



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Mateus Gomes da Silva

**Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais: A
Equação do Calor e a Equação de Laplace**

Recife - PE
Fevereiro de 2025

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais: A Equação do Calor e a Equação de Laplace

Trabalho de conclusão de curso submetido
à Coordenação do Curso de licenciatura em
Matemática da Universidade Federal Rural
de Pernambuco, como parte dos requisitos
para a obtenção do grau de licenciado em ma-
temática.

**Orientadora: Prof^a. Dr^a. Yane Lísley
Ramos Araújo**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586s Silva, Mateus Gomes da.
Séries de Fourier e equações diferenciais
parciais: a equação do calor e a equação de Laplace
/ Mateus Gomes da Silva. – Recife, 2025.
152 f.; il.

Orientador(a): Yane Lísley Ramos Araújo.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Séries de Fourier. 2. Equações diferenciais
parciais. 3. Equação de calor. 4.
Equações diferenciais elípticas 5. Análise
matemática. I. Araújo, Yane Lísley Ramos, orient. II.
Título

CDD 510

Mateus Gomes da Silva

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais: A Equação do Calor e a Equação de Laplace

Trabalho de conclusão de curso submetido
à Coordenação do Curso de licenciatura em
Matemática da Universidade Federal Rural
de Pernambuco, como parte dos requisitos
para a obtenção do grau de licenciado em ma-
temática.

Aprovado em: 14/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Yane Lísley Ramos Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Recife - PE
Fevereiro de 2025

Dedico este trabalho aos meus pais que tanto fizeram e fazem por mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família. Em especial, aos meus pais, Nilson Gomes e Maria Edvânia, por todo o apoio e incentivo ao longo de todos esses anos, sem eles com certeza seria mais difícil. As minhas irmãs, Vanessa Maria e Valessa Maria e ao meu irmão Lucas Gomes por não me atrapalharem nos momentos estressantes de estudo. Aos meus avós, Severino e Josefa e ao meu tio Josimar por sempre acreditarem em mim.

A Bruna Neipp, meu amor, sou grato pelo apoio ao longo de todo esse tempo. Agradeço por não me deixar desistir nos momentos mais difíceis, por me ajudar e me incentivar nos estudos, por acreditar mais em mim do que eu mesmo. Eu sou extremamente grato por tanto amor e por ser capaz de compartilhar esse momento com você.

A minha orientadora, Prof. Dr^a. Yane Araújo, por toda paciência, dedicação, incentivo e conselhos ao longo dos trabalhos e por sempre fazer com que eu prestasse mais atenção a pequenos detalhes nas demonstrações. Agradeço também por todos os ensinamentos matemáticos durante as disciplinas da graduação.

A todos os professores do departamento de matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) que contribuíram de alguma forma ao longo da minha formação. Em especial, ao Prof. Dr. Gilson Mamede que me introduziu no caminho da iniciação científica, ao Prof. Dr. Thiago Dias pelos ensinamentos acadêmicos e conselhos, aos Prof. Dr. Jorge Hinojosa e Prof. Dr. Rodrigo Clemente pelas orientações da monitoria. Além disso, agradeço ao Prof. Dr. Ross Nascimento por me mostrar como lidar com os desafios do ensinar matemática.

Aos meus colegas e amigos do curso que contribuíram na minha jornada acadêmica. Em especial, Natanael Oliveira e Alexandre Santana pelo apoio e parceria no início do curso e a Valdênis Martins, por tirar minhas dúvidas nessa reta final do curso, até porque entrar é fácil, difícil é sair.

Aos Prof. Dr. Gilson Mamede e Prof. Dr. José Carlos, por apesar do trabalho ser

extenso e o prazo curto, aceitaram o convite para compor a banca examinadora.

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia no Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo apoio financeiro durante os estudos de iniciação científica que resultaram nesse trabalho de conclusão do curso.

Resumo

Neste trabalho nosso objetivo principal é estudarmos a existência e a unicidade de solução para problemas envolvendo a equação do calor e a equação de Laplace. Para isso, inicialmente, exibimos alguns conceitos preliminares relacionados a propriedades especiais das funções, sequências e séries de funções, a classe das funções que utilizamos ao longo do trabalho e alguns resultados de cálculo avançado. Em seguida, apresentamos conceitos básicos relacionados a teoria das equações diferenciais parciais. Posteriormente, abordamos um estudo detalhado das séries de Fourier, fundamentais na obtenção de solução dos problemas citados. Por fim, asseguramos sob certas condições a existência de solução para os problemas em estudo e, fazendo uso do princípio do máximo, garantimos a unicidade desta solução.

Palavras-Chave: Séries de Fourier; Equações diferenciais parciais; Equação do calor; Equação de Laplace.

Abstract

In this work, our main objective is to study the existence and uniqueness of solutions for problems involving the heat equation and Laplace's equation. To this end, we begin by presenting some preliminary concepts related to special properties of functions, sequences and series of functions, the class of functions used throughout the work and some results from advanced calculus. Next, we introduce basic concepts related to the theory of partial differential equations. Subsequently, we provide a detailed study of Fourier series, which are fundamental for obtaining solutions to the aforementioned problems. Finally, under certain conditions, we ensure the existence of solutions for the problems under study and, by applying the maximum principle, we guarantee the uniqueness of these solutions.

KeyWords: Fourier series; Partial differential equations; Heat equation; Laplace's equation.

Notações

- $f(x^+)$ denota o limite de $f(t)$ quando t tende a x pela direita;
- $f(x^-)$ denota o limite de $f(t)$ quando t tende a x pela esquerda;
- $C_{per}(2L)$ denota o conjunto das funções reais contínuas e periódicas de período $2L$;
- $SC([a, b])$ denota o conjunto das funções reais seccionalmente contínuas em $[a, b]$;
- $SC_{per}(2L)$ denota o conjunto das funções reais seccionalmente contínuas e periódicas de período $2L$;
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de u em relação a variável x_i ;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota a derivada de segunda ordem em relação à mesma variável x_i ;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ denota a derivada de segunda ordem em relação às variáveis diferentes, ao derivarmos primeiro em relação a x_i e depois a x_j ;
- $B(x_0, r)$ denota a bola aberta de centro x_0 e raio r ;
- $\overline{A}$ denota o conjunto de todos os pontos aderentes a A ;
- ∂A denota todos os pontos de fronteira de A ;
- Δu denota o Laplaciano de u ;
- $C^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, k vezes continuamente diferenciáveis;
- $\mathcal{L}^1$ denota o conjunto das funções integráveis e absolutamente integráveis a Riemann;
- $\mathcal{L}^2$ denota o conjunto das funções quadrado integráveis a Riemann.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico da função ψ no intervalo $[-L, L]$	78
4.1	Barra de comprimento L	90
4.2	Barra colocada sobre o eixo x	90
4.3	Retângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12}$	106
5.1	Um caso particular do problema de Dirichlet em um retângulo	128
5.2	O problema de Dirichlet cujo interior é um disco unitário	137
5.3	Se $u(\eta) < M = u(\xi)$, então existe uma vizinhança V de η com $u < M$. . .	149

