo 2.1.5. $y' + y = \cos(x)$.

Solução: Seguindo os mesmos passos:

1. $p(x) = 1$, $q(x) = \cos(x)$.

2. $\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^{x}$.

3. Multiplicando por $\mu(x)$:

$$e^{x}y' + e^{x}y = e^{x}\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x}y) = e^{x}\cos(x)$$

4. Integre:

$$e^{x}y = \int e^{x}\cos(x)\,dx$$

Resolva a integral por partes:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2} + C$$

5. Solução geral:

$$y(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} + Ce^{-x}$$

2.1.0.3 Equações de Bernoulli

Uma equação de Bernoulli, é uma equação diferencial da seguinte forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

p(x) e q(x) podem ser quaisquer funções contínuas de x. n é um número real, geralmente $n \neq 1$. Se n=1, a equação se torna linear.

Método de Resolução: Substituímos $v = y^{1-n}$, o que transforma a equação dada em uma equação linear para v.

A nova equação é:

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x).$$

A equação tem a forma padrão:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x),$$

onde $p(x) = (1-n)P(x)$ e $q(x) = (1-n)Q(x)$.

O fator integrante é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (1-n)P(x)dx}.$$

Multiplicamos a equação por $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dv}{dx} + \mu(x)p(x)v = \mu(x)q(x).$$

O lado esquerdo torna-se uma derivada de produto:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)v] = \mu(x)q(x).$$

Integrando ambos os lados em relação a x:

$$\mu(x)v = \int \mu(x)q(x)dx + C,$$

onde C é a constante de integração.

Isolando v:

$$v = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right).$$

Substituímos $\mu(x) = e^{\int(1-n)P(x)dx}$ e $q(x) = (1-n)Q(x)$ para encontrar a solução geral para v.

Retornando à variável original y:
Lembrando de que fizemos a substituição $v = y^{1-n}$. Assim:

$$y^{1-n} = v \quad \implies \quad y = [v]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Finalmente, substituímos a solução de v para obter a solução geral para y:

$$y = \left[\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Exemplo 2.1.6. Resolvendo a seguinte equação de Bernoulli

$$y' - \frac{y}{x} = x^2y^2$$

Solução: 1. $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$, $n = 2$. Substitua $v = y^{-1}$, então $v' = -y^{-2}y'$. 2. Reescrevendo em termos de v:

$$-v' - \frac{v}{x} = x^2 \quad \implies \quad v' + \frac{v}{x} = -x^2$$

3. Resolvendo como equação linear: $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. Multiplicando por $\mu(x)$:

$$xv' + v = -x^3 \quad \implies \quad \frac{d}{dx}(xv) = -x^3$$

4. Integrando:

$$xv = -\frac{x^4}{4} + C \quad \implies \quad v = -\frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

5. Voltando para y:

$$y^{-1} = -\frac{x^3}{4} + \frac{C}{x} \quad \implies \quad y = \frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}}$$

2.1.0.4 Equações Exatas

A equação diferencial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.1}$$

é denominada **exata** se existir uma função diferenciável $\psi(x,y)$ tal que:

$$d\psi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{2.2}$$

Se as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ forem diferenciáveis em um **domínio simplesmente conexo**, em que um **domínio simplesmente conexo** é um conjunto aberto e conexo no qual qualquer curva fechada pode ser continuamente deformada em um ponto dentro do domínio, sem sair dele. Intuitivamente, significa que o domínio não possui "buracos".a existência de $\psi(x,y)$ é equivalente à condição:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Se essa igualdade for verdadeira, a equação é exata e podemos determinar $\psi(x,y)$. Para isso, integramos $P(x,y)$ em relação a x:

$$\psi(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y). \tag{2.4}$$

Aqui, $C(y)$ representa termos que dependem apenas de y, pois ao integrar em relação a x, tais termos não aparecem.

Para determinar $C(y)$, derivamos $\psi(x,y)$ em relação a y e a igualamos a $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right) = Q(x,y). \tag{2.5}$$

Isso resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + C'(y) = Q(x,y). \tag{2.6}$$

Dessa equação, podemos resolver para $C(y)$ integrando:

$$C(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right) dy. \tag{2.7}$$

onde C é uma constante arbitrária.

Assim, encontramos a função potencial $\psi(x,y)$, cuja solução implícita define a solução geral da equação diferencial.

Exemplo 2.1.7. Dada a equação:

$$(2xy^2)dx + (2x^2y)dy = 0, \tag{2.8}$$

identificamos:

$$P(x,y) = 2xy^2, \quad Q(x,y) = 2x^2y. \tag{2.9}$$

Verificamos a condição de exatidão:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) = 4xy, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) = 4xy. \tag{2.11}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, a equação é exata.

Agora, integramos $P(x,y)$ em relação a x:

$$\psi(x,y) = \int 2xy^2\,dx = x^2y^2 + C(y). \tag{2.12}$$

Derivamos em relação a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + C'(y). \tag{2.13}$$

Igualamos a $Q(x,y)$:

$$2x^2y + C'(y) = 2x^2y. \tag{2.14}$$

Portanto, $C'(y) = 0$, o que implica $C(y)$ ser uma constante C.

Assim, a solução geral implícita da equação é:

$$x^2y^2 = C. \tag{2.15}$$

Em alguns casos, podemos transformar uma equação diferencial ordinária (EDO) que não é exata em uma exata utilizando um **fator integrante**, geralmente denotado por $\mu(x,y)$. O leitor pode encontrar métodos para determinar o fator integrante em [??].

2.1.1 Existência e Unicidade

Para determinar uma solução particular da EDO, é preciso atender a uma condição previamente estipulada, denominada condição inicial. Quando uma EDO é acompanhada de uma condição inicial, o problema é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**, frequentemente abreviado na literatura. Esse problema é representado matematicamente pelo sistema:

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Dessa forma, resolver o PVI significa encontrar uma solução da EDO $y' = f(x,y)$ que satisfaça a condição inicial, garantindo que a função passe pelo ponto (x_0, y_0) no domínio de f.

Exemplo 2.1.8. Voltando para o Exemplo 2.1.4, vejamos o que ocorre quando definimos um valor inicial (PVI):

A solução geral da EDO é:

$$y = e^{3x} + Ce^{2x},$$

onde C é uma constante arbitrária Agora considerando a condição inicial

$$y(0) = 1,$$

então iremos determinar C para que a condição seja sastifeita. Como $y(0) = 1$, substituímos $x = 0$ e $y = 1$:

$$1 = e^{3(0)} + Ce^{2(0)}$$
$$1 = 1 + C$$
$$C = 0$$

Substituindo $C = 0$ na solução geral, obtemos a solução particular:

$$y = e^{3x}$$

O Teorema de Existência e Unicidade de Picard-Lindelof nos fornece condições específicas sob as quais podemos afirmar com certeza que existe uma única solução para uma equação diferencial. Este teorema é fundamental, pois garante que as soluções de EDOs sejam bem comportadas, o que é essencial para a modelagem matemática de fenômenos naturais. Abaixo enunciaremos o teorema da Existência e Unicidade. A demonstração desse teorema pode ser encontrada na seção de Espaçoes de Banach como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 2.1. ***(Teorema de Existência e Unicidade)***

Se a função $f(x,y)$ juntamente com a derivada parcial f_y forem contínuas no retângulo

$$R : |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b,$$

então o problema de valor inicial (PVI)

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

tem uma única solução $y = y(x)$ definida no intervalo

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

onde

$$\delta = \min\{a, b/M\}$$

e M é o valor máximo assumido pela função $f(x,y)$ no retângulo R.

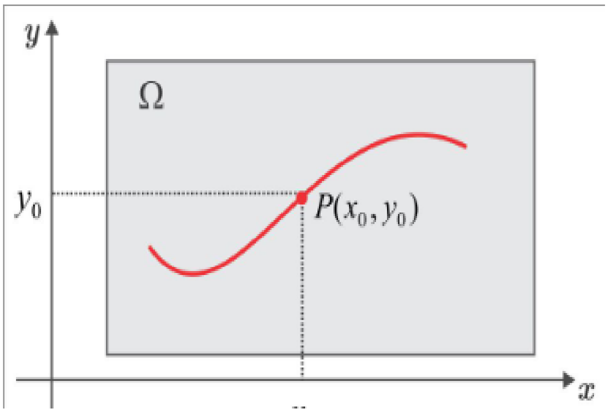

Figura 1 – Teorema da Existência e Unicidade

2.2 Noções Topológicas

A seguir, serão destacados alguns conceitos topológicos básicos em espaços métricos, como o de bola, conjuntos abertos e fechados. Antes de enunciarmos os conceitos topológicos, precisamos definir o que é um espaço métrico e alguns resultados.

Definição 2.2.1. Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto. Uma *métrica* em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x,y)$, chamado *distância* de x até y, de modo que as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

M1) $d(x,x) = 0$;

M2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;

M3) $d(x,y) = d(y,x)$;

M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M,d), em que M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em M.

As propriedades $M1)$ e $M2)$ dizem que $d(x,y) \geq 0$ e que $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A propriedade $M3)$ significa que a distância $d(x,y)$ é uma função simétrica nas variáveis x e y. A condição $M4)$, chamada de desigualdade triangular, é inspirada no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Exemplo 2.2.1. No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a métrica d que reflete a distância euclidiana entre dois pontos quaisquer x,y é dada por:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto d(x,y) = |x-y|$$

Esta função é chamada de **métrica usual** da reta. Mostremos que as condições M_1 a M_4 são satisfeitas:

M1) $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$;

M2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) = |x-y| > 0$;

M3) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |(-1)(y-x)| = |-1||y-x| = |y-x| = d(y,x)$;

M4) $d(x,z) = |x-z| = |x-z+y-y| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$ (Desigualdade Triangular).

Portanto, $d(x,y) = |x-y|$ satisfaz todas as propriedades de uma métrica em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.2. Sejam (M,d) um espaço métrico e $a \in M$ um ponto arbitrário. Então:

1. A **bola aberta** de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto $B(a,r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r, ou seja,

$$B(a,r) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}.$$

2. A **bola fechada** de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto $B[a,r]$ formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r com relação ao ponto a; isto é,

$$B[a,r] = \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}.$$

3. A **esfera** de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto $S(a,r)$ formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = r$. Assim,
$$S(a,r) = \{x \in M \mid d(x,a) = r\}.$$

Evidentemente, podemos observar que:

$$B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r).$$

Definição 2.2.3. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dizemos que um ponto $a \in X$ é um ponto interior a X quando ele é centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que
$$B(a,r) \subseteq X.$$
Isto é equivalente a:
$$d(x,a) < r \Rightarrow x \in X.$$

Definição 2.2.4. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. O interior de X em M é o conjunto $\mathrm{int}X$, formado pelos pontos interiores a X, ou seja,

$$\mathrm{int}X = \{a \in X \mid \exists r > 0, B(a,r) \subseteq X\}.$$

Definição 2.2.5. A fronteira de X em M é o conjunto ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M \setminus X$.
$$\partial X = \{b \in M \mid \forall r > 0, B(b,r) \cap X \neq \emptyset \text{ e } B(b,r) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset\}.$$

Proposição 2.2.1. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dado um ponto arbitrário $c \in M$, há três possibilidades mutuamente exclusivas:

1. Existe uma bola aberta de centro c contida em X, isto é, $c \in \mathrm{int}X$.

2. Existe uma bola aberta de centro c contida em $M \setminus X$, ou seja, $c \in \mathrm{int}(M \setminus X)$.

3. Toda bola aberta de centro c contém pontos de X e de $M \setminus X$, isto é, $c \in \partial X$.

Demonstração. Passo 1: Primeiro mostraremos que as condições são mutuamente exclusivas

- Se $c \in \mathrm{int}X$, então existe $r > 0$ tal que $B(c,r) \subseteq X$. Isso significa que $B(c,r)$ não contém pontos de $M \setminus X$, logo $c \notin \partial X$ e $c \notin \mathrm{int}(M \setminus X)$.

- Se $c \in \mathrm{int}(M \setminus X)$, então existe $r > 0$ tal que $B(c,r) \subseteq M \setminus X$, ou seja, $B(c,r)$ não contém pontos de X. Portanto, $c \notin \mathrm{int}X$ e $c \notin \partial X$.

- Se $c \in \partial X$, então qualquer bola aberta centrada em c contém pontos de X e de $M \setminus X$. Isso significa que $c \notin \text{int}X$ e $c \notin \text{int}(M \setminus X)$.

Assim, um ponto c não pode pertencer a mais de um dos conjuntos $\text{int}X$, $\text{int}(M \setminus X)$ e ∂X, garantindo que as condições são **mutuamente exclusivas**. Vamos agora provar que para cada $C \in M$, uma das três condições deve ser satisfeitas:

Se existir uma bola aberta $B(c,r)$ tal que $B(c,r) \subseteq X$, então $c \in \text{int}X$. Se existe uma bola aberta $B(c,r)$ tal que $B(c,r) \subseteq M \setminus X$, então $c \in \text{int}(M \setminus X)$. Se 1 e 2 não são satisfeitas, então para todo $r > 0$, $B(c,r)$ contém pontos de X e de $M \setminus X$, o que implica $c \in \partial X$.

Portanto, qualquer ponto $c \in M$ pertence a exatamente um dos três conjuntos.

Mostramos que todo ponto $c \in M$ pertence a um dos conjuntos $\text{int}X$, $\text{int}(M \setminus X)$ ou ∂X, e que essas três classificações são mutuamente exclusivas. Assim, temos a decomposição disjunta:

$$M = \text{int}X \cup \text{int}(M \setminus X) \cup \partial X.$$

$\square$

2.2.1 Conjuntos Abertos

Definição 2.2.6. Um subconjunto A de um espaço métrico M é chamado **aberto** em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\text{int}A = A$. Logo, $A \subset M$ é aberto se, e somente se,

$$A \cap \partial A = \emptyset.$$

Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M, devemos obter, para cada $x \in A$, um raio $r > 0$ tal que:

$$B(x,r) \subset A.$$

2.3 Sequência

Uma **sequência** é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ou para um conjunto X) que associa a cada número natural n um elemento a_n, onde a_n é chamado de o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo: Considere a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Seus primeiros termos são:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

Escrita como conjunto, temos $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

Definição 2.3.1. Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço métrico M, se $\{n_1, n_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < \dots$, então a aplicação dada por $n_i \mapsto x_{n_i}$ é indicada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, e recebe o nome de subsequência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.3.2. Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço métrico M chama-se *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $k > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq k$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

2.3.1 Sequência Convergente

Definição 2.3.3. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no espaço métrico M. Dizemos que o ponto $a \in M$ é *limite* da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quando, para todo número $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Escreve-se então $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ ou, ainda, $x_n \to a$, quando $n \to +\infty$.

Quando existe $a = \lim_{n\to+\infty} x_n \in M$, dizemos que a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é *convergente em M*, e converge para a. Caso contrário, dizemos que a sequência é *divergente em M*.

Exemplo 2.3.1. Mostre que a sequência $a_n = (\frac{1}{n})$ converge para 0 no espaço métrico $\mathbb{R}$, com a métrica usual.

Queremos provar que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

onde $a_n = \frac{1}{n}$ e estamos considerando o espaço métrico $\mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é, $d(x,y) = |x-y|$.

Por definição, uma sequência (a_n) converge para um limite L em um espaço métrico (X,d) se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq M$, temos:

$$d(a_n, L) < \varepsilon.$$

No nosso caso, queremos que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ convirja para 0, ou seja, queremos mostrar que:

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq M.$$

Solução

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Nosso objetivo é encontrar um $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq M$, temos $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Queremos que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Isto é, precisamos escolher M de forma que, para $n \geq M$, a desigualdade seja satisfeita.

Observamos que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ é equivalente a $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Portanto, podemos escolher M tal que:

$$M > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto garante que, para todo $n \geq M$, teremos $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{M} < \varepsilon$.

Assim, para todo $n \geq M$, temos:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$, $|a_n - 0| < \varepsilon$, o que implica que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0 no espaço métrico $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Definição 2.3.4. Uma **subsequência convergente** é uma subsequência (x_{n_k}) de uma sequência (x_n) tal que existe um número real L para o qual:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = L$$

Ou seja, os termos da subsequência (x_{n_k}) se aproximam arbitrariamente de um certo limite L conforme k cresce.