Sumário

Introdução	13
1 Conceitos e Resultados Auxiliares	15
1.1 Propriedades Especiais das Funções	15
1.1.1 Funções Periódicas	15
1.1.2 Funções Pares e Ímpares	17
1.1.3 Funções Seccionalmente Contínuas e Funções Seccionalmente Dife- renciáveis	18
1.1.4 Extensão de Funções Reais	20
1.2 Sequências e Séries de Funções	20
1.3 Classe das Funções Consideradas e Suas Propriedades	25
1.4 Tópicos de Cálculo Avançado	30
1.4.1 Derivação Sobre Sinal da Integral	30
1.4.2 Teoremas Auxiliares	31
2 Equações Diferenciais Parciais	33
2.1 Classificação	34
2.2 Linearidade e Superposição	35
2.3 Condições de Contorno e Iniciais	38
2.4 Equações Semilineares de Segunda Ordem	41
3 Séries de Fourier	45
3.1 Séries de Fourier	45
3.1.1 Convergência Pontual das Séries de Fourier	54
3.1.2 Estimativa dos Coeficientes de Fourier	63
3.1.3 Desigualdade de Bessel	66

3.1.4	Forma Complexa da Série de Fourier	70
3.1.5	Convergência Uniforme da Série de Fourier	75
3.1.6	Unicidade da Série de Fourier	81
4	Equação do Calor	89
4.1	Dedução da Equação do Calor	89
4.2	O Problema da Condução do Calor Com Condições de Fronteira Homogênea	95
4.3	O Problema da Condução do Calor Com Outras Condições de Fronteira . .	114
5	Equação de Laplace	126
5.1	O Problema de Dirichlet no Retângulo	127
5.2	O Problema de Dirichlet no Disco Unitário	137
5.3	Princípio do Máximo Para Funções Harmônicas	148
	Referências Bibliográficas	152

Introdução

A origem das equações diferenciais parciais (EDPs) está intimamente ligada ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral no século XVII, este por sua vez, foi motivado por sua aplicação à mecânica das partículas. O fato do cálculo diferencial possibilitar a representação de fenômenos reais por meio de equações diferenciais, serviu de grande motivação para os estudiosos do século XVIII a buscarem modelos de problemas físicos que possam ser expressados por meio destas equações.

Consequentemente, com as equações resultantes, surgiram as equações diferenciais parciais, essencialmente caracterizadas pela presença de derivadas parciais em relação a várias variáveis de uma função. Tais equações se tornaram ferramentas poderosas, pois permitiram a modelagem de diversos fenômenos da natureza.

Entretanto, as dificuldades matemáticas apresentadas na resolução das EDPs proporcionou o desenvolvimento de diferentes métodos de obtenção de solução. Em particular, destacamos o método de Fourier, o qual se fundamenta na chamada Análise de Fourier, cuja questão central desta teoria é expressar funções como uma série de senos e/ou cossenos.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo compreender a teoria de séries de Fourier bem como a sua aplicabilidade na teoria das EDPs, a fim de garantir a existência e unicidade de solução para dois problemas que envolvem equações diferenciais parciais, a saber: a equação do calor e a equação de Laplace. Para isto, no primeiro capítulo apresentamos noções básicas e resultados auxiliares envolvendo as propriedades especiais das funções, as sequências e séries de funções, a classe das funções que utilizamos ao longo do trabalho e alguns teoremas do cálculo avançado que serão necessários nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo temos como foco introduzir a teoria das EDPs, abordando seus conceitos iniciais, as principais classificações e as condições de contorno e condições

iniciais de um problema. Em seguida, no terceiro capítulo apresentamos a teoria das séries de Fourier com enfoque nas condições para expressar uma função como uma série de senos e/ou cossenos e sob quais condições podemos garantir a convergência dessas séries.

Posteriormente, no quarto capítulo, estamos interessados em estudar com detalhes a propagação de calor em uma barra, cuja dinâmica pode ser modelada por uma EDP conhecida, denominada como equação do calor. Partimos da dedução dessa equação e em seguida determinamos, para certos problemas, a existência de solução a partir do método de separação de variáveis e das séries de Fourier e, por meio do princípio do máximo, garantimos a unicidade desta solução.

Por fim, no quinto capítulo, temos como objetivo estudar problemas que envolvem a equação de Laplace. Desse modo, iniciamos com uma motivação para o estudo dessa equação e, em seguida, utilizando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier mostramos a existência da solução para o problema de Dirichlet em um retângulo e o problema de Dirichlet em um disco unitário, e empregando o princípio do máximo para funções harmônicas garantimos a unicidade desta solução.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Auxiliares

Nosso trabalho está relacionado com o estudo de existência e unicidade de solução para problemas que envolvem equações diferenciais parciais, em particular, a equação do calor e a equação de Laplace. Para isso precisamos desenvolver os principais conceitos e resultados auxiliares necessários para a compreensão dos capítulos subsequentes. Desta forma, dividimos este capítulo em quatro partes: inicialmente apresentaremos propriedades das funções, especialmente a periodicidade, a paridade, a continuidade por partes e as extensões de funções. Em seguida, abordaremos as sequências e séries de funções, com ênfase na convergência uniforme das séries, logo após veremos a classe das funções que utilizaremos ao longo do trabalho e, por fim, exibiremos resultados importantes do cálculo avançado.

1.1 Propriedades Especiais das Funções

1.1.1 Funções Periódicas

Ao trabalharmos com as séries de Fourier de uma determinada função, estamos trabalhando com uma soma infinita de funções periódicas, ou seja, funções cujo comportamento se repete em intervalos regulares. Portanto, o objetivo desta seção consiste em apresentar a definição, exemplos e algumas das propriedades das funções periódicas. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [2].

Definição 1.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Seja f uma função. Então, para todo x no domínio temos $f(x+0) = f(x)$, ou seja, $T = 0$ é período de qualquer que seja a função f .

Entretanto, não estamos interessados nos casos em que o período é nulo. Desse modo, sempre que nos referimos ao período de uma função estamos considerando ele diferente de zero.

Então, vejamos exemplos de funções bem conhecidas que são periódicas.

Exemplo 1.3. As funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são periódicas de período $T = 2\pi$.

Proposição 1.4. Se f é uma função periódica de período T , então $-T$ também é um período de f .

Proposição 1.5. Se T é um período para a função f , então $2T$ também é um período. Em geral, se T é um período para a função f , então kT também é um período, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Desse modo, uma função periódica possui diversos períodos, dentre eles destacamos o menor período positivo e definimos da seguinte forma.

Definição 1.6. O menor período positivo é chamado de período fundamental.