Proposição 2.3.1. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Para que se tenha $a \in \overline{X}$ em M, é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.

Demonstração. Se $a \in \overline{X}$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter um ponto $x_n \in B(a, 1/n) \cap X$. Com isso, obtemos uma sequência de pontos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $d(x_n, a) < 1/n$ e, portanto, $\lim x_n = a$.

Reciprocamente, se $a = \lim x_n$, com $x_n \in X$, então toda bola aberta de centro a contém pontos x_n pertencentes a X. Logo, $a \in \overline{X}$. $\square$

Como demonstrado na Proposição 2.3.1, a aderência de um conjunto X pode ser caracterizada por sequências convergentes.

Proposição 2.3.2. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$ num espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $x_n \in B(a,1)$. Portanto, o conjunto dos valores da sequência está contido na reunião dos conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ e $B(a,1)$, que são dois conjuntos limitados. Logo, a sequência $\{x_n\}$ é limitada. □

Como visto na Proposição 2.3.5, toda sequência convergente pertence a um conjunto limitado.

Definição 2.3.5. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico (M,d). Dizemos que uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é **limitada** se existir uma constante $C > 0$ e um ponto $p \in M$ tais que

$$d(x_{n_k}, p) \leq C, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, os termos da subsequência estão contidos em uma bola de raio finito em M.

Como mostrado na Definição 2.3.5, uma subsequência limitada não pode divergir para o infinito dentro do espaço métrico.

2.3.1.1 Sequência de Números Reais Monótona

Definição 2.3.6. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é crescente quando se tem:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots,$$

isto é, $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando vale apenas $x_n \leq x_{n+1}$, a sequência é dita *monótona não-decrescente*. Analogamente, definimos sequência *decrescente* se $x_n > x_{n+1}$ e *monótona não-crescente* se $x_n \geq x_{n+1}$. Uma sequência que satisfaz uma destas condições é chamada *monótona*.

Proposição 2.3.3. Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.

Demonstração. Suponhamos $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$ seja uma sequência limitada. Seja

$$a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$, sendo menor do que a, não pode ser uma cota superior do conjunto dos valores x_n. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a.$$

Assim, como $x_n \leq x_{n+1}$, para $n > n_0$ obtemos:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

Corolário 1. Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.

Demonstração. Basta provar que uma sequência monótona $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada quando possui uma subsequência limitada $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Suponhamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja não-decrescente e que $x_{n_k} \leq c$ para todo k. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k tal que $n < n_k$, então:

$$x_n \leq x_{n_k} \leq c.$$

Logo, $x_n \leq c$ para todo n, o que mostra que a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

2.3.2 Sequência de Cauchy

Uma sequência $\{a_n\}$ em um espaço métrico (X,d) é chamada de **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Isso significa que, à medida que n e m crescem, os elementos a_n e a_m tornam-se arbitrariamente próximos, independentemente se existe um limite L.

Exemplo 2.3.2. Considere novamente a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Vamos provar que ela é uma sequência de Cauchy:

1. Dados $\varepsilon > 0$, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{2}{\varepsilon}$.
2. Para $n, m \geq N$, sem perda de generalidade, suponha $n \leq m$. Então:
$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|m-n|}{mn}.$$
3. Como $n, m \geq N$, temos $mn \geq N^2$ e $|m-n| \leq m+n$. Assim:
$$|a_n - a_m| \leq \frac{m+n}{mn} \leq \frac{2}{N}.$$
4. Escolhendo $N > \frac{2}{\varepsilon}$, segue que $\frac{2}{N} < \varepsilon$. Logo, $\{a_n\}$ é de Cauchy.

:

Proposição 2.3.4. Toda sequência **convergente** é de Cauchy

Demonstração. Tome (x_n) convergente no espaço métrico M. Então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $n, m > n_0$, temos:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Exemplo 2.3.3. Nem toda sequência de cauchy é convergente, por exemplo no espaço dos números racionais $\mathbb{Q}$, uma sequência de Cauchy pode não convergir, como a sequência que se aproxima de $\sqrt{2}$, que não está em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.3.5. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m,n > n_0$, temos

$$d(x_m,x_n) < 1.$$

Assim, o conjunto $\{x_{n_0+1},x_{n_0+2},\dots\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1.

Além disso, o conjunto finito $\{x_1,x_2,\dots,x_{n_0}\}$ também é limitado. Segue que a união

$$\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\} = \{x_1,\dots,x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1},x_{n_0+2},\dots\}$$

é limitada. $\square$

2.3.3 Espaços Completos

Definição 2.3.7. Um espaço métrico (X,d) é chamado de **completo** se toda sequência de Cauchy em X for convergente.

Exemplo 2.3.4. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é completo. Por outro lado, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é completo, pois há sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem dentro de $\mathbb{Q}$. Considere a sequência (x_n) de aproximações racionais de $\sqrt{2}$, definida por:

$$x_1 = 1.4, \quad x_2 = 1.41, \quad x_3 = 1.414, \quad x_4 = 1.4142, \quad x_5 = 1.41421, \quad \dots$$

Essa sequência é de Cauchy, pois, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que, para quaisquer $m,n > N$,

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ou seja, os termos da sequência tornam-se arbitrariamente próximos entre si à medida que n cresce.

No entanto, essa sequência não converge em $\mathbb{Q}$, pois seu limite esperado é $\sqrt{2}$, que não pertence ao conjunto dos números racionais. Isso demonstra que $\mathbb{Q}$ não é um espaço completo, pois contém sequências de Cauchy que não convergem dentro dele. Já no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, essa sequência converge para $\sqrt{2}$, evidenciando a completude de $\mathbb{R}$.

Propriedade A completude de um espaço métrico X garante que ele seja "fechado"sob limites de sequências de Cauchy. Isso é essencial na análise matemática, especialmente em espaços normados e de Banach.

Proposição 2.3.6. A reta $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Da Proposição 1.3.2, sabemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe um $k > 0$ tal que $|x_n| < k$ para todo $n \geq 1$. O conjunto dos termos $\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$ é então limitado para qualquer $m \geq 1$, logo, existe

$$\inf\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$$

para qualquer natural m. Seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de $\mathbb{R}$ dada por

$$y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}.$$

Podemos observar que

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \supset \{x_2, x_3, x_4, \dots\} \supset \cdots \supset \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \supset \dots$$

Portanto,

$$\inf\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \leq \inf\{x_2, x_3, x_4, \dots\} \leq \cdots \leq \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq k,$$

ou seja,

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq y_{n+1} \leq \cdots \leq k.$$

Assim, a sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente e limitada. Segue da Proposição 1.3.2 que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $p = \sup\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = p.$$

Provaremos agora que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e que $\lim_{n\to+\infty} x_n = p$. Como $\lim_{n\to+\infty} y_n = p$, segue que, dado $\eta > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow |y_n - p| < \eta.$$

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_2 \Rightarrow |x_m - x_n| < \eta.$$

Seja $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$, temos $y_{n_0} = \inf\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$, ou seja, deve existir algum $j \geq n_0$ tal que

$$y_{n_0} \leq x_j < y_{n_0} + \eta,$$

pois se não existisse, $y_{n_0}+\eta$ seria o ínfimo do conjunto. Assim, $|x_j - y_{n_0}| < \eta$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, para $\eta = \varepsilon/3$ e $n > n_0$ teremos

$$|x_n - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_{n_0}| + |y_{n_0} - p| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim, $\lim_{n\to+\infty} x_n = p$ e $\mathbb{R}$ é completo. □

2.3.4 Conjuntos Fechados

Diz-se que um ponto a é **aderente** ao conjunto $X \subset M$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente, todo ponto $a \in X$ é aderente a X, pois basta tomar $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.3.8. Chama-se **fecho** de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.

Definição 2.3.9. Um conjunto X diz-se **fechado** quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X.

Definição 2.3.10. Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é **denso** em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X.

2.3.5 Conjuntos Compactos

Nesta seção serão apresentados os conceitos de compacidade, além do Teorema de Bolzano-Weirtrass.

Teorema 2.2. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq x_n \leq \beta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Então temos $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ e $X_n \subset [\alpha, \beta]$. Defina a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n = \inf X_n$. Assim,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq \beta.$$

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, segue da Proposição 1.3.1 que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim a_n$. Mostraremos que a é limite de alguma subsequência de (x_n), ou seja, devemos provar que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_0$ tal que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n_1 > n_0$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_1} \leq a < a+\varepsilon$, pois $a = \lim a_n$. Como $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$, existe $n \geq n_1$ tal que $a_{n_1} \leq x_n < a+\varepsilon$, pois caso contrário, teríamos $x_n > a+\varepsilon$ para todo $n \geq n_1$, implicando que $a+\varepsilon$ seria o ínfimo de X_{n_1}. Assim, $n > n_1$ e $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. □

Teorema 2.3. *Todo subconjunto infinito e limitado $X \subset \mathbb{R}$ admite um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}$ infinito e limitado. X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Fixando essa enumeração, temos uma sequência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a X, portanto uma sequência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subsequência e mudando a notação, podemos admitir que (x_n) converge. Seja $a = \lim x_n$. Como os termos x_n são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o, caso exista, teremos a como limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, logo $a \in X'$.

□

Definição 2.3.11. Um espaço métrico M é compacto se toda sequência em M possui uma subsequência convergente. Um subconjunto N de M é compacto se é compacto como um subespaço de M, ou seja, se toda sequência em N possui uma subsequência que converge para um ponto de N.

Lema 2.3.1. Um subconjunto compacto N de um espaço métrico M é fechado e limitado.

Demonstração. Dado $x \in \overline{N}$, segue da Proposição 2.3.1 que existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ com $x_n \to x$. Como N é compacto, $x \in N$. Logo, $\overline{N} \subset N$, de onde temos $N = \overline{N}$, e N é fechado.

Suponhamos agora que N seja ilimitado. Então N contém uma sequência ilimitada $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde, pela Proposição , $d(y_n, b) > n$ para algum $b \in M$. Essa sequência não poderia ter uma subsequência convergente, já que toda subsequência convergente é limitada. Portanto, N é limitado.

□

2.3.6 Funções Contínuas

Definição 2.3.12. Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Assim, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B_0 = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$, é possível encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$ de centro a tal que $f(B) \subseteq B_0$.

Definição 2.3.13. $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Definição 2.3.14. Sejam M e N espaços métricos com respectivas métricas d_1 e d_2. Dada $f : M \to N$, se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x,y), \quad \forall x,y \in M,$$

então f é uma aplicação Lipschitziana. A constante c é chamada de constante de Lipschitz.

Exemplo 2.3.5. Se a função $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então, pelo Teorema do Valor Médio, dados $x,y \in I$ quaisquer, existe um ponto z entre x e y tal que

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y).$$

Logo,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq c|x-y|.$$

Assim, toda função com derivada limitada num intervalo (limitado ou ilimitado) é Lipschitziana.

Exemplo 2.3.6. Toda função $f : M \to N$ Lipschitziana é contínua (em cada ponto $a \in M$). De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Então

$$d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) \leq cd_1(x,a) < c\delta = \varepsilon.$$

Definição 2.3.15. A função $f : M \to N$ é chamada de *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x,y \in M$, sempre que $d_1(x,y) < \delta$, temos $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Em outras palavras, a escolha de δ não depende do ponto específico $a \in M$.

A partir deste ponto denotaremos apenas por d a métrica em ambos os espaços, exceto em momentos que possam gerar dúvidas em relação a qual dos espaços estamos trabalhando.

Proposição 2.3.7. Sejam M e N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to a$ em M implique $f(x_n) \to f(a)$ em N.

Demonstração. Seja f contínua no ponto a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Como $x_n \to a$, existe n_0 tal que $\forall n > n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, a) < \eta, \forall \eta > 0$. Tomando $\eta = \delta$, temos que $d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Logo, $\lim f(x_n) = f(a)$.

Para demonstrar a recíproca, suponhamos, por absurdo, que f não seja contínua no ponto a. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, é possível obter $x_n \in M$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Assim, obtemos uma sequência $\{x_n\}$ em M, com $x_n \to a$ sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$. $\square$

Teorema 2.4. *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Então a imagem de um subconjunto compacto K de M pela f é compacta.*

Demonstração. Pela definição de compacto, é suficiente mostrar que toda sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na imagem $f(K) \subset N$ contém uma subsequência que converge em $f(K)$. Como $y_n \in f(K)$, temos $y_n = f(x_n)$ para algum $x_n \in K$. Como K é compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em K.

Segue da Proposição anterior que a imagem de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em $f(K)$. Como f é contínua, $f(x_{n_k})$ converge em $f(K) \subset f(M)$. Logo, $f(K)$ é compacto. □

Teorema 2.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$ e duas sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ em X satisfazendo $\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de X, que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in X$. Então, como $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, vale também que $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$. Sendo f contínua no ponto a, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) - f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) - \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a) - f(a) = 0,$$

contradizendo que $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.3.7. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, é uniformemente contínua.

De fato, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, pois f é contínua e $[0, 1]$ é compacto. Observamos que, se $x, y \geq 1$, isto é, $x, y \in [1, +\infty)$, então $x + y \geq 2$, e temos:

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{(y - x)}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}.$$

Logo,

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leq \frac{|y - x|}{2}.$$

Assim, dado $\eta > 0$, existe $\delta = 2\eta > 0$ tal que, se $|y - x| < \delta$, então $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \eta$. Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ também é uniformemente contínua em $[1, +\infty)$.

Agora, $f : [0, +\infty)$ é uniformemente contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que: - $x, y \in [0, 1]$, $|y - x| < \delta_1 \implies |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$; - $x, y \in [1, +\infty)$, $|y - x| < \delta_2 \implies |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dados $x, y \in [0, +\infty)$ com $|y - x| < \delta$, temos: - Se $x, y \in [0, 1]$ ou $x, y \in [1, +\infty)$, então claramente $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. - Se, por exemplo, $x \in [0, 1]$ e $y \in [1, +\infty)$, então $|y - 1| < \delta$ e $|1 - x| < \delta$. Logo,

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(1)| + |f(1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teorema 2.6. *(Teorema e Dini) Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas em um intervalo compacto I, e suponha que:*

1. *$f_n(x)$ converge pontualmente para uma função $f(x)$ em I.*
2. *A sequência $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em I, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.*

*Então, a convergência de f_n para f também é **uniformemente contínua** em I, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in I$, $|x-y| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ para todos $n \geq N$.*

Teorema 2.7 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em um espaço de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Suponha que:*

1. *$f_n \to f$ quase em toda parte (q.e.p.) em X;*
2. *Existe uma função integrável $g \in L^1(X)$ tal que, para todo n,*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{para quase todo } x \in X.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

As demonstrações dos teoremas 2.6 e 2.7 podem ser encontradas em 8.

2.4 Séries

Nesta seção, iremos apresentar os conceitos de Séries e definir o que é uma série de potência, conceito que será utilizado mais adiante na aplicação da resolução de equações diferenciais .

Para ilustrar o conceito de séries, consideramos a soma infinita:

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \ldots$$

Essa soma pode ser associada à uma sequência S_n, onde:

$$S_1 = 0.9, S_2 = 0.99, S_3 = 0.999, \ldots$$

A soma infinita é o limite dessa sequência quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.999\ldots$$

Reescrevendo os termos como frações, temos:

$$S_n = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right),$$

que é uma soma parcial de uma progressão geométrica com razão $r = \frac{1}{10}$. Usando a fórmula da soma da PG, obtemos:

$$S_n = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Tomando o limite $n \to \infty$, resulta em:

$$S_n = 1,$$

levando à conclusão:

$$0.999\ldots = 1,$$

interpretada como um limite.

Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

será representada simbolicamente por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e denominada série infinita ou, simplesmente, série. O termo a_n recebe o nome de termo geral da série. A letra grega Σ (lê-se sigma) significa soma, o índice n sob o Σ indica onde a soma se inicia, e o símbolo ∞ sobre o Σ indica que a soma é infinita.

Um dos objetivos no estudo das séries é estabelecer condições sobre a sequência $\{a_n\}$ para que a soma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

resulte em um número real. Se este for o caso, a série denomina-se convergente.