Observação 1.7. Deste ponto em diante, utilizaremos apenas a expressão período para indicar o período fundamental, ou seja, quando falamos que $T = 2\pi$ é o período da função $\sin(x)$ estamos nos referindo ao período fundamental.

Exemplo 1.8. O período T da função $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e da função $g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é $T = \frac{2L}{n}$.

O resultado a seguir é fundamental ao longo do trabalho, pois facilita o cálculo de integrais cujo integrando é uma função periódica.

Proposição 1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica com período T . Suponha que f é integrável em qualquer intervalo finito. Então, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

1.1.2 Funções Pares e Ímpares

A paridade de uma função é um conceito que está relacionado a simetria das funções e é fundamental no estudo das séries de Fourier de uma determinada função, pois permite a simplificação da mesma. Dito isto, esta seção tem o intuito de definir as funções pares e ímpares, apresentar exemplos e algumas de suas propriedades. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [2].

Definição 1.10. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo 1.11. A função $f(x) = \cos(x)$ é uma função par e, em geral, $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função par.

Definição 1.12. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo das abscissas.

Exemplo 1.13. A função $f(x) = \sin(x)$ é uma função ímpar e, em geral, $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função ímpar.

Ao longo do trabalho estaremos realizando operações matemáticas com funções pares e ímpares. Desse modo, se faz necessário entender como elas se relacionam e isto é o que a próxima proposição nos diz.

Proposição 1.14. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares e $h, p : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares. Então, temos as seguintes propriedades:*

- (i) $f + g$ é uma função par e $h + p$ é uma função ímpar. Isto é, a soma de duas funções pares é uma função par enquanto a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- (ii) fg e hp são funções pares. Em outras palavras, o produto de duas funções pares e o produto de duas funções ímpares é uma função par;
- (iii) fh é uma função ímpar, ou seja, o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Além disso, a paridade de uma função também está atrelada aos cálculos envolvendo derivadas e integrais, como podemos ver nos resultados seguintes.

Proposição 1.15. *A derivada de uma função ímpar é uma função par. Enquanto a derivada de uma função par é uma função ímpar.*

Proposição 1.16. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado. Então,*

(i) *Se f é uma função par, então obtemos*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) *Se f é uma função ímpar, então temos*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

1.1.3 Funções Seccionalmente Contínuas e Funções Seccionalmente Diferenciáveis

Em geral, temos familiaridade com o estudo das funções contínuas. Entretanto, neste trabalho estamos interessados em uma noção mais fraca de continuidade para funções. Para isto, é essencial entender os tipos de descontinuidade de uma função, a saber:

Definição 1.17. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de primeira espécie no ponto $x \in \mathbb{R}$ se os limites laterais existem e são distintos.

Definição 1.18. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de segunda espécie no ponto $x \in \mathbb{R}$ se pelo menos um dos limites laterais é $\pm\infty$.

Dessa forma, podemos definir um sentido mais fraco de continuidade, em particular, a continuidade por partes.

Definição 1.19. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua e denotaremos por $f \in SC(\mathbb{R})$ se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, \dots, n-1$, e existem os limites $f(a^+)$ e $f(a^-)$.

Exemplo 1.20. Toda função contínua é seccionalmente contínua.

Definição 1.21. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Observação 1.22. É importante ressaltar que f' não está definida nos pontos de descontinuidade de f . E mais, f' pode não existir, mesmo em pontos em que f é contínua.

Vejamos alguns exemplos para mostrar a existência de funções que não são seccionalmente contínuas, funções que são seccionalmente contínuas, mas não são seccionalmente diferenciáveis e funções que são seccionalmente diferenciáveis.

Exemplo 1.23. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é seccionalmente contínua. Apesar de ter um único ponto de descontinuidade em $x = 0$, tal descontinuidade é de segunda espécie, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Exemplo 1.24. A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{e periódica de período } 2, \end{cases}$$

é seccionalmente contínua, mas não é seccionalmente diferenciável. De fato, f é uma função contínua e, portanto, é seccionalmente contínua. Entretanto, a sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{e periódica de período } 2, \end{cases}$$

possui descontinuidades de segunda espécie. Pois, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$. Logo, f' não é seccionalmente contínua, ou seja, f não é seccionalmente diferenciável.

Exemplo 1.25. A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \text{e periódica de período } 2\pi, \end{cases}$$

é seccionalmente diferenciável. Uma vez que no intervalo $[-\pi, \pi)$ a função é descontínua apenas em $x = 0$, cujo os limites laterais são $\lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, ou seja, temos uma descontinuidade de primeira espécie que se repete periodicamente, portanto, a função é seccionalmente contínua. Além disso, sua derivada f' é uma função constante e consequentemente é uma função contínua, logo f' é seccionalmente diferenciável.

1.1.4 Extensão de Funções Reais

Em diversos momentos ao longo do trabalho precisaremos estender funções definidas em intervalos limitados para toda a reta. Desse modo, esta seção tem como objetivo apresentar os resultados que utilizaremos na realização dessas extensões. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [3].

Proposição 1.26. *Seja $f \in C([0, L])$ e suponha que $f(0) = 0 = f(L)$. Então, a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x - 2kL) & \text{se } 2kL \leq x \leq (2k + 1)L, k \in \mathbb{Z}, \\ -f(-x + 2kL) & \text{se } (2k - 1)L < x < 2kL, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.1)$$

é a extensão ímpar e periódica de período $2L$ de f e está em $C(\mathbb{R})$. Além disso, $f \in C^1([0, L])$, $F \in C^1(\mathbb{R})$ e F' é a extensão par e periódica de período $2L$ de $f' \in C([0, L])$.

Proposição 1.27. *Seja $f' \in C([0, L])$. Então, a função F' definida por*

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x - 2kL) & \text{se } 2kL \leq x \leq (2k + 1)L, k \in \mathbb{Z}, \\ f'(-x + 2kL) & \text{se } (2k - 1)L < x < 2kL, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.2)$$

é a extensão par e periódica de período $2L$ da função f' e é contínua na reta toda. Além disso, se $f' \in C^1([0, L])$, então $F'' \in C^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, $f''(0) = 0 = f''(L)$. Nesse caso, F'' é a extensão ímpar e periódica de período $2L$ da função $f'' \in C([0, L])$.

1.2 Sequências e Séries de Funções

Em muitos problemas da matemática e de suas aplicações buscamos funções que satisfazem certas condições dadas, como por exemplo, nos problemas que envolvem equações diferenciais. Nestes casos, constantemente obtemos uma sequência de funções que aproximadamente satisfaz as condições, e então é de se esperar que seu limite seja a solução para o problema. Estamos interessados no estudo da convergência das sequências de funções, uma vez que o estudo de convergência das séries está relacionado com a sequência de suas reduzidas ou somas parciais.