Algumas situações são relativamente simples de analisar, como podemos ver no seguinte exemplo,

Exemplo 2.4.1. Determinemos se seguinte série converge:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Essa soma pode ser representada como uma **série infinita**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Para entender essa soma, consideramos a soma parcial S_n, que inclui os n primeiros termos:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Os termos da série formam uma **progressão geométrica (PG)** com termo inicial $a = 1$ e razão $r = \frac{1}{2}$. A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Substituindo $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$:

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

A soma infinita é o limite da soma parcial quando $n \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot [1-0] = 2.$$

A soma infinita da série é:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Definição 2.4.1. Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. Caso apenas a série original convirja, diremos que ela é condicionalente convergente.

Um resultado que nos ajuda a determinar se a série é absolutamente covergente é o teste da razão

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ uma série. Definimos o limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{2.16}$$

Então, valem as seguintes condições:

- Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente e, portanto, convergente.
- Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série é divergente.
- Se $L = 1$, o critério é inconclusivo.

Porém nosso objetivo neste trabalho não será aprofundarmos o estudo das séries e suas problemáticas de convergência ou divergência.

2.5 Série de Potências

Definição 2.5.1. Uma série de potências é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots, \tag{2.17}$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Para cada x fixado, a série é uma série de constantes que podemos testar quanto à convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \tag{2.18}$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio,no entanto temos a diferença de que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \tag{2.19}$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$.

Utilizamos o Critério da Razão para analisar a convergência absoluta de uma série. Em geral, a série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots, \tag{2.20}$$

é chamada uma série de potências em $(x-a)$ ou uma série de potências centrada em a.

Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$, adotamos a convenção de que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assim a série de potências sempre converge quando $x = a$.

Exemplo 2.5.1. Verificando os valores de x para os quais a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5^n} \tag{2.21}$$

é convergente,

Aplicando o teste da razão, temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{2^n x^n} \right|. \tag{2.22}$$

Simplificando:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}x^n x}{5^{n+1}\cdot 5^n} \cdot \frac{5^n}{2^n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x}{5} \right|. \tag{2.23}$$

Pelo teste da razão, a série anterior é convergente se $L < 1$. Logo, temos:

$$\left| \frac{x}{5} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 5. \tag{2.24}$$

Complementarmente, verificamos que a série diverge para $|x| > 5$. No caso de $|x| = 5$, o teste da razão não é conclusivo.

Para $x = 5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 5^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n. \tag{2.25}$$

Essa série diverge, pois:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty. \tag{2.26}$$

Para $x = -5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n. \tag{2.27}$$

Essa série também diverge, pois:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n 2^n = \pm\infty. \tag{2.28}$$

Portanto, a série em estudo converge para o intervalo aberto $(-5,5)$.

2.5.1 Teorema de Taylor

Se uma função $f(x)$ for infinitamente diferenciável em torno de um ponto a, então sua expansão em **série de potências** (caso ela exista) pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{2.29}$$

Os coeficientes c_n são determinados pela fórmula:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{2.30}$$

Substituindo essa expressão para c_n, obtemos a **série de Taylor** de $f(x)$ centrada em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{2.31}$$

Ou seja,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{2.32}$$

2.5.2 Série de Maclaurin

A **série de Maclaurin** é um caso particular da série de Taylor para $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{2.33}$$

Ou seja,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{2.34}$$

Observação 2.5.1. Notemos que, se $f(x)$ puder ser representada como uma **série de potências** em torno de a, então sua **série de Taylor** representa a função. No entanto, existem funções que **não podem ser expressas** como a soma de sua série de Taylor em determinados pontos. Um exemplo clássico é a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Essa função tem derivadas de todas as ordens em $x = 0$, mas sua série de Taylor em torno de $x = 0$ é **identicamente zero**, enquanto a função em si não é.

Exemplo 2.5.2. A expansão em série de Taylor da função exponencial e^x em torno de $x = 0$ é dada por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Esta é uma série infinita, onde x é a variável e n é um índice que vai de 0 até o infinito. A série expressa a função e^x como a soma de termos sucessivos envolvendo potências de x, divididas pelo fatorial do índice n.

Demonstração. A função exponencial tem uma propriedade muito especial: sua derivada é sempre ela mesma. Ou seja:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$$

Para $x = 0$, todas as derivadas de e^x no ponto $x = 0$ são $e^0 = 1$.

A fórmula geral para a série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de $x = 0$ é:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Aplicando essa fórmula para e^x, com $f(x) = e^x$ e $f^{(n)}(x) = e^x$, temos que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

A expansão em série de e^x é então:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\square$

2.6 Espaços Normados

Definição 2.6.1. Um conjunto V, munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar, é um **espaço vetorial** se, para quaisquer $u,v,w \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidas:

(EV1) $u+v = v+u$, para todo $u,v \in V$;

(EV2) $u+(v+w) = (u+v)+w$, para todo $u,v,w \in V$;

(EV3) existe um elemento $0_V \in V$ tal que $0_V + u = u$, para todo $u \in V$;

(EV4) para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u+v = 0$;

(EV5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, para todo $u \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV6) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$, para todo $u \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV7) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, para todo $u,v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

(EV8) $1_V \cdot u = u$, para todo $u \in V$.

Definição 2.6.2. Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}^+$ que associa a cada vetor $x \in E$ o número real não negativo $||x||$, chamado a norma de x, tal que, para quaisquer $x,y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

N1) Se $x \neq 0$ então $||x|| > 0$ e $||0|| = 0$;

N2) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$;

N3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Em **N2)**, se tomarmos $y = -x$, temos:

$$0 = ||x+(-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = 2||x||,$$

com $||x|| \geq 0, \forall x \in E$. Segue-se que $||x|| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

De **N3)**, temos que:

$$||x|| = ||x-y+y|| \leq ||x-y|| + ||y|| \implies ||x|| - ||y|| \leq ||x-y||, \tag{2.36}$$

$$||y|| = ||y-x+x|| \leq ||y-x|| + ||x|| \implies ||y|| - ||x|| \leq ||y-x||, \tag{2.37}$$

$$\implies ||x|| - ||y|| \geq -||x-y||. \tag{2.38}$$

Portanto:

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x-y||.$$

Definição 2.6.3. Um **espaço vetorial normado** é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em E. Quando a norma está subentendida, podemos dizer simplesmente espaço (vetorial) normado E.

Observação 2.6.1. A desigualdade 1.36 implica uma importante propriedade da norma: a norma é contínua, ou seja, a aplicação $x \mapsto \|x\|$ é contínua de $(E, \|\cdot\|)$ em $\mathbb{R}_+$.

Definição 2.6.4. Em espaços normados $(X, \|\cdot\|)$, a distância é definida como $d(a,b) = \|a-b\|$. Assim, uma sequência $\{a_n\}$ é de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Exemplo 2.6.1. Considere o espaço $X = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. A sequência $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ é de Cauchy.

De fato, a distância entre dois termos a_n e a_m é dada por:

$$\|a_n - a_m\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^2}.$$

A primeira componente é $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{nm}$, cujo quadrado é $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 = \frac{(m-n)^2}{n^2m^2}$. A segunda componente é $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{(m-n)(m+n)}{n^2m^2}$, cujo quadrado é $\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^2 = \frac{(m-n)^2(m+n)^2}{n^4m^4}$.

Somando ambas as componentes, temos:

$$\|a_n - a_m\|^2 = \frac{(m-n)^2}{n^2m^2} + \frac{(m-n)^2(m+n)^2}{n^4m^4}.$$

Fatorando $(m-n)^2$, obtemos:

$$\|a_n - a_m\|^2 = (m-n)^2 \left(\frac{1}{n^2m^2} + \frac{(m+n)^2}{n^4m^4}\right).$$

Quando $n, m \to \infty$, os termos $\frac{1}{n^2m^2}$ e $\frac{(m+n)^2}{n^4m^4}$ tendem a zero, pois os denominadores crescem mais rapidamente que os numeradores. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m > N$, temos $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

Portanto, $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $X = \mathbb{R}^2$.

Definição 2.6.5. Um **subespaço** F de um espaço normado E é um subespaço vetorial de E com a norma obtida pela restrição da norma de E ao subconjunto F. Essa norma em F é dita *induzida* pela norma de E. Se F é fechado em E, então F é chamado de *subespaço fechado*

Exemplo 2.6.2. Seja $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\text{Soma}})$, onde:

$$||x||_{\text{Soma}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{para } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmação: $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\text{Soma}})$ é um espaço vetorial normado. De fato:

- **N1)** Se $x \neq 0$, então existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_{i_0} \neq 0$ e, portanto,

$$||x||_{\text{Soma}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq |x_{i_0}| > 0.$$

- **N2)** $||\lambda x||_{\text{Soma}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n}(|\lambda||x_i|) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|||x||_{\text{Soma}}$.

- **N3)** $||x+y||_{\text{Soma}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = ||x||_{\text{Soma}} + ||y||_{\text{Soma}}$.

Exemplo 2.6.3. $\mathbb{R}^n$ também é um espaço vetorial normado quando munido de $|| \cdot ||_{\text{Máximo}}$, onde

$$||x||_{\text{Máximo}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \text{para } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

De fato:

- **N1)** Se $x \neq 0$, então existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_{i_0} \neq 0$, e assim,

$$||x||_{\text{Máximo}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \geq |x_{i_0}| > 0.$$

- **N2)** $||\lambda x||_{\text{Máximo}} = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq n}\{|\lambda||x_i|\} = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda|||x||_{\text{Máximo}}$.

- **N3)** $||x+y||_{\text{Máximo}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i+y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i|+|y_i|\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = ||x||_{\text{Máximo}} + ||y||_{\text{Máximo}}$.

Proposição 2.6.1. Todo espaço vetorial normado $(E, || \cdot ||)$ induz uma métrica natural $d : E \times E \to \mathbb{R}$ sobre E, definida por $d(x,y) = ||x-y||$, pois satisfaz:

M1) $d(x,x) = 0$

M2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) = ||x-y|| > 0$;

M3) $d(x,y) = d(y,x)$

M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Demonstração. **M1)** $d(x,x) = ||x-x|| = ||0|| = 0$;

M2): Se $x \neq y$, então $x-y \neq 0$. Pela definição da norma, temos que $||x-y|| = 0$ se, e somente se, $x-y = 0$. Como $x \neq y$, logo $x-y \neq 0$, o que implica que:

$$||x-y|| > 0.$$

Portanto, $d(x,y) = ||x-y|| > 0$

M3) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = |-1| \cdot ||y-x|| = ||y-x|| = d(y,x)$;

M4) $d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y)$

$\square$

Lema 2.6.1. Sejam E um espaço métrico vetorial normado, $x,y,a \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma métrica d induzida por uma norma em E satisfaz:

- (a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$;
- (b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$.

Demonstração. Temos $d(x+a,y+a) = ||x+a-(y+a)|| = ||x+a-y-a|| = ||x-y|| = d(x,y)$, e $d(\alpha x, \alpha y) = ||\alpha x - \alpha y|| = ||\alpha(x-y)|| = |\alpha| ||x-y|| = |\alpha| d(x,y)$. $\square$

Observação 2.6.2. Naturalmente, em um espaço vetorial normado, tem-se $||x|| = d(x, 0_E)$, ou seja, a norma de um vetor x é a distância de x à origem.

Exemplo 2.6.4. Seja $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$. O espaço $C([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço métrico quando munido da aplicação

$$d : C([a,b],\mathbb{R}) \times C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \quad \text{por} \quad (x,y) \mapsto d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a,b]} |(x-y)(t)|.$$

Assim, $C([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço normado com a norma definida por

$$|| \cdot || : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \quad \text{por} \quad x \mapsto ||x|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Definição 2.6.6. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas no mesmo espaço vetorial E. Escrevamos $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$, e indicamos com $i_{12} : E_1 \to E_2$ a aplicação identidade. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes quando i_{12} é uma aplicação contínua com inversa também contínua.

Proposição 2.6.2. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Demonstração. Suponhamos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sejam normas equivalentes. Pela definição, isso significa que i_{12} é contínua com inversa contínua. Portanto, existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que:

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Assim, mostramos a implicação direta.

Para provar a implicação inversa, suponhamos que existam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ para todo $x \in E$. Desejamos provar que i_{12} é contínua com inversa contínua. Para isso, notamos que:

$$\|x-y\|_2 \leq \beta\|x-y\|_1 \quad \text{e} \quad \|x-y\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\|x-y\|_2, \quad \text{para todos } x,y \in E.$$

Logo, i_{12} é contínua, e sua inversa, i_{21}, também é contínua. Portanto, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes. □

Observação 2.6.3. Podemos afirmar que as normas $\|\cdot\|_{\text{Euclidiana}}$, $\|\cdot\|_{\text{Soma}}$ e $\|\cdot\|_{\text{Máxima}}$ introduzidas, respectivamente, nos Exemplos 2.6 e 2.7, são equivalentes em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.6.2. Seja $\{x_1,\ldots,x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço normado X. Então existe um número $c > 0$ tal que, para toda escolha de escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, temos:

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|). \tag{2.39}$$

Demonstração. Seja $s = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$, todos os valores $|\alpha_j|$ são zero e, portanto, a desigualdade (2.3) vale para qualquer c. Se $s > 0$, dividindo ambos os lados de (2.3) por s, temos:

$$\left\|\frac{\alpha_1}{s}x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{s}x_n\right\| \geq c, \tag{2.40}$$

onde $\beta_j = \frac{\alpha_j}{s}$ e $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$. A desigualdade acima já está afirmando que o lema vale, mas isso é o que se quer mostrar.

Logo, é suficiente provar que existe $c > 0$ tal que:

$$\|\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n\| \geq c \tag{2.41}$$

para toda n-upla de escalares $\beta_1,\ldots,\beta_n$ com $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$.

Suponhamos que isso não ocorra. Então, existe uma sequência de vetores $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$y_m = \beta_1^{(m)}x_1 + \ldots + \beta_n^{(m)}x_n, \quad \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1, \tag{2.42}$$

tal que $\|y_m\| \to 0$ quando $m \to \infty$.

Ou seja, não existe $c > 0$ tal que $\|y_m\| \geq c$ para todo m. Como $\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1$, temos $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$. Então, para cada j fixado, obtemos a sequência $\{\beta_j^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ que é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência convergente $\{\gamma_1^{(m)}\}$ de $\{\beta_1^{(m)}\}$. Seja β_1 o limite dessa subsequência. Obtemos então uma subsequência $\{y_{1,m}\}$ de $\{y_m\}$ dada por:

$$y_{1,m} = \gamma_1^{(m)}x_1 + \beta_2^{(m)}x_2 + \ldots + \beta_n^{(m)}x_n, \tag{2.43}$$

onde $\gamma_1^{(m)} \to \beta_1$ quando $m \to \infty$.

Os termos $\beta_2^{(m)}$ de $y_{1,m}$ também formam uma sequência limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência convergente de $\{\beta_2^{(m)}\}$. Seja β_2 o limite dessa sequência. Obtemos assim a subsequência $\{y_{2,m}\}$ de $\{y_{1,m}\}$.

Continuando esse raciocínio, após n vezes, obteremos uma subsequência $\{y_{n,m}\}$ de $\{y_m\}$ dada por:

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j = \gamma_1^{(m)} x_1 + \gamma_2^{(m)} x_2 + \ldots + \gamma_n^{(m)} x_n, \tag{2.44}$$

onde $\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1$, já que é uma subsequência de $\{\beta_j^{(m)}\}$.