As séries de Fourier são um caso particular de séries de funções e especialmente estamos interessados no estudo de sua convergência. Entretanto, diferentemente das sequên-

cias e séries de números reais, para as funções temos mais de uma noção de limite. Sendo assim, o objetivo desta seção consiste em apresentar os conceitos de convergência pontual e convergência uniforme. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [7].

Definição 1.28. Seja X um conjunto de números reais. Dizemos que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções quando associa a cada número $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.

Definição 1.29. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge pontualmente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando dado $\varepsilon > 0$, podemos obter para cada $x \in X$, um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e x , tal que $n > n_0$ implica em $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Em outras palavras, para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para o número $f(x)$. Isto é, para todo $x \in X$ fixado, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ e nesse caso dizemos que f_n converge pontualmente para f em X , ou $f_n \rightarrow f$ pontualmente, em X .

Definição 1.30. Dizemos que a sequência $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $n > n_0$ implique em $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$. Ou seja, quando for possível obter para todo $\varepsilon > 0$ um n_0 que independa de x , dizemos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X .

Observação 1.31. Se for possível exibir um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um $n > n_0$ e $x \in X$ tais que $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ diremos que f_n não converge uniformemente para f em X .

Observação 1.32. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X , então $f_n \rightarrow f$ pontualmente em X . Entretanto, a recíproca é falsa.

Para entender melhor, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.33. Seja a sequência de funções $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \cos(nx)$. Daí, note que tomando $x = \pi$ obtemos $f_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ que é uma sequência de números reais divergente. Portanto, a sequência de funções f_n não converge pontualmente para alguma função.

Exemplo 1.34. Sejam a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$.

Então, para $x = 1$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$. Por outro lado, para cada $x \in [0, 1)$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = 0$, ou seja, $f_n \rightarrow f$ pontualmente em $[0, 1]$.

Além disso, fixado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, afirmamos que seja qual for o $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$, ou seja, $x^{n_0} \geq \frac{1}{2}$. De fato, note que $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1$, isso implica que $x^{n_0} > \frac{1}{2}$. Portanto, f_n não converge uniformemente para a função f .

Exemplo 1.35. Dado o conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Sejam (a_n) uma sequência de números reais com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Daí, considere a sequência de funções, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = a_n g(x)$ para todo $x \in X$ e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ag(x)$. Então, para cada $x \in X$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n g(x)] = ag(x) = f(x)$, ou seja, a sequência de funções $f_n \rightarrow f$ pontualmente, em X .

Em particular, no caso trivial de $g \equiv 1$, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, obtemos a partir de um certo n_0 , que todos os a_n são iguais a a . Ou seja, esta convergência é uniforme, pois todas as funções f_n coincidem com f para $n > n_0$.

Assim como ocorre com as sequências de números reais, em sequências de funções também temos as chamadas sequências de Cauchy.

Definição 1.36. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma sequência de Cauchy quando, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ impliquem em $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Exemplo 1.37. A sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{x}{2n}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, existem $m > n > n_0$ tal que para todo $x \in [0, 1]$ temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left| \frac{x}{2m} - \frac{x}{2n} \right| \leq \left| \frac{x}{2m} \right| + \left| \frac{x}{2n} \right| \leq \frac{x}{2n} + \frac{x}{2n} = \frac{x}{n} < \varepsilon.$$

Sendo esta convergência garantida pelo Exemplo 1.35. Portanto, a sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{2n}$ é de Cauchy.

Teorema 1.38 (Critério de Cauchy para Convergência Uniforme). *Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Como consequência direta do critério de Cauchy obtemos o teste M. de Weierstrass, resultado fundamental na convergência das séries de funções ao longo do trabalho. Entretanto, antes de prosseguir precisamos entender o conceito de séries.

Definição 1.39. A soma $f = \sum f_n$ de uma série é um caso particular de um limite de sequência. Desse modo, admitindo que as f_n e a f estão definidas no mesmo conjunto X , segue que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, sendo $s_n = f_1 + \dots + f_n$ a sequência de suas reduzidas, também chamada de soma parcial da série.

Reciprocamente, todo limite $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$ de uma sequência de funções $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ também pode ser obtido como soma de uma série. Para isto, basta tomarmos $f_1 = \phi_1$, $f_2 = \phi_2 - \phi_1$, ..., então temos $f_1 + \dots + f_n = \phi_n$ de modo que $\sum f_n = \phi$.

Portanto, faz sentido dizer que a série $\sum f_n$ converge pontualmente ou uniformemente em X . Vejamos agora como definimos estas convergências e alguns exemplos.

Definição 1.40. Sejam $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ e uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Diremos que a série de funções converge pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ converge. Em outras palavras, dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N dependendo de ε e de x_0 , tal que para todo $m > n \geq N$

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Definição 1.41. Sejam $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ e uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Diremos que a série de funções converge uniformemente se, dado $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N dependendo apenas de ε , tal que para todo $m > n \geq N$

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.42. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, sendo $u_1(x) = x$ e $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$ se $n > 1$, é uma função definida em $[0, 1]$. Perceba que a sequência das reduzidas de ordem n , dada por $U_n(x) = x^n$, converge para 0 se $0 \leq x < 1$ e para 1 se $x = 1$. Logo, a série converge pontualmente.

Por outro lado, suponha por contradição que a série converge uniformemente. Então, dados $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e N inteiro, tomamos $x = (2\varepsilon)^{1/N-1}$ em $\sum_{j=N}^m u_j(x) = x^m - x^{N-1}$

e como $|x^n - x^{n-1}| = |(2\varepsilon)^{m/N-1} - 2\varepsilon|$. Assim, como a sequência de números reais $((2\varepsilon)^{m/N-1})$ é monótona e limitada e, portanto convergente, obtemos $(2\varepsilon)^{m/N-1} < \varepsilon$ para m suficientemente grande. Logo, para $x = (2\varepsilon)^{1/N-1}$ temos

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \geq |(2\varepsilon)^{m/N-1} - 2\varepsilon| = 2\varepsilon - (2\varepsilon)^{m/N-1} > 2\varepsilon - \varepsilon > \varepsilon.$$

O que é um absurdo, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ não converge uniformemente.

Exemplo 1.43. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n(x) = \frac{x}{n^2}$ definida em $[0, 1]$. Note que dado $x \in [0, 1]$, para todo $\varepsilon > 0$ podemos determinar um inteiro N independente de x e dependente apenas de ε , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente, uma vez que a série do lado direito é uma p-série com $p > 1$.

Este exemplo nos leva a pensar de que modo podemos comparar séries de funções com as séries de números reais e é justamente este o objetivo do próximo teorema. Uma vez que ao longo do trabalho estaremos lidando com série de funções, muitas vezes se faz necessário garantir a sua convergência uniforme e, com isso, comparar com séries de números reais se torna essencial.

Teorema 1.44 (Teste M. de Weierstrass). *Sejam $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$ e uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in I$ e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em X .*

Exemplo 1.45. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, pois $\frac{1}{n^2} > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Logo, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniforme e absolutamente em $\mathbb{R}$.