Portanto, para $m \to \infty$, temos:

$$y_{n,m} \to y = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n. \tag{2.45}$$

Como $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$, segue que nem todos os β_j são nulos. Sendo o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linearmente independente e nem todos os β_j nulos, temos $y \neq 0$. Porém, como $y_{n,m} \to y$ e, por hipótese, $\|y_m\| \to 0$, então $\|y_{n,m}\| \to 0 \implies \|y\| = 0$, o que é uma contradição. □

Teorema 2.8. *Em um espaço normado M de dimensão finita, um subconjunto $N \subset M$ é compacto se, e somente se, N é fechado e limitado.*

Demonstração. Segue do Lema 1.3.1 que compacto implica fechado e limitado. Quanto à recíproca, temos:

Seja N fechado e limitado. Suponhamos que $\dim M = n$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de M. Consideremos uma sequência $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em N. Cada x_m tem uma representação:

$$x_m = \alpha_{1m} e_1 + \alpha_{2m} e_2 + \ldots + \alpha_{nm} e_n.$$

Como N é limitado, temos $\|x_m\| \leq k$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 1.6.2, existe $c > 0$ tal que:

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jm} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{jm}|.$$

Portanto, para cada j fixado:

$$|\alpha_{jm}| \leq \frac{k}{c}, \quad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{jm}| \leq \frac{k}{c}.$$

Assim, a sequência de números $\{\alpha_{jm}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada para cada j fixado. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe um ponto de acumulação α_j para $1 \leq j \leq n$. Como na demonstração do Lema 1.6.2, concluímos que $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge para:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Como N é fechado, $z \in N$. Isto mostra que uma sequência arbitrária $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em N possui uma subsequência convergente em N. Portanto, N é compacto. □

2.7 Espaço de Banach

Esta seção será destinada aos conceito de espaços de Banach e suas propriedades, destacando aplicações em análise funcional.

Definição 2.7.1. Dizemos que um espaço vetorial X é um **espaço de Banach** se X for normado e completo, segundo essa norma.

Observação 2.7.1. Dizer que o espaço X é completo segundo uma norma $\|\cdot\|$ significa que, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X e $n > N$, então:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \text{ou seja, } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Exemplo 2.7.1. O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. Segundo a Observação 1.6.2, podemos, sem perda de generalidade pois todas as normas e,m $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, então o espaço será de Banach independentemente da norma escolhida. considerar em $\mathbb{R}^n$ a norma dada por:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{onde } x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $x_k = (x_k^1,\dots,x_k^n)$, uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Pois, cada x_k representa um elemento de $\mathbb{R}^n$, e a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é composta por tais elementos. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k,l \geq N_0$, temos:

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon,$$

onde $x_k = (x_k^1,\dots,x_k^n)$ e $x_l = (x_l^1,\dots,x_l^n)$.

Logo, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, a sequência $\{x_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Com efeito, se $k,l \geq N_0$, então:

$$|x_k^i - x_l^i| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_k^j - x_l^j| = \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

Segue da Proposição 1.3.4 que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. Assim, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, existe $y_i \in \mathbb{R}$ tal que a sequência $\{x_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para y_i, ou seja:

$$\lim_{k\to\infty} x_k^i = y_i, \quad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

Agora, definindo $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, devemos mostrar que $x_k \to y$ em $\mathbb{R}^n$ na norma $\|\cdot\|$. Para isso, dado $\varepsilon > 0$, seja $\eta = \frac{\varepsilon}{n}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_k^i - y_i| < \eta, \quad \text{para todo } k \geq N_i.$$

Tomando $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, temos que, para todo $k \geq N$:

$$\|x_k - y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_k^i - y_i| < \sum_{i=1}^{n} \eta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Portanto, $x_k \to y$ na norma $\|\cdot\|$, e $\mathbb{R}^n$ é completo para essa norma. Como todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, segue que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.7.1. O espaço $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ é completo.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C([a,b], \mathbb{R}^n)$, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n, m \geq n_0$, temos:

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Para todo $x \in [a,b]$ fixado, a sequência $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é completo, segue que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Assim, existe uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [a,b]$.

Agora, provaremos que $f \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ e que $f_n \to f$ em $C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

1. $f \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

Como $f_n \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Fixando $x, y \in [a,b]$ com $|x - y| < \delta$, temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Sabemos que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ uniformemente em x, e $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ para $|x - y| < \delta$, pois f_n é contínua. Assim, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, provando que f é contínua. Logo, $f \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

2. $f_n \to f$ em $C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

Devemos mostrar que $\|f_n - f\| \to 0$. Como $\{f_n\}$ é de Cauchy, para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$:

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos $f_m(x) \to f(x)$ para todo x. Assim, para $n \geq n_0$:

$$\|f_n - f\| = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Portanto, $f_n \to f$ em $C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Desta forma, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ é completo. □ □

Teorema 2.9. *Todo subespaço vetorial de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{\mathbf{v}_k\}$ uma sequência de Cauchy em X. Como as normas em X são equivalentes (pelo observação 1.6.3, basta considerar a norma $\|\cdot\|_1$. A sequência $\{\mathbf{v}_k\}$ sendo de Cauchy implica que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, para $k,m \geq N$, temos

$$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_m\|_1 < \varepsilon.$$

Como $\|\cdot\|_1$ é uma norma, isso implica que a sequência converge para um limite $\mathbf{v}_0 \in X$, e portanto X é completo, ou seja, Banach.

□

Definição 2.7.2. Um subespaço N de um espaço de Banach X é um subespaço vetorial normado de X.

Teorema 2.10. *Um subespaço N de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, o conjunto N é fechado em X.*

Demonstração. Vamos supor que N é completo. Seja $a \in N$, então existe uma sequência $\{x_n\}$ em N tal que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como $\{x_n\}$ é convergente, sabemos que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em N, que é completo. Logo, temos que $x_n \to a$, e, portanto, $a \in N$. Isso implica que N é fechado.

Agora, vamos supor que N é fechado e mostrar que N é completo. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em N. Como $N \subseteq X$, a sequência $\{x_n\}$ também está em X. Como X é um espaço completo, a sequência $\{x_n\}$ converge para algum ponto $a \in X$. Como N é fechado, temos que $a \in N$. Logo, N é completo.

Portanto, N é completo se, e somente se, N é fechado em X.

□

2.8 Teorema de Ponto Fixo de Banach

Nesta seção, vamos apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que garante a existência e a unicidade de um ponto fixo para funções contratantes em espaços normados completos.

Primeiro, vamos explorar a demonstração do teorema no contexto de espaços normados e, em seguida, generalizar para qualquer espaço completo, levando em conta as propriedades específicas desses espaços e a condição de contratatividade da função.

Teorema 2.11. *Sejam X um espaço métrico, $F \subset X$ um subconjunto fechado e $T : F \to F$ uma contração. Então, existe um único ponto $x \in F$ tal que $T(x) = x$, ou seja, T possui um único ponto fixo.* Utilizamos a demonstração para espaços normados. A seguir, veremos a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que se aplica a qualquer espaço completo.

Demonstração. Verifiquemos inicialmente que F é completo. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, com $x_n \in F$. Como $F \subset E$ e E é completo, temos que $x_n \to x \in E$. Logo, como F é fechado, $x \in F$. Portanto, F é completo.

Agora, como $T : F \to F$ é uma contração, existe $\lambda \in [0,1)$ tal que:

$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad \text{para todo } x,y \in F.$$

Tomemos $x_0 \in F$ arbitrário. Considere a sequência $x_n = T(x_{n-1})$, para $n = 1,2,3,\ldots$. Vamos provar, por indução, que:

$$d(T(x_n),T(x_{n-1})) \leq \lambda^n d(x_1,x_0).$$

Para $n = 1$, temos:

$$d(T(x_1),T(x_0)) \leq \lambda d(x_1,x_0),$$

pois T é uma contração.

Suponhamos que para algum $n \geq 1$ temos:

$$d(T(x_n),T(x_{n-1})) \leq \lambda^n d(x_1,x_0).$$

Vamos mostrar que a desigualdade é válida para $n+1$:

$$d(T(x_{n+1}),T(x_n)) = d(T(T(x_n)),T(T(x_{n-1}))) \leq \lambda d(x_n,x_{n-1}),$$

pela hipótese de indução, temos:

$$d(T(x_{n+1}),T(x_n)) \leq \lambda^{n+1} d(x_1,x_0).$$

Logo, por indução, temos que:

$$d(T(x_n),T(x_{n-1})) \leq \lambda^n d(x_1,x_0) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, para qualquer n e p, temos:

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}).$$

Aplicando a propriedade de contração, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \lambda^n d(x_1, x_0) \left[1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1}\right].$$

A soma da progressão geométrica é dada por:

$$1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1} = \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}.$$

Logo, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} d(x_1, x_0).$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, à medida que $n \to \infty$, temos $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$. Portanto, a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy no espaço completo F, ou seja, $\{x_n\}$ converge para algum $x \in F$.

Como T é contínua, temos que:

$$T(x_n) \to T(x), \quad \text{mas } T(x_n) = x_{n+1}, \quad \text{logo } x_{n+1} \to T(x).$$

Portanto, $x_n \to x$ e $x_{n+1} \to T(x)$, o que implica que $T(x) = x$.

Agora, para provarmos a unicidade do ponto fixo, suponha que exista $y \in F$, com $y \neq x$, tal que $T(y) = y$. Como T é uma contração, temos:

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

mas $T(x) = x$ e $T(y) = y$, logo:

$$d(x, y) \leq \lambda d(x, y).$$

Isso implica que:

$$d(x, y) \leq \lambda d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y)(1-\lambda) \leq 0.$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, isso implica que $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$.

Logo, podemos concluir que existe um único ponto $x \in F$ tal que $T(x) = x$.

O ponto fixo de T é único e pertence a F.

□

2.8.0.1 Generalização do teorema do ponto fixo de Banach

Definição 2.8.1. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma função $f : M \to M$ é chamada de **contração** sobre M se existe um número real positivo $k < 1$, tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

Exemplo 2.8.1. Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. A função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma contração. De fato:

$$d(f(x), f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |x - y|.$$

Como $x, y \geq 1$, temos que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, ou seja, $\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}$. Logo,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|.$$

Observe que f não é uma contração quando definida no intervalo fechado $[0, 1]$, pois $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$.

Teorema 2.12. *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \to M$. Então, f possui um único ponto fixo. Ou seja, $f(x^*) = x^*$.*

Demonstração. Considere $x_0 \in M$ e a sequência (x_n) em M definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Então,

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1) \quad \Rightarrow \quad d(x_1, x_2) \leq k \cdot d(x_0, x_1),$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot d(x_1, x_2) \leq k^2 \cdot d(x_0, x_1) \quad \Rightarrow \quad d(x_2, x_3) \leq k^2 \cdot d(x_0, x_1).$$

Continuando o processo, usando um argumento indutivo, chegamos à conclusão que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Como o nosso interesse é mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy, da desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1), \quad d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^{n+1} \cdot d(x_0, x_1), \quad \ldots, \quad d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ \leq k^{n+p-1} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1).$$

Usando a fórmula da soma de uma progressão geométrica e que $k < 1$, para qualquer p fixado, temos:

$$k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1} = k^n \cdot \frac{1 - k^p}{1 - k} \leq \frac{k^n}{1 - k}.$$

Logo, obtemos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, chegamos a:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Como (M,d) é um espaço métrico completo, então (x_n) converge em M.

Assim, tomando o limite na equação $x_{n+1} = f(x_n)$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e f é contínua, usando a proposição de continuidade, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a).$$

Assim, temos a igualdade desejada $f(a) = a$.

Agora, provamos a unicidade. Sejam a e b em M tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Então,

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq k \cdot d(a,b).$$

Isso leva à desigualdade:

$$(1-k) \cdot d(a,b) \leq 0.$$

Como $k < 1$, então $1-k > 0$, e concluímos que $d(a,b) = 0$, ou seja, $a = b$.

Portanto, f possui um único ponto fixo, o que completa a demonstração do teorema.

□

2.8.1 Teorema de Picard

Uma aplicação do teorema de ponto fixo de Banach é a demonstração do teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias (EDOs), usando o método de Picard. A seguir, será apresentado o Teorema de Picard, seguido de sua demonstração e de alguns exemplos.

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ com coordenadas retangulares (t,x), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Definição 2.8.2. Dada uma função contínua $f : U \to \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $(t_0, x_0) \in U$, a equação diferencial de primeira ordem, com valor inicial, definida por f é escrita como:

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Uma solução de (2.1) é uma função diferenciável $x : I \to \mathbb{R}^N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$ com $x(t_0) = x_0$ e que satisfaz a equação $x' = f(t,x)$.

Definição 2.8.3. Uma função $f : U \to \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, é dita lipschitziana com respeito à segunda variável se existir $C > 0$ tal que

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq C||x_1 - x_2||$$

para quaisquer (t,x_1) e $(t,x_2) \in U$. A função é dita localmente lipschitziana com respeito à segunda variável se todo ponto de U possui uma vizinhança restrita à qual f é lipschitziana com respeito à segunda variável.

Exemplo 2.8.2. Em algumas situações é possível determinar explicitamente a solução de uma equação diferencial ordinária. Por exemplo, considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 4.$$

Assim, a solução ficaria

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = t + K \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{t+K}.$$

Em que K é uma constante a ser encontrada com a condição inicial. De início, sabemos que $x(0) = 4$, então

$$4 = e^{0+K} \quad \Rightarrow \quad K = \ln 4.$$

Logo, a solução da equação diferencial ordinária, com a condição inicial, é dada por

$$x = e^{t+\ln 4} = 4e^t.$$

Veremos a seguir um resultado que garante que essa solução encontrada é única, pois, como veremos a seguir, a princípio um problema de valor inicial (PVI) nem sempre possui solução única, e tal fato depende de condições sobre a função $f(t,x)$.

Para tanto, considere o PVI

$$\begin{cases} x' = 4t\sqrt{x} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Note que o PVI acima possui $x = 0$ e $x = t^4$ como soluções.

Nem sempre é possível exibir tal solução explicitamente, e assim, a ideia seria buscar outras formas de resolver a mesma, por exemplo, utilizando métodos e aproximação.

Teorema 2.13 (Teorema de Picard)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, uma aplicação contínua e localmente lipschitziana na segunda variável x, onde o par (t,x) é um elemento de U, com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui apenas uma solução em uma vizinhança do ponto (t_0,x_0).

Demonstração. Iniciemos escolhendo um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que o cilindro gerado pelo produto cartesiano $B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0)$ dos fechos das bolas de respectivos centros t_0 e x_0 e raio δ esteja contido em U.

Agora considere $M = M(\delta) = \sup ||f||$ no cilindro. Das hipóteses, temos que f é localmente lipschitziana e isso significa que existe uma constante $C = C(\delta)$ tal que

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq C||x_1 - x_2||$$

para qualquer que seja (t,x_1) e (t,x_2) no cilindro.

A ideia é tomar uma função γ no espaço métrico completo $M = C[a,b]$, formado por todas as funções contínuas $\gamma : [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma(t) \subset B_\delta(x_0)$, para todo $t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$. com a métrica da convergência uniforme, ou seja,

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{t \in [a,b]} ||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)||,$$

onde $\|\cdot\|$ é a métrica euclidiana, Para garantir que γ esteja contida na bola fechada $B_\delta(x_0)$, vamos supor que $\varepsilon < \delta$.

Nesse espaço métrico, vamos considerar um operador definido por

$$F(\gamma(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds.$$

Vejamos que o operador F está bem definido. De fato, por hipótese, f é contínua e limitada no cilindro compacto e está sendo integrada sobre um intervalo limitado, garantindo a existência da integral. Podemos notar também que se $\gamma \in M$, então $F(\gamma) \in M$.

Devemos ver que $F(\gamma(t))$ está na bola fechada de centro x_0 e raio δ, ou seja, que

$$||F(\gamma(t)) - x_0|| < \delta.$$

Temos que

$$||F(\gamma(t)) - x_0|| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, \gamma(s))||\, ds \leq M|t - t_0| \leq M\varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \leq \delta / M$, teremos que $||F(\gamma(t)) - x_0|| \leq \delta$.

Agora, basta mostrar que esse operador é uma contração. Conseguindo isso, a existência e a unicidade de solução do problema de valor inicial fica garantido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Vejamos, finalmente, que

$$||F(\gamma_1(t)) - F(\gamma_2(t))|| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s))||\, ds \leq C \int_{t_0}^{t} ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)||\, ds.$$

Como
$$||\gamma_1(s)-\gamma_2(s)|| \leq \max_{s\in[a,b]} ||\gamma_1(s)-\gamma_2(s)|| = d(\gamma_1,\gamma_2),$$
teremos
$$||F(\gamma_1(t))-F(\gamma_2(t))|| \leq C|t-t_0|d(\gamma_1,\gamma_2) \leq C\varepsilon d(\gamma_1,\gamma_2).$$

Agora, tomando $\varepsilon < 1/C$, e tomando o supremo na desigualdade, teremos finalmente que o operador F é uma contração. Para garantir um único ε, basta tomarmos
$$\varepsilon = \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{C}\right).$$
Assim, como F é contínua, é uma contração no espaço métrico X completo, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, F possui um único ponto fixo e este ponto fixo é exatamente a única solução do problema (1.8.1.

$\square$

Exemplo: Como aplicação imediata do teorema de Picard, considere o problema de valor inicial (PVI)
$$\begin{cases} x'(t) = 2t(x+1) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
É fácil verificar que $f(t,x) = 2t(x+1)$ é contínua e lipschitziana com respeito a x. Assim, de acordo com o teorema de Picard, o PVI deve apresentar uma única solução usando a iteração proposta pelo teorema do ponto fixo de Banach.

Escrevendo a equação integral equivalente a $x'(t) = 2t(x+1)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos
$$x(t) = \int_0^t 2s(x(s)+1)\,ds.$$
Começamos exatamente de $x_0(t) = 0$ e para $n \geq 1$, usamos a fórmula iterativa:
$$x_{n+1}(t) = \int_0^t 2s(x_n(s)+1)\,ds.$$
Para $x_1(t)$, obtemos:
$$x_1(t) = \int_0^t 2s\,ds = t^2.$$
Substituindo na fórmula iterativa, obtemos $x_2(t)$:
$$x_2(t) = \int_0^t 2s(s^2+1)\,ds = t^2 + \frac{t^4}{2}.$$

Continuando dessa forma, obtemos uma sequência $x_n(t)$. Observe a tabela:

n	$x_n(t)$
0	$x_0(t) = 0$
1	$x_1(t) = t^2$
2	$x_2(t) = t^2 + \frac{t^4}{2}$
3	$x_3(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!}$
4	$x_4(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!}$

Essa sequência converge para a solução da equação diferencial dada por:

$$x(t) = e^{t^2+1}$$

3 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace, nomeada em homenagem ao matemático e astrônomo francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), é, de fato, um poderoso método matemático utilizado para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Ela é especialmente útil para resolver EDOs com funções complicadas, incluindo as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

A história da Transformada de Laplace remonta ao início do século XIX, quando Laplace a desenvolveu na obra Théorie analytique des probabilités (1812), como parte de seu trabalho em probabilidade e teoria dos erros. No entanto, é importante notar que o conceito de transformadas integrais já havia sido explorado por matemáticos anteriores, como Leonhard Euler no século XVIII, e suas contribuições serviram como base para o desenvolvimento posterior da Transformada de Laplace.

Neste capitulo iremos apresentar um estudo sobre a utilização do método da Transformada de Laplace para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem. Para isso iremos começar definindo a mesma e apresentando suas principais propriedades e as utilizaremos para resolver algumas equações diferenciais. E, por fim iremos comparar tal método com métodos clássicos da resolução de equações diferenciais.

A transformada de Laplace é uma técnica matemática usada para converter uma função de domínio do tempo em uma função de domínio da frequência. A seguir iremos apresentar a definição e alguns exemplos da aplicação nas funções de f(t).

Definição 3.0.1. Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$ e com contradomínio no intervalo $[0, +\infty)$. A **Transformada de Laplace** de $f(t)$ é dada pela seguinte integral imprópria:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

para os valores de s nos quais a integral converge. A função $F(s)$ é chamada de **função de Laplace** de $f(t)$ e $\mathscr{L}\{f(t)\}$ denota a transformada de Laplace de $f(t)$.

Definição 3.0.2. Ordem Exponencial: Uma função $f(t)$ é dita ser de **ordem exponencial** α ($\alpha > 0$) se existirem constantes $M > 0$ e $c > 0$ tais que:

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1. ***Teorema (Convergência da Transformada de Laplace).*** *Se $f(t)$ for uma função de ordem exponencial α, então sua transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ converge para valores de s com parte real maior que c, ou seja, $\Re(s) > c$.*

Isso significa que a transformada de Laplace está bem definida para funções que crescem no máximo exponencialmente, garantindo a convergência da integral em uma região apropriada do plano complexo.

3.0.1 Propriedades das Transformadas de Laplace

3.0.1.1 Linearidade:

$$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)]+b\mathscr{L}[g(t)]$$

Demonstração.

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(a\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^A e^{-st}g(t)\,dt\right)$$

$$= a\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt + b\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}g(t)\,dt$$

$$= a\mathscr{L}\{f(t)\}+b\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

□

3.0.1.2 Deslocamento no tempo:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)]$$

onde $u(t-a)$ é a função degrau unitário de Heaviside.

Demonstração. Usando a definição da transformada, temos:

$$\mathscr{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt.$$

Para a função $g(t) = f(t-a)u(t-a)$, onde $u(t-a)$ é a função degrau unitário, temos:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt.$$

Como $u(t-a) = 0$ para $t < a$ e $u(t-a) = 1$ para $t \geq a$, o limite inferior da integral muda de 0 para a. Assim:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt.$$

Fazendo a substituição $\tau = t-a$, temos $t = \tau + a$ e $dt = d\tau$. Os limites da integral tornam-se:

- Quando $t = a$, $\tau = 0$;
- Quando $t = \infty$, $\tau = \infty$.

Substituindo, obtemos:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\,d\tau.$$

Separando os termos exponenciais:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-as}\,d\tau.$$

Como e^{-as} é constante em relação a τ, podemos fatorá-lo para fora da integral:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau.$$

A integral restante é a definição da transformada de Laplace de $f(t)$:

$$\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)].$$

□

3.0.1.3 Mudança na escala no domínio do tempo:

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f(t)]$$

Demonstração. A Transformada de Laplace de $f(at)$ é definida por:

$$\mathscr{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt.$$

Fazendo a substituição $u = at$, temos $du = a\,dt$, ou seja, $dt = \frac{du}{a}$. Quando $t = 0$, $u = 0$, e quando $t \to \infty$, $u \to \infty$.

Substituindo na integral, temos:

$$\mathscr{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt = \int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\frac{du}{a}.$$

Agora, podemos fatorar $\frac{1}{a}$ da integral:

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\,du.$$

Por fim, reconhecemos que a integral que aparece é a Transformada de Laplace de $f(u)$, ou seja:

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f(t)].$$

□

3.0.1.4 Derivação no domínio do tempo:

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f'(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= \left[e^{-st}\cdot f(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)dt.\end{aligned}$$

Utilizando o método de integração por partes, com $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f'(t)\right] &= \lim_{M\to\infty}\left[f(t)e^{-st}\right]_0^M - \int_0^M f(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= \lim_{M\to\infty}\left[f(M)e^{-sM} - f(0)\right] + s\int_0^M f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Como $f(t)$ é de ordem exponencial quando $t\to\infty$, temos que:

$$\lim_{M\to\infty}\left[f(M)e^{-sM}\right] = 0.$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f'(t)\right] &= 0 - F(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= s\mathscr{L}\left[f(t)\right] - F(0).\end{aligned}$$

□

A seguir, veremos a tranformada de Laplace de algumas funções usuais:

Exemplo 3.0.1. A transformada de Laplace da função $f(t) = 1$ é dada por:

Substituindo $f(t) = 1$ na integral:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt.$$

Agora, realizamos a integração:

$$F(s) = \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty.$$

Aplicando os limites da integral:

$$F(s) = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-s\cdot a}\right] - \left[\frac{-1}{s} e^{0}\right].$$

Uma vez que e^{-x} tende a zero à medida que a se aproxima do infinito, o primeiro termo se torna zero:

$$F(s) = 0 - \left[\frac{-1}{s}\right].$$

Simplificando o resultado:

$$F(s) = \frac{1}{s},$$

para qualquer $s > 0$ constante.

Exemplo 3.0.2. Agora vamos calcular a tranformada de Laplace em $f(t) = t$. Para calcular a transformada de Laplace de $f(t) = t$, usamos a integração por partes.

Começamos com a fórmula da integração por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

onde:
$u = t$ (para diferenciar);
$dv = e^{-st}\, dt$ (para integrar);
$du = dt$;
$v = \dfrac{1}{-s} e^{-st}$. Queremos calcular:

$$\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty t e^{-st}\, dt.$$

Usamos a técnica de integração por partes, com $u = t$ e $dv = e^{-st}\, dt$, resultando em $du = dt$ e $v = -\frac{1}{s} e^{-st}$. Assim, temos:

$$\int t e^{-st}\, dt = \left[-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-st}\, dt.$$

Primeira parcela da integral:

$$\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{s}e^{-st}\right) - \left(-\frac{0}{s}e^0\right).$$

Como $e^{-st} \to 0$ mais rapidamente que $t \to \infty$, o limite da primeira parcela é zero:

$$\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = 0.$$

Segunda parcela da integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt.$$

A integral $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$ é uma integral imprópria, calculada como:

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^b.$$

Substituímos os limites:

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^0\right) = \frac{1}{s}.$$

Substituímos de volta:

$$\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}.$$

Reunindo as duas parcelas, temos:

$$\mathscr{L}\{t\} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Portanto, a Transformada de Laplace de $f(t) = t$ é:

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Através do exemplo 3.0.2 podemos generalizar a transformada de Laplace aplicada em $f(t) = t^n$, ou seja, $\mathscr{L}\{t^n\}$, para $n > 0$.

Usando a fórmula da transformada de Laplace diretamente:

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt.$$

Essa integral precisa ser avaliada numericamente ou usando métodos específicos de cálculo de transformadas de Laplace. O resultado é:

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Onde $n!$ representa o fatorial de n. Portanto, a transformada de Laplace de t^n é igual a $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para $n > 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução que:

$$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $n = 1$, temos:

$$\mathscr{L}\{t^1\}(s) = \int_0^\infty t e^{-st}\, dt.$$

Já sabemos, pelo exemplo 2, que:

$$\mathscr{L}\{t^1\}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Portanto, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Suponha que a proposição seja verdadeira para $n = k$, ou seja:

$$\mathscr{L}\{t^k\}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Agora, vamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, queremos provar que:

$$\mathscr{L}\{t^{k+1}\}(s) = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

Usando a definição da Transformada de Laplace, temos:

$$\mathscr{L}\{t^{k+1}\}(s) = \int_0^\infty t^{k+1} e^{-st}\, dt.$$

Para resolver essa integral, usamos integração por partes. A fórmula de integração por partes é:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Escolhemos:

$$u = t^{k+1}, \quad dv = e^{-st}\, dt, \quad du = (k+1)t^k\, dt, \quad v = -\frac{1}{s}e^{-st}.$$

Aplicando a fórmula, temos:

$$\int_0^\infty t^{k+1} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{t^{k+1}}{s} e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty (k+1)t^k e^{-st}\, dt.$$

Avaliando o primeiro termo:

$$\left[-\frac{t^{k+1}}{s} e^{-st}\right]_0^\infty.$$

- Para $t \to \infty$, $e^{-st} \to 0$ mais rápido que qualquer potência de t, logo:

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{t^{k+1}}{s} e^{-st} = 0.$$

- Para $t = 0$, o termo t^{k+1} se anula:

$$-\frac{t^{k+1}}{s}e^{-st}\Big|_{t=0} = 0.$$

Portanto, o primeiro termo é zero.

Avaliando o segundo termo: O segundo termo é:

$$\frac{1}{s}\int_0^{\infty}(k+1)t^k e^{-st}\,dt.$$

Fatoramos $k+1$ e usamos a hipótese de indução:

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st}\,dt = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Logo:

$$\frac{1}{s}\int_0^{\infty}(k+1)t^k e^{-st}\,dt = \frac{k+1}{s}\cdot\frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)k!}{s^{k+2}}.$$

Portanto, mostramos que:

$$\mathscr{L}\{t^{k+1}\}(s) = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

Pelo princípio da indução matemática, a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

□

Exemplo 3.0.3. A transformada de Laplace da função $f(t) = e^{at}$ pode ser obtida por integração direta:

Usando a definição da transformada de Laplace para calcular $F(s)$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt.$$

Podemos combinar os expoentes e^{-st} e e^{at} usando as propriedades das potências:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt.$$

A integral $\int e^{kt}\,dt$ é resolvida como:

$$\int e^{kt}\,dt = \frac{1}{k}e^{kt}, \quad \text{para } k \neq 0.$$

Aplicando isso:

$$F(s) = \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^{\infty}.$$

Agora, avaliamos os limites da integral imprópria:

1. Para $t \to \infty$: - Quando $s > a$, temos $a - s < 0$, então $e^{(a-s)t} \to 0$ à medida que $t \to \infty$. - Quando $s \leq a$, o termo $e^{(a-s)t}$ diverge para ∞, e a integral não converge. Portanto, a Transformada de Laplace só é válida para $s > a$.

2. Para $t = 0$: - Quando substituímos $t = 0$, $e^{(a-s)t} = e^0 = 1$.

Com isso, o resultado é:

$$F(s) = \frac{1}{a-s}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a-s} \cdot 0 - \frac{1}{a-s} \cdot 1 = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a.$$

A Transformada de Laplace da função $f(t) = e^{at}$ é dada por:

$$\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{com } s > a.$$

Observação 3.0.1.

O domínio de Laplace refere-se ao intervalo de valores de s para os quais a integral imprópria converge. No caso de $f(t) = e^{at}$, o domínio de Laplace é $s > a$.

Para $s = a$, temos $s - a = 0$, o que resulta em uma divisão por zero. Matematicamente, isso não é definido, então a Transformada de Laplace não existe neste caso.

Para $s < a$, a função $e^{(a-s)t}$ diverge, tornando a integral imprópria não convergente.

Portanto, a Transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ é válida apenas para $s > a$.

Exemplo 3.0.4.

$$\mathscr{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}$$

Demonstração. Seguindo a mesma linha de demonstração das transformadas anteriores, temos:

$$\mathscr{L}\{e^{ct}\} = \int_0^\infty e^{ct}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{t(c-s)}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t(c-s)}dt$$

Resolvendo a integral:

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{t(c-s)}}{c-s}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{b(c-s)} - e^{0(c-s)}}{c-s}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{b(c-s)} - 1}{c-s}\right)$$

Para $s > c$, temos $e^{b(c-s)} \to 0$ quando $b \to \infty$, logo:

$$\frac{0-1}{c-s} = \frac{1}{s-c}$$

Portanto:

$$\mathscr{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}, \quad \text{para } s > c.$$

□

Exemplo 3.0.5. Para encontrar a transformada de Laplace de $\sin(\omega t)$, começamos com a fórmula da transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \int_0^\infty e^{-st}, dt$$

Agora, aplicamos a técnica de integração por partes, que é dada pela fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Neste caso, escolhemos:

$$u = \sin(\omega t)$$
$$dv = e^{-st}\,dt$$

Calculamos as derivadas e antiderivadas correspondentes:

$$du = \omega\cos(\omega t)\,dt$$
$$v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = -\frac{e^{-st}}{s}\sin(\omega t)\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s}\right)(\omega\cos(\omega t)\,dt)$$

Avaliamos os limites:

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right)\int_0^\infty \frac{\omega e^{-st}\cos(\omega t)}{s}\,dt$$

E simplificamos:

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(\omega t)\,dt$$

Agora, usando novamente a técnica de integração por partes na integral resultante,temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot sen(\omega t)dt &= \lim_{A\to\infty}\frac{\omega}{s}\int_0^A e^{-st}\cdot cos(\omega t)dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{\omega}{s}\left(\frac{1}{s} - \int_0^A \frac{e^{-st}}{s}\omega\cdot sen(\omega t)dt\right) \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot sen(\omega t)dt
\end{aligned}$$

com isso,

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot sen(\omega t)dt + \frac{\omega^2}{s^2}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot(\omega t)dt = \frac{\omega}{s^2},$$

ou ainda,

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot sen(\omega t)dt\left(\frac{\omega^2+s^2}{s^2}\right) = \frac{\omega}{s^2}$$

e desse modo,

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot sen(\omega t)dt = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$$

Logo,

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$$

Exemplo 3.0.6. Realizando os mesmos passos do exemplo anterior, podemos encontrar a Transformada de Laplace de $\cos(\omega t)$

Para encontrar a transformada de Laplace de $\cos(\omega t)$, começamos com a fórmula da transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t)\, dt$$

Agora, aplicamos a técnica de integração por partes, que é dada pela fórmula:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Neste caso, escolhemos:

$$u = \cos(\omega t)$$

$$dv = e^{-st}\, dt$$

Calculamos as derivadas e antiderivadas correspondentes:

$$du = \omega - sen(\omega t)\, dt$$

$$v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = -\frac{e^{-st}}{s} \cos(\omega t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s}\right) (\omega \sin(\omega t)\, dt)$$

Avaliamos os limites:

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) \int_0^\infty \frac{\omega e^{-st} \sin(\omega t)}{s}\, dt$$

E simplificamos:

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{-1}{s^2} \int_0^\infty \omega e^{-st} \sin(\omega t)\, dt$$

Agora, usando a técnica de integração por partes na integral resultante, obtemos:

$$\int_0^\infty \omega e^{-st} \sin(\omega t)\, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}$$

Calculando du e v:

$$du = \omega\, dt, \quad v = \frac{1}{s^2+\omega^2} e^{-st} \sin(\omega t).$$

A fórmula de integração por partes é dada por:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Aplicando-a, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \omega e^{-st} \cos(\omega t)\, dt &= \omega t \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} e^{-st} \sin(\omega t) - \int \frac{1}{s^2+\omega^2} e^{-st} \sin(\omega t) \cdot \omega\, dt \\ &= \frac{\omega t}{s^2+\omega^2} e^{-st} \sin(\omega t) + \int \frac{\omega}{s^2+\omega^2} e^{-st} \sin(\omega t)\, dt. \end{aligned}$$

Observamos que o segundo termo na expressão acima é igual à transformada de Laplace de $\sin(\omega t)$, que é $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$. Substituindo isso na equação, obtemos:

$$\int_0^\infty \omega e^{-st} cos(\omega t)\, dt = \frac{\omega t}{s^2+\omega^2} e^{-st} sin(\omega t) + \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Substituindo isso na equação anterior, encontramos:

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Esta é a transformada de Laplace de $cos(\omega t)$.