Estamos interessados em garantir a convergência uniforme de séries, pois elas possuem excelentes propriedades. Dessa forma, enunciaremos a seguir aquelas que serão fundamentais posteriormente.

Proposição 1.46. *Suponha que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então, a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 1.47. *Suponha que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo X sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponha ainda que, para um dado $x_0 \in X$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja. Então,*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Proposição 1.48. *Suponha que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então,*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

1.3 Classe das Funções Consideradas e Suas Propriedades

Posteriormente, para definir os coeficientes de Fourier, e por sua vez determinar a série de Fourier de uma função f , será necessário considerar algumas hipóteses iniciais sobre a função. Então, nesta seção, introduziremos a classe das funções considerada, ou seja, as funções que utilizaremos ao longo do trabalho e apresentaremos suas propriedades e os principais resultados relacionados. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [2].

A integral que trabalhamos é a integral de Riemman. Então, consideramos funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um intervalo limitado $[a, b]$, e desse modo, temos dois casos a considerar:

- (i) Se a função f é limitada, então será integrável se o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores forem iguais, ou seja, qualquer que seja P partição de $[a, b]$ e para todo $\varepsilon > 0$ temos $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
- (ii) Se a função f não é limitada, então temos uma integral imprópria e a função f será

integrável se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos $I_1, \dots, I_n$, com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que para todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e os limites abaixo existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{\delta, \delta' \rightarrow 0} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx.$$

Portanto, a integral imprópria de f é:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx.$$

Definição 1.49. A função f será absolutamente integrável se o valor absoluto de $|f|$ for integrável.

Entretanto, existem funções não integráveis f tais que $|f|$ é integrável, assim como existem funções f integráveis tais que $|f|$ não é integrável, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.50. Funções contínuas, e mais geralmente, funções seccionalmente contínuas no intervalo $[a, b]$ são limitadas e integráveis. Além disso, se f for integrável e limitada, então f será absolutamente integrável. Entretanto, a recíproca não é verdade, uma vez que a função de Dirichlet definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

É limitada, mas não é integrável em $[0, 1]$. Para ver isto, suponha por contradição, que f seja integrável. Então, por f ser limitada estamos no item (i), ou seja, dado $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, existe uma partição $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f, P) - s(f, P) < \frac{b-a}{2}.$$

Daí, note que dado qualquer intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, sempre vai existir números racionais e irracionais em $[x_{i-1}, x_i]$, pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Logo, em qualquer

intervalo fechado o valor máximo e mínimo de f são respectivamente 1 e -1 . Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) &< \frac{b-a}{2} \\ \sum_{i=1}^n (1 - (-1))(x_i - x_{i-1}) &< \frac{b-a}{2} \\ 2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) &< \frac{b-a}{2} \\ 2(b-a) &< \frac{b-a}{2}.\end{aligned}$$

O que é um absurdo, e portanto, f não é integrável à Riemman. Por outro lado, a função de Dirichlet é integrável em valor absoluto, pois neste caso $|f| \equiv 1$, ou seja, é uma função integrável.

Exemplo 1.51. Se f não for limitada, então a integrabilidade de f não garante a sua integrabilidade absoluta. Por exemplo, considere $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (-1)^n n$, para $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. Esta função é integrável e não limitada, mas não é absolutamente integrável. De fato, pela definição de integral imprópria do item (ii) em f obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \sum_{n=1}^k \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \sum_{n=1}^k \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (-1)^n n dx \\ &= \sum_{n=1}^k (-1)^n n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dx \\ &= \sum_{n=1}^k (-1)^n n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

Logo, a série converge, pois é a série alternada harmônica e consequentemente f é integrável. Por outro lado, note que a integral imprópria de $|f|$ é:

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_{n=1}^k \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|dx = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1}.$$

Ela é divergente, pois é a série harmônica. Logo, f é integrável, mas não é absolutamente integrável.

Definição 1.52. Seja f uma função. Dizemos que f é $\mathcal{L}^1$, quando f e $|f|$ são integráveis.

O teorema a seguir é um dos principais resultados para as funções $\mathcal{L}^1$, pois ele

garante que uma função $\mathcal{L}^1$ pode ser aproximada por uma sequência de funções contínuas que se anula nos extremos. Este resultado será utilizado em demonstrações das seções subsequentes.

Teorema 1.53. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{L}^1$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon$ e $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Em outras palavras, existe uma sequência de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|dx = 0.$$

Exemplo 1.54. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1([-L, L])$. Então, pelo Teorema 1.53 existe uma sequência de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e periódicas de período $2L$ com $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ para todo n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|dx = 0.$$

Um outro resultado fundamental envolvendo as funções $\mathcal{L}^1$ é o lema de Riemann-Lebesgue que nos auxiliará nas demonstrações de resultados futuros relacionados a convergência pontual das séries de Fourier.

Lema 1.55 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{L}^1([a, b])$. Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)dx = 0, \quad (1.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)dx = 0. \quad (1.5)$$

Além das funções $\mathcal{L}^1$, também estamos interessados em funções quadrado integráveis, mais precisamente, as funções que cumprem a condição abaixo.

Definição 1.56. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de quadrado integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis. Neste caso, dizemos que f é $\mathcal{L}^2$.

Vejamos algumas propriedades para as funções $\mathcal{L}^2$.

Proposição 1.57. *Se f for limitada e integrável a Riemann em $[a, b]$, então f será $\mathcal{L}^2$ e*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a).$$

Proposição 1.58. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções $\mathcal{L}^2$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $\mathcal{L}^2$ tem a forma:*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (1.6)$$

Os conjuntos das funções $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ não são conjuntos disjuntos, então podemos nos questionar qual a relação existente entre eles. Em particular, se f for $\mathcal{L}^2$, então f é necessariamente $\mathcal{L}^1$. De fato, basta tomar $g(x) \equiv 1$ na desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6), para funções $\mathcal{L}^2$, obtemos

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} (b-a)^{1/2}.$$

Entretanto, a recíproca não é verdade, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.59. Pode acontecer de f ser $\mathcal{L}^1$, mas não ser $\mathcal{L}^2$. Para ver isto, considere a função $f(x) = \sqrt{x^{-1}}$, para $0 < x < 1$. Note que,

$$\int_0^1 \sqrt{x^{-1}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Daí, percebe-se que $f(x) = |f(x)|$, ou seja, f e $|f|$ são integráveis e, portanto f é $\mathcal{L}^1$.

Por outro lado, temos $|f(x)|^2 = |\sqrt{x^{-1}}|^2 = x^{-1}$, para $0 < x < 1$ e como $\int_0^1 x^{-1} dx$ diverge, então f não é $\mathcal{L}^2$.

Uma outra desigualdade importante envolvendo as funções $\mathcal{L}^2$ é a desigualdade de Minkowski, mais precisamente.