Exemplo 3.0.7. Vamos calcular a Transformada de Laplace da função $\frac{t^n}{n!}$ utilizando a expansão em série.

A função exponencial e^{-st} pode ser expandida em uma série de Taylor em torno de $t = 0$:

$$e^{-st} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-st)^k}{k!}$$

Ou seja, a expansão em série de e^{-st} é:

$$e^{-st} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k t^k}{k!}$$

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

No nosso caso, $f(t) = \frac{t^n}{n!}$, então temos:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{t^n}{n!}\,dt$$

Substituindo a expansão de e^{-st}:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k s^k t^k}{k!}\right)\frac{t^n}{n!}\,dt$$

Sabemos que a troca da ordem da soma e da integral pode ser justificada pelo **Teorema de Fubini**, que nos permite trocar a ordem de soma e integral quando a função envolvida é absolutamente convergente. Ou seja, a soma da série e a integral devem ser absolutamente convergentes para que a troca seja válida.

Para o caso da equação apresentada:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k s^k}{k!}\int_0^\infty t^{k+n}\,dt$$

A integral $\int_0^\infty t^{k+n}\,dt$ é uma integral de uma função do tipo t^m, e sabemos que a integral de t^m no intervalo $[0,\infty)$ é dada por:

$$\int_0^\infty t^m\,dt = \frac{1}{m+1} \quad (\text{para } m > -1)$$

Portanto, para que a troca da ordem da soma e da integral seja válida, devemos garantir que $m = k+n$ satisfaça a condição $k+n > -1$, ou seja, t^{k+n} é integrável em $[0,\infty)$ quando $k+n > -1$. Essa condição assegura que a troca da ordem da soma e da integral seja válida.

Agora, aplicando essa integral à sua expressão:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k s^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+n+1}$$

Logo, para a nossa integral, temos:

$$\int_0^\infty t^{k+n}\,dt = \frac{1}{k+n+1}$$

Substituindo esse resultado na soma:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k s^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+n+1}$$

Ao expandir a soma e manipular os termos, vemos que o resultado final é:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

3.1 Tabela de Transformadas de Laplace

Apresentamos, a seguir, uma tabela com as transformadas de Laplace mais usuais. Ela serve como referência tanto para resolver equações diferenciais, quanto para compreender melhor como funções do domínio do tempo são transformadas no domínio da frequência.

Tabela 1 – Tabela das Transformadas de Laplace

Função $f(t)$	**Transformada de Laplace** $F(s)$
Função degrau unitário 1	$\frac{1}{s}$
Função t	$\frac{1}{s^2}$
Função exponencial e^{ct}	$\frac{1}{s-c}$
Exponencial decrescente $e^{-at}u_c(t)$	$\frac{1}{s+a}$
Exponencial decrescente com deslocamento $e^{-at}u_c(t-b)$	$\frac{e^{-bs}}{s+a}$
Função pulso $p(t)$	$\int_0^\infty p(t)e^{-st}dt$
Senoidal $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cossenoidal $\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Função rampa t	$\frac{1}{s^2}$
Função exponencial $e^{at}u_c(t)$	$\frac{1}{s-a}$
Função cossenoidal amortecida $e^{-at}\cos(\omega t)u_c(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Função senoidal amortecida $e^{-at}\sin(\omega t)u_c(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Função $t^n e^{ct}$	$\frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$
Função pulso amortecido $e^{-at}p(t)u_c(t)$	$\int_0^\infty e^{-at}p(t)e^{-st}dt$

3.2 Transformada Inversa de Laplace

Ao transformar uma função do tempo para o domínio da frequência usando a Transformada de Laplace, frequentemente surge a questão: como a solução obtida se comporta no domínio do tempo? Para responder, utilizamos a Transformada Inversa de Laplace, que permite retornar do domínio da frequência $F(s)$ para o do tempo $f(t)$. Essa ferramenta é essencial para interpretar soluções de equações diferenciais e outros problemas em termos de suas variáveis originais. Embora não demonstremos aqui a existência formal da transformada inversa, ela pode ser consultada em [1].

Ela é definida formalmente como:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}(t).$$

Neste material, destacam-se métodos práticos de obtenção da Transformada Inversa de Laplace, como o uso de tabela 1.

Exemplo 3.2.1. Olhando na tabela a transformada inversa da função $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}. = t$

Abaixo segue a aplicação da Transformada de Laplace e a sua inversa para encontrarmos a solução equação diferencial no domínio do tempo t.

Exemplo 3.2.2. Encontrando a solução da seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 6, \quad y(0) = 2.$$

Solução Aplicamos a Transformada de Laplace na equação diferencial. Lembrando que:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0),$$

onde $Y(s)$ é a Transformada de Laplace de $y(t)$. Substituímos na equação:

$$sY(s) - 2 + 3Y(s) = 6.$$

Rearranjando os termos:

$$Y(s)(s+3) = 6+2,$$
$$Y(s) = \frac{8}{s+3}.$$

A solução $Y(s) = \frac{8}{s+3}$ está no domínio da frequência. Consultando a tabela 1 das transformadas, sabemos que:

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}.$$

Comparando, vemos que $Y(s)$ corresponde a $8 \cdot \frac{1}{s+3}$. Logo:

$$y(t) = 8 \cdot e^{-3t}.$$

A solução no domínio do tempo é:

$$y(t) = 8e^{-3t}.$$

Essa função descreve o comportamento de $y(t)$, que decai exponencialmente com o fator e^{-3t}, sendo influenciada pela constante inicial $y(0) = 2$.

Neste exemplo, identificamos que $\frac{8}{s+3}$ é equivalente à Transformada de $8e^{-3t}$, demonstrando a utilidade prática da tabela para determinar rapidamente a Transformada Inversa.

Exemplo 3.2.3.

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c)$$

Demonstração:

Pela definição da Transformada de Laplace, temos:

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt$$

Sabemos que:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s)$$

Portanto:

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c).$$

3.3 Teorema de Convolução

O **produto de convolução** é uma operação entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que resulta em uma terceira função, representando uma combinação das duas originais. Essa operação é amplamente utilizada na análise de sistemas lineares, especialmente no contexto da **Transformada de Laplace**.

Matematicamente, a convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida por:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\mu)g(t-\mu)d\mu$$

Essa operação tem várias propriedades importantes, como:

- **Comutatividade:**

$$f*g = g*f$$

- **Associatividade:**

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

- **Distributividade sobre a soma:**

$$f*(g+h) = f*g + f*h$$

A demonstração das propriedades acima, pode ser encontrados em 1. Agora iremos mostrar um teorema importante para a aplicação na solução da equação logística com retardo.

Teorema 3.2. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas e de crescimento exponencial no intervalo $t \geq 0$, com transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Então, a Transformada de Laplace da convolução de $f(t)$ e $g(t)$ é dada por:*

$$\mathscr{L}[f*g](s) = \mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] = F(s)G(s),$$

onde o símbolo $*$ representa a convolução.

Demonstração. Da definição, obtemos que $f*g$ é de ordem exponencial e sua Transformada de Laplace é dada por:

$$\mathscr{L}(f*g) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-u)g(u)\,du\,dt = \int\int_R e^{-st}f(t-u)g(u)\,du\,dt,$$

onde R é a região do quadrante positivo do plano $(t,u) \in \mathbb{R}^2$ compreendida entre a reta $u = 0$ e a reta $u = t$. Dada a ordem exponencial da integranda, a integral em R é absolutamente convergente. Logo, pelo Teorema de Fubini, podemos inverter a ordem de integração:

$$\mathscr{L}(f*g) = \int_0^\infty g(u)\int_u^\infty e^{-st}f(t-u)\,dt\,du.$$

Fazendo a mudança de variável $v = t-u$, temos:

$$\mathscr{L}(f*g) = \int_0^\infty g(u)\int_0^\infty e^{-s(v+u)}f(v)\,dv\,du.$$

Fatorando os termos exponenciais:

$$\mathscr{L}(f*g) = \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du\int_0^\infty e^{-sv}f(v)\,dv.$$

Observamos que as integrais correspondem às Transformadas de Laplace de g e f, respectivamente. Portanto, obtemos:

$$\mathscr{L}(f*g) = \mathscr{L}(g)\mathscr{L}(f).$$

□

3.4 Aplicação da Transformada de Laplace na Resolução de PVIs

A Transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa na solução de equações diferenciais lineares. Sua importância reside na capacidade de simplificar problemas no domínio do tempo, transformando-os em problemas algébricos no domínio da frequência. Uma de suas principais aplicações está na resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI), particularmente úteis em sistemas dinâmicos, circuitos elétricos, e modelagem de fenômenos naturais.

No exemplo a seguir, utilizamos a Transformada de Laplace para resolver um PVI, mostrando como essa técnica pode ser empregada para encontrar a solução de maneira direta e sistemática.

Exemplo 3.4.1. Considere o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{dy}{dt}+2y=4, \quad y(0)=1$$

Resolução da Equação Diferencial Usando a Transformada de Laplace

Aplicamos a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação, lembrando que:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0), \quad \mathscr{L}\{y(t)\}=Y(s), \quad \mathscr{L}\{4\}=\frac{4}{s}.$$

Substituindo, temos:

$$sY(s)-1+2Y(s)=\frac{4}{s}.$$

Agrupando os termos $Y(s)$

$$Y(s)(s+2)=\frac{4}{s}+1.$$

Logo,

$$Y(s)=\frac{4}{s(s+2)}+\frac{1}{s+2}.$$

Decompondo em Frações Parciais Para resolver a fração $\frac{4}{s(s+2)}$, utilizamos frações parciais:

$$\frac{4}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}.$$

Multiplicando ambos os lados por $s(s+2)$, temos:

$$4=A(s+2)+Bs.$$

Comparando os coeficientes, encontramos:

$$A=2, \quad B=-2.$$

Portanto:

$$\frac{4}{s(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}.$$

Substituímos de volta em $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+2}.$$

Logo:

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2}.$$

Utilizando tabelas padrão para encontrar a inversa:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}.$$

Portanto:

$$y(t) = 2 - e^{-2t}.$$

Resolução pelo Método Linear

A equação diferencial é:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4, \quad y(0) = 1.$$

O fator integrante é:

$$\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}.$$

Multiplicamos ambos os lados da equação por e^{2t}:

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 4e^{2t}.$$

O lado esquerdo pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y\right) = 4e^{2t}.$$

Integrando ambos os lados:

$$e^{2t}y = 2e^{2t} + C.$$

Logo:

$$y = 2 + Ce^{-2t}.$$

Aplicamos a condição inicial $y(0) = 1$:

$$1 = 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Portanto:

$$y(t) = 2 - e^{-2t}.$$

A solução encontrada pelos dois métodos é a mesma:

$$y(t) = 2 - e^{-2t}.$$

Isso era esperado, dado que o Teorema de Existência e Unicidade garante a unicidade da solução para problemas de valor inicial bem definidos. A Transformada de Laplace, apesar de mais algébrica, oferece uma abordagem alternativa que pode ser particularmente vantajosa para sistemas mais complexos.

Exemplo 3.4.2. Considere o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y' + 2y = \sin(2t), \quad y(0) = 1$$

Resolução da Equação Diferencial Usando a Transformada de Laplace

Aplicando a Transformada de Laplace nos dois lados da equação, obtemos:

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + 1$$

Agrupando os termos $Y(s)$, temos:

$$Y(s)(s+2) = \frac{2}{s^2+4} + 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s+2)} + \frac{1}{s+2}$$

A expressão $\frac{2}{(s^2+4)(s+2)}$ é decomposta em frações parciais:

$$\frac{2}{(s^2+4)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando ambos os lados por $(s^2+4)(s+2)$, obtemos:

$$2 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s+2)$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos os valores:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}$$

Substituindo os valores encontrados para A, B, e C em $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}}{s^2+4} + \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4} +$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4}$$

Reorganizando os termos:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4} + \frac{5}{4}\frac{1}{s+2}$$

Agora, aplicamos a Transformada Inversa de Laplace para encontrar a solução no domínio do tempo:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4} + \frac{5}{4}\frac{1}{s+2}\right)$$

Separando os termos:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}\right\}.$$

Calculando a transformada inversa de cada termo:

1. Primeiro termo:

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

Como temos que a inversa de $sin(\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Então temos que $\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+2^2}$, então $\omega = 2$ Multiplicando em cima e embaixo por 2, obtemos: $\frac{2}{\left(2(s^2+2^2)\right)}$

Daí,

$$\left\{\frac{1}{4}\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \frac{1}{4}sin(2t)$$

2. Segundo termo:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right\} = -\frac{1}{4}\cos(2t).$$

3. Terceiro termo:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{4}\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{5}{4}e^{-2t}.$$

Somando os resultados:

$$y(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}sin(2t) + \frac{5}{4}e^{-2t}.$$

Resolução Usando o Método do Fator Integrante

A equação diferencial dada é:

$$y' + 2y = \sin(2t)$$

Usamos o método do fator integrante, onde o fator integrante é:

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

Multiplicamos ambos os lados por e^{2t}:

$$e^{2t}y' + 2e^{2t}y = e^{2t}\sin(2t)$$

Reconhecemos que o lado esquerdo é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = e^{2t}\sin(2t)$$

Agora, integramos ambos os lados:

$$e^{2t}y = \int e^{2t}\sin(2t)\,dt$$

Agora, verificamos a integral:

$$I = \int e^{2t}\sin(2t)\,dt$$

Usamos integração por partes duas vezes. Definimos:

- $u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t}dt$ - $dv = \sin(2t)dt \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2t)$

Pela fórmula da integração por partes $\int udv = uv - \int vdu$:

$$I = e^{2t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right) - \int -\frac{1}{2}(2e^{2t})\cos(2t)dt$$

$$I = -\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}\int e^{2t}\cos(2t)dt$$

Agora, resolvemos $J = \int e^{2t}\cos(2t)dt$ com a mesma técnica:

- $u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t}dt$ - $dv = \cos(2t)dt \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2t)$

$$J = e^{2t}\frac{1}{2}\sin(2t) - \int \frac{1}{2}(2e^{2t})\sin(2t)dt$$

$$J = \frac{1}{2}e^{2t}\sin(2t) - \frac{1}{2}I$$

Agora, substituímos J em I:

$$I = -\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin(2t) - \frac{1}{2}I\right)$$

$$I + \frac{1}{4}I = -\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t)$$

$$\frac{5}{4}I = -\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t)$$

$$I = -\frac{1}{4}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t)$$

Agora, voltamos para:

$$e^{2t}y = -\frac{1}{4}e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t) + C$$

Dividindo por e^{2t}:

$$y = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + Ce^{-2t}$$

Aplicamos a condição inicial $y(0) = 1$:

$$1 = -\frac{1}{4}\cos(0) + \frac{1}{4}\sin(0) + Ce^{-2(0)}$$

Sabemos que $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$, então:

$$1 = -\frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(0) + C(1)$$

$$1 = -\frac{1}{4} + C$$

$$C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Portanto, a solução particular é:

$$y = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{5}{4}e^{-2t}$$

com a condição inicial $y(0) = 1$.

Como vimos antes, os dois métodos chegam à mesma solução, o que mostra que ambos os caminhos estão corretos.

3.5 Função de Heaviside

A função de Heaviside (ou função degrau) é uma função que serve para modelar sistema com descontinuidade no tempo, ou seja existe c, onde a função é descontínua. A função se comporta da seguinte maneira, para $t < c$ o valor da função é zero e para $t > c$ o valor é 1. Quando $t = c$ o argumento é nulo, seu valor assume a média dos limites laterais da função (pela esquerda e pela direita), calculados no ponto em que a abscissa vale c. No contexto de transformadas de Laplace, adotamos a versão $U(t-c)$, que é definida para $t \geq 0$. Em [1] o leitor pode aprofundar os conceitos e exemplos da função de Heaviside, aqui limitaremos a apresentar a transformada de Laplace da função .

Definição 3.5.1. Seja $U(t-c)$ uma função de Heaviside com a forma:

$$U(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t > c. \end{cases}$$

Mesmo sendo uma função descontínua, a função de Heaviside possui transformada. a seguir serão mostrado isso

Teorema 3.3. *Transformada da Função de Heaviside*

Seja:

$$U(t-c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases}$$

com $c > 0$*, então a transformada de Laplace é dada por:*

$$\mathscr{L}\{U(t-c)\} = \frac{e^{-sc}}{s}.$$

Demonstração. Utilizando a definição de transformada de Laplace, para $s > 0$, temos:

$$\mathscr{L}\{U(t-c)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} U(t-c)\, dt$$

Agora, seguindo os valores assumidos pela função de Heaviside e os intervalos determinados, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} U(t-c)\, dt = \int_0^{c} e^{-st} \cdot 0\, dt + \int_c^{+\infty} e^{-st} \cdot 1\, dt$$

Isso pode ser reescrito como:

$$= \int_0^{c} e^{-st} \cdot 0\, dt + \int_c^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

Resolvendo a integral, obtemos:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\int_0^{c} e^{-st} \cdot 0\, dt + \int_c^{b} e^{-st}\, dt \right)$$

A integral $\int_0^c e^{-st} \cdot 0\, dt$ é zero, e a integral $\int_c^b e^{-st}\, dt$ é dada por:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\int_c^{b} e^{-st}\, dt \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{e^{-sb}}{-s} - \frac{e^{-sc}}{-s} \right)$$

Como $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to +\infty$, temos:

$$= \frac{e^{-sc}}{s}$$

Portanto, o resultado final é:

$$\mathscr{L}\{U(t-c)\} = \frac{e^{-sc}}{s}$$

□

Teorema 3.4. *A Transformada de Laplace de* $g(t-c)U(t-c)$

Seja:

$$g(t-c)U(t-c)=\begin{cases}0, & 0\leq t<c,\\ g(t-c), & t\geq c,\end{cases}$$

com $c>0$*, então a transformada de Laplace é dada por:*

$$\mathscr{L}\{g(t-c)U(t-c)\}=e^{-sc}G(s).$$

Demonstração. Seguindo a definição de transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}\{g(t-c)U(t-c)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}g(t-c)U(t-c)\,dt$$

Agora, podemos reescrever a integral da seguinte maneira:

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}g(t-c)U(t-c)\,dt=e^{-sc}\int_0^{+\infty}e^{-st}g(t-c)\,dt$$

Essa integral pode ser decomposta em duas partes:

$$e^{-sc}\left(\int_0^{c}e^{-st}g(t-c)\,dt+\int_c^{+\infty}e^{-st}g(t-c)\,dt\right)$$

Para resolver a integral, utilizamos o método de substituição. Tomando $u=t-c$, então $du=dt$, temos:

$$\int_c^{+\infty}e^{-st}g(t-c)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-s(u+c)}g(u)\,du$$

Agora, substituímos a expressão na integral:

$$=e^{-sc}\int_0^{+\infty}e^{-su}g(u)\,du$$

Finalmente, obtemos:

$$=e^{-sc}\mathscr{L}\{g(u)\}=e^{-sc}G(s)$$

□

4 Equações Diferenciais com Retardo

As equações diferenciais com retardo fazem parte do grupo de equações diferenciais funcionais, que são caracterizadas pelo fato de que a variável dinâmica t depende não apenas do estado atual, mas também de estados passados. Utilizando τ como variável de atraso temporal. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais e exemplos relacionados às equações diferenciais com retardo de primeira ordem. Além disso, será abordado o uso da transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial (PVI) associado. Como aplicação prática, será discutido o modelo de crescimento populacional, que ilustra o uso das equações diferenciais com retardo.

Uma equação diferencial com retardo de primeira ordem é uma equação da forma:

$$f'(t) + f(t-\tau) = g(t),$$

onde:

- $f(t)$ é a função desconhecida;
- $f'(t)$ é sua derivada;
- τ é o parâmetro de retardo;
- $g(t)$ é uma função conhecida.

O **Problema de Valor Inicial (PVI)** associado a essa equação consiste em determinar a função $f(t)$ que satisfaz a equação diferencial, bem como uma condição inicial dada por:

$$f(t) = \phi(t), \quad \text{para} \quad t \leq 0,$$

onde $\varphi(t)$ é uma função conhecida que define o estado inicial do sistema. A condição inicial $f(t) = \varphi(t)$ para $t \leq 0$ é chamada de *função de inicialização* ou *função de retardo inicial*.

Exemplo 4.0.1. Seja a equação diferencial com retardo:

$$f'(t) + f(t-1) = t^2,$$

com $\tau = 1$ e condição inicial $f(t) = 0$ para $t \leq 0$.

Solução

Sabemos que:

- A Transformada de Laplace de $f'(t)$ é $sF(s) - f(0)$, mas como $f(0) = 0$, isso reduz para $sF(s)$.
- A Transformada de Laplace de $f(t-\tau)$ é $e^{-\tau s}F(s)$ para $\tau = 1$.

Aplicando a Transformada de Laplace na equação:

$$\mathscr{L}[f'(t)] + \mathscr{L}[f(t-1)] = \mathscr{L}[t^2].$$

Isso resulta em:

$$sF(s) + e^{-s}F(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Isolando $F(s)$:

$$F(s)(s + e^{-s}) = \frac{2}{s^3}.$$

Portanto:

$$F(s) = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4\left(1 + \left(\frac{e^{-s}}{s}\right)\right)} = \frac{2}{s^4\left(1 - \left(-\frac{e^{-s}}{s}\right)\right)}$$

Podemos expandir esta função em uma soma de potências. Assim, expandindo em série de potências a função acima:

$$\frac{2}{s^4\left(1 - \left(-\frac{e^{-s}}{s}\right)\right)} = \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \dots\right)$$

Podemos representar isso como uma soma infinita:

$$\frac{2}{s^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

Reescrevendo a transformada de Laplace:

$$L\{f(t)\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

Tomando a transformada inversa de Laplace juntamente com suas propriedades de linearidade, que nos possibilitará aplicar a inversa da transformada na soma exibida na equação. Portanto:

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(t)\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\}$$

Trabalhando na inversa desta transformada, podemos observar uma função conhecida, onde vemos que esta transformada inversa pode ser da forma $e^{-ns}F(s)$. Tome $t = n$, assim:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n e^{-ns}}{s^{(n+3)+1}}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(-1)^n e^{-ns}}{s^{(n+3)+1}}\right\}$$

Analisando a função de Heaviside no intervalo do somatório, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-ns}F(s)\right\} = \sum_{n=0}^{[t]}\frac{2(-1)^n U(t)(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

Analisando a função de Heaviside no intervalo do somatório, temos:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < n \\ 1, & \text{para } t \geq n \end{cases}$$

onde, neste caso, n varia de 0 até o inteiro menor ou igual a t. Assim, $U(t) = 1$.

Com isso, temos a solução da equação expandida em uma soma da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \frac{e^{-ns}}{(n+3)!}(t-n)^{n+3}$$

4.1 Modelo Logístico

4.1.1 Motivação

Suponha que, em uma ilha tenha sido introduzido um casal de capivaras. No primeiro ano, sem predadores naturais ou escassez de recursos, esse casal gerou oito filhotes, e a população cresceu livremente. Inicialmente, esse crescimento segue um padrão exponencial, pois há abundância de alimento e espaço, permitindo que os indivíduos se reproduzam sem restrições. No entanto, como qualquer ecossistema tem seus limites, esse crescimento acelerado não pode continuar indefinidamente.

Com o tempo, fatores como competição por alimento, abrigo e outros recursos naturais impõem restrições ao crescimento populacional. Esse fenômeno pode ser descrito matematicamente pelo *modelo logístico*, que considera a existência de um limite máximo de indivíduos que o ambiente pode suportar, conhecido como *capacidade de suporte*.

Entretanto, o modelo logístico clássico assume que a reprodução ocorre instantaneamente assim que os indivíduos nascem. No caso das capivaras, sabemos que isso não ocorre: a fêmea leva entre **10 a 12 meses** para atingir a maturidade reprodutiva, enquanto o macho demora cerca de **15 a 24 meses**. Esse intervalo de tempo entre o nascimento e a capacidade de reprodução pode ser representado matematicamente por um fator de atraso τ, levando ao que chamamos de **equação logística com retardo**. Esse refinamento do modelo permite uma descrição mais realista da dinâmica populacional, incorporando o tempo necessário para que novos indivíduos contribuam efetivamente para o crescimento da população. A seguir serão destacados a evolução histórica do crescimento populacional.

O primeiro matemático a estudar o crescimento populacional foi o economista e demográfo Thomas Robert Malthus no final do século XVIII, nesse modelo Thomas Robert Malthus acreditava que a população cresce de forma exponencial e os recursos disponíveis crescem de forma aritmética. Porém esse modelo tinha algumas limitações, pois não considerava os recursos limitados, o modelo assume que a população pode crescer indefinidamente, o que não é realista, pois os recursos naturais são finitos, Fatores ambientais: Elementos como competição por alimento, espaço e doenças não são levados em conta, e a estabilidade da população, pois muitos casos, populações atingem um equilíbrio devido a fatores reguladores naturais.

Essas limitações levaram ao desenvolvimento do **Modelo Logístico**, introduzido por Pierre-François Verhulst em 1838, que adiciona um fator de limitação ao crescimento exponencial de Malthus, Verhulst desenvolveu a *equação logística* como uma alternativa ao crescimento exponencial, incorporando a ideia de que o crescimento populacional diminui à medida que a população se aproxima da *capacidade de suporte* do ambiente, ou seja, existe uma constante K, que quando a população atinge essa constante K, ele tende a zero.

O modelo logístico clássico assume que os efeitos da limitação ambiental sobre o crescimento populacional são imediatos. No entanto, em muitos sistemas naturais, há um intervalo de tempo entre a mudança na densidade populacional e os efeitos sobre a taxa de crescimento, o que leva à necessidade de introduzir um retardo na equação. Esse retardo é crucial em ecossistemas onde a resposta populacional e a disponibilidade de recursos não são instantâneas, resultando em dinâmicas mais complexas, como oscilações populacionais.

A equação logística com retardo considera esse intervalo e oferece uma modelagem mais realista do crescimento populacional. Para resolver essa equação, usamos a transformada de Laplace e o teorema do ponto fixo para garantir a existência de uma solução branda, ou seja, contínua e diferenciável. Esses métodos ajudam a lidar com a complexidade do retardo e fornecem uma compreensão mais precisa da dinâmica populacional.

Nesta seção, iremos apresentar a evolução dos modelos de crescimento populacional, como o modelo de Malthus, o modelo logístico clássico (sem retardo) e, em seguida, discutiremos o modelo logístico com retardo, que introduz uma dinâmica mais realista ao considerar atrasos nos efeitos da limitação ambiental.

4.1.2 Modelo de Crescimento Populacional de Malthus

Matematicamente, o modelo de Malthus pode ser expresso pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

onde:

- $P(t)$ representa a população no tempo t,
- r é a taxa de crescimento populacional (natalidade menos mortalidade),
- $\frac{dP}{dt}$ é a taxa de variação da população ao longo do tempo.

A solução dessa equação é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

onde P_0 é a população inicial no tempo $t = 0$.

A seguir veremos como Verhulst incorporou a limitação de recursos no modelo de Malthus.

4.1.3 A equação logística clássica é expressa como:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \tag{4.1}$$

onde:

- $P(t)$ é a população no tempo t;
- r é a taxa de crescimento intrínseca da população;
- $\frac{dP}{dt}$ é a taxa de variação da população ao longo do tempo.
- K é a capacidade de suporte do ambiente (o tamanho máximo da população que o ambiente pode sustentar).

4.1.4 Resolução clássica da equação logística

A equação logística é separável. Reescrevemos a equação como:

$$\frac{1}{P(t)\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)}\,dP = r\,dt.$$

Simplificando o lado esquerdo usando frações parciais, obtemos:

$$\frac{1}{P(t)\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)} = \frac{1}{P(t)} + \frac{1}{K-P(t)}.$$

A equação se torna:

$$\left(\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{K-P(t)}\right)dP = r\,dt.$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int \left(\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{K-P(t)}\right)dP = \int r\,dt,$$

$$\ln|P(t)| - \ln|K-P(t)| = rt + C.$$

Simplificando, temos:

$$\ln\left(\frac{P(t)}{K-P(t)}\right) = rt + C.$$

Exponenciando ambos os lados, obtemos:

$$\frac{P(t)}{K-P(t)} = e^{rt+C} = Ae^{rt},$$

onde $A = e^C$. Isolando $P(t)$, temos:

$$P(t) = \frac{AKe^{rt}}{1+Ae^{rt}}.$$

Para determinar a constante A, usamos a condição inicial $P(0) = P_0$:

$$P(0) = \frac{AKe^{r\cdot 0}}{1+Ae^{r\cdot 0}} = \frac{AK}{1+A}.$$

Como $P(0) = P_0$, temos:

$$P_0 = \frac{AK}{1+A}.$$

Resolvendo para A, obtemos:

$$A = \frac{P_0}{K-P_0}.$$

Agora, substituímos A na expressão para $P(t)$:

$$P(t) = \frac{AKe^{rt}}{1+Ae^{rt}} = \frac{\frac{P_0}{K-P_0}Ke^{rt}}{1+\frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}}.$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{(K-P_0)+P_0e^{rt}}.$$

Voltando a escrever a expressão de forma mais compacta, temos a solução final:

$$P(t) = \frac{K}{1+e^{-rt}\left(\frac{K}{P_0}-1\right)}.$$

4.1.5 Solução através da Transformada de Laplace

Primeiro, fazemos a distributividade do lado direito da equação para facilitar a manipulação:

$$\frac{dP}{dt} = rP - \frac{rP^2}{K}.$$

Essa é uma equação diferencial de Bernoulli, mas podemos transformá-la em uma equação linear usando a substituição de variáveis.

Agora, para simplificar a equação, fazemos a substituição $u(t) = \frac{1}{P(t)}$. Para isso, calculamos a derivada de $P(t)$ em termos de $u(t)$. Como $u(t) = \frac{1}{P(t)}$, temos:

$$P(t) = \frac{1}{u(t)},$$

logo,

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}.$$

Substituímos essa expressão em [??] na equação logística original.