Proposição 1.60. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções $\mathcal{L}^2$. A desigualdade de Minkowski para funções $\mathcal{L}^2$ tem a forma:*

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

De maneira similar ao que ocorre para funções $\mathcal{L}^1$, podemos garantir a aproximação de funções $\mathcal{L}^2$ por uma sequência de funções contínuas que se anula nos extremos, mais precisamente.

Teorema 1.61. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{L}^2$. Então, existe uma sequência de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

Exemplo 1.62. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^2([-L, L])$. Então, pelo Teorema 1.61 existe uma sequência de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódicas de período $2L$, com $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ para todo n tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

1.4 Tópicos de Cálculo Avançado

Apesar de supormos que o leitor deve estar familiarizado com as definições básicas da topologia do espaço $\mathbb{R}^n$ e das funções de n variáveis, esta seção, dividida em dois subtópicos, apresentará inicialmente o resultado de derivação sobre o sinal da integral e em seguida alguns resultados fundamentais para um melhor entendimento das futuras demonstrações.

1.4.1 Derivação Sobre Sinal da Integral

Em certo momento, ao longo do trabalho, precisaremos derivar uma função definida a partir de uma integral. Desse modo, o próximo resultado garante sob que condições podemos derivar esse tipo de função. E mais, em que condições permitimos a derivação sobre o sinal da integral. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.63. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, finito ou infinito. Suponha que $F \in C([a, b] \times I)$ é tal que a derivada $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe e é contínua em $[a, b] \times I$. Seja*

$$f(y) = \int_a^b F(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.7)$$

Então, f é continuamente diferenciável em I e

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (1.8)$$

1.4.2 Teoremas Auxiliares

Nesta seção, apresentamos resultados fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho. Para isto, introduziremos alguns conceitos de topologia do espaço $\mathbb{R}^n$ necessários para entender os teoremas de cálculo avançado aqui enunciados. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas em [3] e [8].

Definição 1.64. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de todos os pontos a uma distância $r > 0$ de x_0 é chamado de bola aberta de centro x_0 e raio r , denotado por: $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$.

Definição 1.65. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Ω é um conjunto aberto se, para todo $x_0 \in \Omega$ existe uma bola aberta de centro x_0 que está inteiramente contida em Ω .

Definição 1.66. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é fechado se seu complementar $\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n; x \notin F\}$ é aberto.

Definição 1.67. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos o fecho de A como o menor conjunto fechado que contém A . Denotamos por $\overline{A}$, ou seja, $\overline{A} = \{a \in \mathbb{R}^n; B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$.

Definição 1.68. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos o interior de A como o maior conjunto aberto contido em A . Denotamos por $\text{int}A$, ou seja, $\text{int}A = \{a \in A; \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subseteq A\}$.

Definição 1.69. Definimos a fronteira de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto $\partial A = \{x \in \overline{A}; x \notin \text{int}A\}$.

Definição 1.70. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito conexo se S não puder ser escrito como uma união disjunta de dois subconjuntos não vazios abertos em S . Em particular, se S é conexo e $A \subseteq S$ é ao mesmo tempo aberto e fechado em S , então $A = S$ ou $A = \emptyset$.

Definição 1.71. Dizemos que $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo quando f é uma bijeção diferenciável cuja inversa é diferenciável.

Com isto, podemos enunciar o primeiro resultado importante da seção. O teorema que garante sob quais condições uma função possui uma inversa local diferenciável.

Teorema 1.72 (Teorema da Aplicação Inversa). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k com $k \geq 1$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$.*

Um outro teorema importante é o teorema da divergência, pois ele relaciona o fluxo de um campo vetorial através do contorno de uma região plana com a divergência desse campo no interior da região.

Teorema 1.73 (Teorema da Divergência). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto e conexo) limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves e considere $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 em Ω . Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} ds$$

onde $\hat{n}$ é a normal externa unitária e $\nabla \cdot F$ é o divergente de F .

Mais adiante estaremos trabalhando com equações diferenciais que envolvem o Laplaciano, então se faz necessário defini-lo precisamente e, a partir dele, definir as funções harmônicas e estabelecer o Teorema do Valor Médio.

Definição 1.74. Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos e denotamos o Laplaciano de u como sendo:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Definição 1.75. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Então, dizemos que u é harmônica em Ω se $\Delta u = 0$ em Ω .

Teorema 1.76 (Teorema do Valor Médio). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e seja u uma função harmônica em Ω . Então, quaisquer que sejam $\xi \in \Omega$ e $R > 0$ com $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds. \quad (1.9)$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais

O estudo das equações diferenciais parciais remonta ao surgimento do cálculo, desenvolvido por Newton e Leibniz no final do século XVII. Inicialmente, foram motivados pelos problemas físicos da época, mas com o avanço do cálculo, problemas de diferentes áreas começaram a serem representados por equações diferenciais. Desse modo, a teoria das EDPs se tornou um campo da matemática amplamente explorado, pois tais equações são responsáveis por modelar diversos fenômenos da natureza. Um dos principais objetivos do nosso trabalho é estudar a existência e unicidade de solução para problemas que envolvem a equação do calor e a equação de Laplace, ambas equações diferenciais parciais. Desse modo, é essencial entendermos primeiramente este conceito.

Definição 2.1. Uma equação diferencial parcial em n variáveis independentes $x_1, \dots, x_n$ é uma equação da forma:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0.$$

Com F dada, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Sendo $u = u(x)$ a função que queremos determinar.

Em outras palavras, uma EDP é caracterizada pela presença de derivadas parciais em relação a várias variáveis em uma função. Assim, nas próximas seções desse capítulo, apresentaremos os conceitos básicos envolvendo as EDPs, suas classificações e introduziremos problemas envolvendo as condições de contorno e iniciais.

2.1 Classificação

Na matemática em geral, muito se busca organizar objetos matemáticos que possuam propriedades ou características em comum. Desse modo, nesta seção, estamos interessados em classificar as equações diferenciais quanto a ordem, a linearidade, a homogeneidade e a semilinearidade, apresentando alguns exemplos.

Definição 2.2. Definimos a ordem de uma EDP pela derivada parcial de maior ordem da equação.

Definição 2.3. Diremos que uma EDP é linear quando é do primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação. Caso contrário, é dita não linear.

Em geral, ao considerar uma EDP linear de primeira ou segunda ordem com n variáveis independentes $x = (x_1, \dots, x_n)$, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u + d(x) = 0. \quad (2.1)$$

Sendo que denotaremos por $k \in \{1, 2\}$ a ordem da equação, ou seja, se $k = 1$, então $a_{ij} \equiv 0$ para quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e existe $1 \leq j \leq n$ tal que b_j não é identicamente nulo. Por outro lado, se $k = 2$ então alguns dos coeficientes a_{ij} não são identicamente nulos.

Definição 2.4. Dizemos que uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo, no caso, em (2.1), $d(x) = 0$ para todo x .