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = r\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{Ku}\right).$$

Agora, vamos simplificar a equação:

Multiplicamos ambos os lados da equação por u^2, o que resulta em:

$$-\frac{du}{dt} = ru\left(1-\frac{1}{Ku}\right).$$

Distribuindo o termo no lado direito, temos:

$$-\frac{du}{dt} = ru - \frac{r}{K}.$$

Agora, multiplicamos ambos os lados por -1 para simplificar:

$$\frac{du}{dt} = -ru + \frac{r}{K}.$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos:

$$\mathscr{L}\left(\frac{du}{dt}\right) = \mathscr{L}(-ru) + \mathscr{L}\left(\frac{r}{K}\right).$$

Usando a propriedade da transformada de Laplace para a derivada e a linearidade, temos:

$$s\mathscr{L}(u) - u(0) = \frac{r}{Ks} - r\mathscr{L}(u).$$

Resolvendo para $L(u)$, obtemos:

$$\mathscr{L}(u) = \frac{u(0)}{s+r} + \frac{K}{s(s+r)}.$$

Decompondo em frações parciais, temos:

$$\mathscr{L}(u) = \frac{1}{K}\frac{1}{s} - \frac{1}{K}\frac{1}{s+r} + \frac{u(0)}{s+r}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos:

$$u(t) = \frac{1}{K} - \frac{e^{rt}}{K} + u(0)e^{rt}.$$

Voltando para $P(t)$, temos:

$$P(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{K}{1 + e^{-rt}(Ku(0) - 1)}.$$

Substituindo $u(0) = \frac{1}{P_0}$, obtemos:

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)}.$$

Ambas as abordagens, a resolução direta e a utilização da transformada de Laplace, levam à mesma solução para a equação logística:

$$P(u) = \frac{K}{1 + e^{-rt}\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)}.$$

Isso confirma a validade das duas metodologias e motiva o uso da transformada de Laplace em modelos mais complexos.

4.2 Equação Logística com Retardo

A equação logística com retardo é uma extensão da equação logística clássica, onde o crescimento da população é afetado por um retardo temporal τ. A equação é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = ru(t)\left(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}\right),$$

onde:

- $u(t)$ é a população no tempo t,
- r é a taxa de crescimento,
- K é a capacidade de suporte,
- τ é o retardo temporal.

Para fins de estudo, estaremos interessados em analisar tal equação dentro do conjunto das funções contínuas definidas para $t \in I = [0, \tau]$.

4.2.0.1 Solução Branda da Equação Logística com Retardo

Aplicamos a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} = \mathscr{L}\left\{ru(t)\left(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}\right)\right\}$$

Sabemos que a Transformada de Laplace de uma derivada é:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} = s\mathscr{L}(u) - u(0).$$

Assim, a equação transformada fica:

$$s\mathscr{L}(u) - u(0) = r\mathscr{L}(u) - \frac{r}{K}\mathscr{L}\{u(t)\cdot u(t-\tau)\}.$$

Reorganizando os termos, isolamos $\mathscr{L}(u)$:

$$\mathscr{L}(u)(s-r) = u(0) - \frac{r}{K}\mathscr{L}\{u\cdot u(t-\tau)\}.$$

Portanto, a Transformada de Laplace de $u(t)$ é:

$$\mathscr{L}(u) = \frac{u(0)}{s-r} - \frac{r}{K}\frac{1}{s-r}\mathscr{L}\{u(t)\cdot u(t-\tau)\}.$$

Aplicamos a Transformada Inversa de Laplace para obter $u(t)$ no domínio do tempo. Considerando $s > r$ (para evitar crescimento exponencial ilimitado).

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-r}\right\} = e^{rt}.$$

Além disso, o produto de transformadas no domínio de s corresponde a uma convolução no domínio do tempo. Assim:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\{u(t)\cdot u(t-\tau)\}\cdot\frac{1}{s-r}\right\} = \int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Portanto, a solução no domínio do tempo é:

$$u(t) = u(0)e^{rt} - \frac{r}{K}\int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Essa é uma solução branda, agora iremos deifinir o que é uma solução branda.

Definição 4.2.1. A *solução branda* para o problema

$$\frac{du}{dt} = ru(t)\left(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}\right) \tag{4.2}$$

é uma função $u \in C(I;\mathbb{R})$ tal que satisfaz

$$u(t) = u(0)e^{rt} - \frac{r}{K}\int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\,ds.$$

A ideia de solução branda relaxa a exigência de derivadas clássicas ou mesmo de diferenciabilidade no sentido forte.

Para garantir a existência e unicidade da solução, utilizamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Definimos o operador T no espaço $C_\varphi([0,\tau],\mathbb{R})$, onde φ é uma função contínua no intervalo $[-\tau,0]$ que representa a condição inicial:

$$u(x) = \varphi(x), \quad \text{para } x \in [-\tau, 0],$$

O operador T é dado por:

$$T(u)(t) = u(0)e^{rt} - \frac{r}{K}\int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Primeiramente mostremos que $T(u) \in C_\varphi([0,\tau],\mathbb{R})$, para isso basta mostrarmo que $\|T(u)(t+h) - T(u)(t)\| \to 0$ quando $h \to 0$.

$$\begin{aligned}
T(u)(t+h) - T(u)(t) &= u(0)(e^{r(t+h)} - e^{rt}) + \int_0^{t+h} u(s)u(s-\tau)e^{r(t+h-s)}ds - \int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}ds \\
&= u(0)(e^{r(t+h)} - e^{rt}) + \int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t+h-s)}ds + \int_t^{t+h} u(s)u(s-\tau)e^{r(t+h-s)}ds \\
&- \int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}ds \\
&= u(0)(e^{r(t+h)} - e^{rt}) + \int_0^t (u(s)u(s-\tau)(e^{r(t+h-s)} - e^{r(t-s)})ds + \int_t^{t+h} u(s)u(s-\tau)e^{r(t+h-s)}ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Notemos que quando $h \to 0$, $I_1 \to 0$, e $I_3 \to 0$ pois o integrando é contínuo e portanto a sua integral existe.

Já I_2 segue diretamente do Teorema da convergência dominada que $I_2 \to 0$ quando $h \to 0$. Assim,

$$\|T(u)(t+h) - T(u)(t)\| \to 0$$

e portando $T(u)$ é contínua.

Observação 4.2.1. A condição $u(x) = \varphi(x)$ para $x \in [-\tau, 0]$ é uma restrição estrutural da função u. Isso significa que u deve coincidir com φ no intervalo $[-\tau, 0]$, garantindo a continuidade da solução no espaço considerado. Além disso, note que, como

$$s \in [0,\tau] \implies (s-\tau) \in [-\tau, 0] \implies u(s-\tau) = \varphi(s-\tau)$$

Definimos a bola B_R como:

$$B_R = \{u \in C_\varphi([0,\tau],\mathbb{R}) \mid \sup_{t\in[0,\tau]} |u(t)| \leq R\}.$$

De modo que:

$$R \geq \frac{|u(0)|e^{r\tau}}{1 - \frac{\|\varphi\|}{k}(e^{r\tau} - 1)}, \tag{4.3}$$

sujeito à condição:

$$\|\varphi\| < \frac{K}{e^{rt} - 1}. \tag{4.4}$$

Comecemos verificando que T mapeia B_R em si mesmo. Para $u \in B_R$, temos:

$$|T(u)(t)| \leq |u(0)|e^{rt} + \frac{r}{K}\int_0^t |u(s)||u(s-\tau)|e^{r(t-s)}\,ds.$$

Como $|u(s)| \leq R$ e $|u(s-\tau)| = |\varphi(s-\tau)| \leq \|\varphi\|$, temos:

$$|T(u)(t)| \leq |u(0)|e^{rt} + \frac{r}{K}R\|\varphi\| \int_0^t e^{r(t-s)}\, ds.$$

Resolvendo a integral:

$$\int_0^t e^{r(t-s)}\, ds = \frac{1}{r}(e^{rt} - 1).$$

Portanto:

$$|T(u)(t)| \leq |u(0)|e^{rt} + \frac{r}{K}R\|\varphi\| \cdot \frac{1}{r}(e^{rt} - 1).$$

Simplificando:

$$|T(u)(t)| \leq |u(0)|e^{rt} + \frac{R\|\varphi\|}{K}(e^{rt} - 1).$$

Notemos que pela escolha de R temos que $T(u) \in B_R$, pois:

$$|u(0)|e^{rt} + \frac{R\|\varphi\|}{K}(e^{rt} - 1) \leq R.$$

Isso implica que : $|T(u)(t)| \leq R$ para todo $u \in B_R$, o que assegura que T mapeia B_R em si mesmo com a norma

$$||T|| = \sup_{||u||<R} |T(u)|$$

.

Verificação da Contração

Para mostrar que o operador T é uma contração, precisamos demonstrar que existe uma constante $0 < L < 1$ tal que, para quaisquer $u, v \in B_R$, vale a desigualdade:

$$\|T(u) - T(v)\| \leq L\|u - v\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do espaço $C_\varphi([0,\tau],\mathbb{R})$, definida como:

$$\|u\| = \sup_{t\in[0,\tau]} |u(t)|.$$

Mostraremos que T é contração

O operador T é dado por:

$$T(u)(t) = u(0)e^{rt} - \frac{r}{K}\int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Portanto, para $u, v \in B_R$, temos:

$$T(u)(t) - T(v)(t) = -\frac{r}{K}\int_0^t \left(u(s)u(s-\tau) - v(s)v(s-\tau)\right)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Agora, estimamos o termo $|u(s)u(s-\tau) - v(s)v(s-\tau)|$. Usamos a identidade:

$$u(s)u(s-\tau) - v(s)v(s-\tau) = u(s)(u(s-\tau) - v(s-\tau)) + v(s-\tau)(u(s) - v(s)).$$

Portanto:

$$|u(s)u(s-\tau) - v(s)v(s-\tau)| \leq |u(s)| \cdot |u(s-\tau) - v(s-\tau)| + |v(s-\tau)| \cdot |u(s) - v(s)|.$$

Como $u, v \in B_R$, temos $|u(s)| \leq R$ e $|v(s)| \leq R$. Além disso, $|u(s-\tau)| = |\varphi(s-\tau)| \leq \|\varphi\|$ e $|v(s-\tau)| = |\varphi(s-\tau)| \leq \|\varphi\|$. Substituindo:

$$|u(s)u(s-\tau) - v(s)v(s-\tau)| \leq R \cdot |u(s-\tau) - v(s-\tau)| + \|\varphi\| \cdot |u(s) - v(s)|.$$

Substituindo a desigualdade acima em $|T(u)(t) - T(v)(t)|$, obtemos:

$$|T(u)(t) - T(v)(t)| \leq \frac{r}{K}\int_0^t \left(R \cdot |u(s-\tau) - v(s-\tau)| + \|\varphi\| \cdot |u(s) - v(s)|\right)e^{r(t-s)}\,ds.$$

Separamos a integral em duas partes:

$$|T(u)(t) - T(v)(t)| \leq \frac{r}{K}R\int_0^t |u(s-\tau) - v(s-\tau)|e^{r(t-s)}\,ds + \frac{r}{K}\|\varphi\|\int_0^t |u(s) - v(s)|e^{r(t-s)}\,ds.$$

Observamos que:

como $s - \tau \in [-\tau, 0]$, e u e v coincidem com φ nesse intervalo e $|u(s-\tau) - v(s-\tau)| = 0$, pois definimos que u e v coincidem com φ

Portanto:

$$|T(u)(t) - T(v)(t)| \leq \frac{r}{K}\|\varphi\|\|u-v\| \int_0^t e^{r(t-s)}\, ds.$$

A integral $\int_0^t e^{r(t-s)}\, ds$ é calculada como:

$$\int_0^t e^{r(t-s)}\, ds = \frac{1}{r}(e^{rt} - 1).$$

Substituindo nas desigualdades:

$$|T(u)(t) - T(v)(t)| \leq \frac{r}{K}\|\varphi\|\|u-v\| \cdot \frac{1}{r}(e^{rt} - 1) \leq \frac{r}{K}\|\varphi\|\|u-v\| \cdot \frac{1}{r}(e^{r\tau} - 1).$$

Fatorando:

$$|T(u)(t) - T(v)(t)| \leq \frac{\|\varphi\|(e^{r\tau} - 1)}{K}\|u-v\|.$$

Como $L < 1$. Aplicando a norma do supremo no lado esquerdo:

$$||T(u)(t) - T(v)(t)|| \leq \frac{\|\varphi\|(e^{r\tau} - 1)}{K}\|u-v\|$$

Portanto T é uma contração.

Daí, o teorema do ponto fixo de Banach garante a existe um único ponto fixo u, onde $T(u) = u$ da solução é dado por:

$$u(t) = T(u) = u(0)e^{rt} - \frac{r}{K}\int_0^t u(s)u(s-\tau)e^{r(t-s)}\, ds.$$

Que é a nossa solução Branda da equação logística com retardo.

Essa solução modela o impacto do retardo temporal τ na dinâmica da população, garantindo existência e unicidade sob as condições estabelecidas.

4.3 Conclusão

A equação logística com retardo é uma extensão da equação logística clássica, utilizada para modelar o crescimento populacional, considerando um atraso temporal no processo de reprodução. Neste trabalho, apresentamos uma solução branda para essa equação, utilizando o método da transformada de Laplace para sua resolução no espaço das funções contínuas.

Restringimos nossa análise a uma bola de centro a e raio R dentro desse espaço. Além disso, utilizamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrar que a solução obtida existe e é única dentro dessa restrição.

Para alcançar essa solução, foram necessárias algumas preliminares. Inicialmente, definimos e exemplificamos o conceito de equação diferencial. Em seguida, exploramos aspectos da análise funcional, essenciais para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Nesse contexto, abordamos tópicos como sequências, noções topológicas, espaços normados e espaços de Banach, citando como exemplo o espaço das funções contínuas, que é um espaço completo.

Após essa fundamentação teórica, discutimos as equações diferenciais com retardo, preparando o terreno para a apresentação do modelo logístico. Finalmente, introduzimos a equação logística com retardo e sua solução local.

No entanto, a obtenção de soluções em outros espaços funcionais exige um aprofundamento teórico e informações adicionais, o que constitui um objeto de estudo para trabalhos futuros.

Referências

1 Azevedo, M. E., *O uso da transformada de Laplace na resolução de problemas*, Trabalho de Conclusão de Curso - UNIFAP (Macapá), 2018.

2 Barros, Cícero Demétrio Vieira de et al., *O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações*, Universidade Federal da Paraíba, 2013.

3 Bazán, Aldo; Pereira, Alex Farah; de Souza Fernandez, Cecília, *Introdução aos espaços de Banach*, Editora do IMPA, 2023.

4 Seção 4: Equações Exatas - Fator Integrante. [s.l: s.n.]. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/textos/secao4.pdf>.

5 Carlos, São. *Equações Diferenciais com Retardamento*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 2003.

6 Coutinho, Renato Mendes, *Equações diferenciais com retardo em biologia de populações*, Universidade Estadual Paulista, 2010.

7 Endo, Daniela Hiromi Cavamura; de Jesus Nicola, Selma Helena; Sampaio, João Carlos Vieira; Verri, Alessandra Aparecida, *Espaços Métricos: uma introdução*.

8 Lima, Elon Lages, *Análise Real - Volume 1 - Funções de uma variável*, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

9 MATOS, M. *Séries & Equações Diferenciais*. Disponível em: <http://www.mreferenciapmatos.com.br/Serie_EDO/SerieEDO_2024.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2025.

10 Silva, M. A., *Transformada de Laplace: conceitos e aplicações*, Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto Federal da Paraíba, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/2170>. Acesso em: 03 nov. 2023.

11 Stewart, J. *Cálculo - Volume 2, 7ª Edição*. [s.l.: s.n.].

12 Wanderson, J.; De Sousa, L., *Instituto Federal da Paraíba - Curso de Especialização em Matemática*, [s.l: s.n.], 2025. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/bitstream/

177683/1777/1/O%20uso%20de%20S%C3%A9ries%20de%20Pot%C3%AAncias%20na%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20Diferenciais%20Ordin%C3%A1rias%20de%202%C2%AA%20ordem.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2025.