Definição 2.5. Chamamos de parte principal da EDP a parte da equação que contém as derivadas de maior ordem. Assim, diremos que uma EDP é semilinear se sua parte principal for linear.

Vejamos alguns exemplos clássicos para um melhor entendimento dos conceitos apresentados.

Exemplo 2.6. A equação de Poisson dada por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y)$ é uma EDP linear de segunda ordem não homogênea se a função h não for identicamente nula. No caso de $h \equiv 0$ a equação é homogênea e chamada de equação de Laplace. E mais, esta equação está associada a fenômenos físicos estacionários, ou seja, aqueles que independem do tempo. Por exemplo, potenciais eletrostáticos gerados por distribuições fixas de cargas.

Exemplo 2.7. A equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, com $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α uma constante. Esta equação é de segunda ordem, homogênea, linear e está associada a fenômenos de difusão, como, por exemplo, a transmissão de calor em sólidos.

Exemplo 2.8. A equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, com $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e $c > 0$ uma constante. Esta é uma equação também linear, homogênea e de segunda ordem. E mais, como o próprio nome diz, está associada à propagação de ondas, ou seja, está relacionada a fenômenos ondulatórios.

2.2 Linearidade e Superposição

Dentre as propriedades das equações diferenciais, uma das principais é o princípio da superposição, pois ele garante que a combinação linear de soluções ainda é uma solução. Desse modo, esta seção tem como objetivo introduzir os conceitos necessários para a demonstração desse resultado fundamental nos capítulos subsequentes.

Apesar dos resultados seguintes serem válidos para EDPs de qualquer ordem, a fim de simplificar as ideias, vamos considerar uma EDP de primeira ou de segunda ordem com n variáveis independentes, ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definição 2.9. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e suponha que para $1 \leq i, j \leq n$ as funções a_{ij} , b_j e c são contínuas em Ω e tomam valores reais. Definimos $L : C^k(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ de modo que

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x). \quad (2.2)$$

Note que o operador L é um exemplo de um operador diferencial parcial. Além disso, utilizamos a terminologia operador para enfatizar que a função L está definida entre espaços de funções. Isto é, L leva uma função u com determinadas propriedades em outra função Lu . E mais, a próxima proposição garante a linearidade do operador L a partir da linearidade da equação.

Proposição 2.10. Se a equação (2.1) é linear, então o operador L definido por (2.2) é um operador linear.

Demonstração. De fato,

(i) L leva a função identicamente nula nela mesma. Isto é,

$$(Lu)(0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 0}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial 0}{\partial x_j} + c(x)0 = 0.$$

(ii) $\forall u, v \in C^k(\Omega)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} L(u + \alpha v)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 (u + \alpha v)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial (u + \alpha v)}{\partial x_j} + c(x)(u + \alpha v)(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + \\ &\quad + \alpha \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + c(x)v(x) \right) \\ &= Lu + \alpha Lv. \end{aligned}$$

Portanto, L é um operador linear. □

Definição 2.11. Seja $Lu = f$ uma EDP não homogênea. Chamamos $Lu = 0$ de equação homogênea associada à equação $Lu = f$.

Primeiramente, pensando em álgebra linear, como L é uma transformação linear definida em um espaço vetorial $V = C^k(\Omega)$ de funções, as soluções $u \in V$ da equação $Lu = 0$ formam um subespaço de V . De fato, uma vez que L é um operador linear, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para quaisquer $u, v \in V$ tais que $Lu = 0$ e $Lv = 0$ obtemos $L(u + \alpha v) = 0$. Esse resultado é conhecido como o princípio da superposição na sua forma finita, mais precisamente:

Proposição 2.12. Qualquer combinação linear de soluções da equação $Lu = 0$ é também uma solução. Isto é, se $u_1, \dots, u_m$ satisfazem a equação e se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são escalares, então

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$$

é também solução de $Lu = 0$.

Demonstração. De fato, aplicando indução em m segue que para $m = 1$, $u = \alpha_1 u_1$ e utilizando que L é um operador linear obtemos $L(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 L(u_1) = 0$.

Agora suponha que vale para m , ou seja, $L\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j\right) = 0$. Então, vamos mostrar que também vale para $m+1$. Com efeito, utilizando o fato de L ser uma transformação linear temos

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j u_j\right) &= L\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j + \alpha_{m+1} u_{m+1}\right) \\ &= L\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j\right) + \alpha_{m+1} L(u_{m+1}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, se $u_1, \dots, u_m$ satisfazem a equação e se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são escalares, então $Lu = 0$ sendo $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$. $\square$

De forma natural, podemos pensar na possibilidade de obtermos combinações lineares infinitas de soluções. Desse modo, a próxima proposição apresenta sob que condições podemos realizar essas combinações. Entretanto, enunciaremos e demonstraremos apenas para o caso em que $k \in \{1, 2\}$, pois serão os casos utilizados ao longo do trabalho, mas o resultado é válido para um operador diferencial parcial linear de qualquer ordem.

Proposição 2.13 (Princípio da Superposição). *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem $k \in \{1, 2\}$ cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que (u_m) é uma sequência de funções de classe $C^k(\Omega)$ satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$. Então, se (α_m) é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m,$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω , então $Lu = 0$.

Demonstração. Note que, por definição, Lu é dado por (2.2). Nesse caso, por hipótese, quaisquer que sejam $x \in \Omega$, $1 \leq i, j \leq n$, a seguinte série é convergente:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x).$$

E utilizando a derivação termo a termo para séries absolutamente convergentes, Proposi-

ção 1.47, segue a convergência das séries abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

Portanto, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}(Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + c(x)u_m(x) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0.\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração da proposição para o caso em que $k \in \{1, 2\}$. $\square$

Destacamos que este resultado é fundamental na obtenção dos candidatos a solução dos problemas deste trabalho, pois o método da separação de variáveis, que utilizaremos mais tarde, é baseado no princípio da superposição.

2.3 Condições de Contorno e Iniciais

Na busca de soluções para equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares surgem uma ou mais constantes arbitrárias que podemos determinar seus valores impondo condições iniciais, e mais, podemos até mesmo obter unicidade em intervalos finitos impondo condições de contorno. Entretanto, para as EDPs, lineares ou não, mesmo quando é possível determinar a solução geral da equação, ela envolve funções arbitrárias das variáveis independentes. Em outras palavras, determinar as soluções de equações diferenciais parciais envolve um grau maior de generalidade.

Além disso, como o espaço das variáveis independentes é multidimensional, procuramos soluções definidas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, é natural substituir os extremos do intervalo pela fronteira $\partial\Omega$ da região Ω . Desse modo, nesta seção estamos interessados

em estudar as condições de contorno e as condições iniciais de uma EDP.

Definição 2.14 (Condições de Contorno ou Condições de Fronteira). Definimos como sendo as condições sobre o valor da solução e de suas derivadas na fronteira da região. Dessa forma, uma EDP com condição de contorno está relacionada a um problema de contorno ou a um problema de valores de contorno.

Observação 2.15. No estudo das EDPs as condições de contorno costumam aparecer na descrição de fenômenos físicos que independem do tempo e frequentemente encontramos condições do tipo:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Sendo α e β constantes dadas, f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$. Além disso, no caso $\beta = 0$, a condição (2.3) é conhecida como *Condição de Dirichlet*, enquanto no caso em que $\alpha = 0$, temos uma *Condição de Neumann*.

Uma vez que as EDPs possuem mais de uma variável independente e com o intuito de generalizar o conceito de condições iniciais das EDOS, é natural fixar uma das variáveis e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função de outras variáveis.

Definição 2.16 (Condições Iniciais). Definimos como sendo as condições impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva ou superfície inicial. Desta forma, uma EDP com condições iniciais está relacionada a um problema de Cauchy ou problema de valor inicial.

Em geral, em problemas físicos que dependem do tempo é melhor separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y e z . Pois, muitas das vezes, ocorre dos valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem $k - 1$ serem descritos no instante $t = 0$ como função de x, y e z , ou seja, descrevendo as condições iniciais, enquanto ao mesmo tempo são impostas condições de contorno para todo $t \geq 0$, em relação às variáveis espaciais.

Estes problemas são chamados de problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) ou problema misto. E mais, nestes casos as condições de contorno e as condições iniciais não são inteiramente independentes, ou seja, é necessário que seja satisfeita uma condição de compatibilidade para existir solução.

Desde que a condição de compatibilidade dos problemas sejam satisfeitas, podemos determinar uma única solução clássica para cada problema. Isto é, soluções que são duas vezes continuamente diferenciáveis na região de interesse.

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 2.17. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função dada. Então, considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u(x_0, y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

É um problema de Cauchy que envolve uma EDP linear de primeira ordem, com a curva inicial no eixo y .

Exemplo 2.18. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto. Então

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f.\end{aligned}\tag{2.4}$$

É um problema de Dirichlet, ou seja, é um problema de contorno. Em particular, estudaremos esse problema em algumas regiões específicas.

Exemplo 2.19. O problema para a equação da onda em um intervalo finito:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(L, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, L].\end{aligned}\tag{2.5}$$

O problema acima descreve uma corda elástica de comprimento L , presa nas pontas vibrando em um plano vertical. É um problema misto, com condição de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ para $t \geq 0$. Como a equação da onda é de segunda ordem em relação a t , precisamos de duas condições iniciais: $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ para $x \in [0, L]$. Além disso, tomando $t = 0$ na condição de contorno temos a seguinte condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(L)$.

Exemplo 2.20. O problema da equação do calor na barra finita:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) &= 0 = u(L, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, L].\end{aligned}$$

Este problema descreve uma barra de secção reta uniforme e comprimento L . Neste caso, precisamos supor que não há trocas de calor entre a superfície lateral da barra e o exterior. É um problema misto, com condição de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ para $t \geq 0$ e com condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ para $x \in [0, L]$. Além disso, tomando $t = 0$ na condição de contorno obtemos a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(L)$.

Em problemas que envolvem uma EDP, condições de contorno e/ou condições iniciais, existem três pontos fundamentais a serem analisados:

- (i) Existência de soluções;
- (ii) Unicidade da solução;
- (iii) Dependência da solução nos dados iniciais e/ou de contorno.

Em outras palavras, após garantir a existência da solução, é essencial nos perguntarmos sobre sua unicidade, e mais, qual sua dependência em relação aos dados iniciais e/ou de contorno. Desse modo, um problema para o qual valem a existência, a unicidade e a dependência contínua nos dados iniciais e/ou de contorno é chamado um problema bem posto.

2.4 Equações Semilineares de Segunda Ordem

Nesta seção, retornamos a classificar EDPs, em particular, as equações semilineares. Inicialmente, a forma mais geral de uma EDP semilinear de segunda ordem é dada por:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Assim, uma EDP semilinear de segunda ordem com duas variáveis independentes é da seguinte forma:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.6)$$

Perceba que a parte principal da equação (2.6) é dada por:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.7)$$

Definição 2.21. Sejam a , b e c funções contínuas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e que não se anulam simultaneamente. Então, o discriminante da equação (2.6) é a função $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y).$$

Definição 2.22. Dizemos que a parte principal (2.7) da EDP (2.6) é:

- (i) Elíptica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) < 0$;
- (ii) Parabólica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) = 0$;
- (iii) Hiperbólica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) > 0$.

Observação 2.23. Dizemos que (2.7) e (2.6) são parabólicas/hiperbólicas/elípticas em Ω se forem parabólicas/hiperbólicas/elípticas em cada ponto $(x, y) \in \Omega$. Por outro lado, diremos que a equação (2.7) é de tipo misto, quando mudar de tipo no domínio de definição de seus coeficientes.

Vejamos alguns exemplos para um melhor entendimento da definição anterior.

Exemplo 2.24. A equação de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y)$ é elíptica no domínio de h , pois $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = -1 < 0$.

Exemplo 2.25. A equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é parabólica no domínio de f , pois $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$.

Exemplo 2.26. A equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é hiperbólica no domínio de f , pois $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = c^2 > 0$.

Exemplo 2.27. A equação de Tricomi $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é do tipo misto, pois $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = -y$, ou seja, é elíptica no semiplano $y > 0$, parabólica no eixo x e hiperbólica no semiplano $y < 0$.

Cada tipo de equação semilinear possui suas próprias características e propriedades em relação a solução do problema. Ao longo do trabalho será necessário realizar mudanças de variáveis nas equações, mas sem alterar o tipo da equação. É justamente o que garante o resultado a seguir.

Proposição 2.28. *Sejam $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ funções com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ com jacobiano $J(x_0, y_0) \neq 0$. Então, a classificação (elíptica, parabólica, hiperbólica) de uma EDP da forma (2.6) não se altera. Em outras palavras, uma equação diferencial parcial da forma (2.6) é invariante sob mudanças de variáveis bem comportadas.*

Demonstração. Suponha que $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ são funções com derivadas até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ com jacobiano

$$J(x, y) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix},$$

e suponha que $J(x_0, y_0) \neq 0$. Então, pela continuidade, o jacobiano não se anula em uma vizinhança do (x_0, y_0) e, pelo Teorema da Função Inversa 1.72, podemos resolver localmente $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$ em uma vizinhança do ponto $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ com as funções x e y de classe C^2 nessa vizinhança.

Dessa forma, definindo $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ e utilizando a regra da cadeia obtemos as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Portanto, se u é uma solução clássica de (2.6), v é uma solução clássica da equação:

$$A(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \quad (2.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= a(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\ B(\xi, \eta) &= a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ C(\xi, \eta) &= a(x, y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Calculando o discriminante da equação (2.8), obtemos

$$\Delta(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2,$$

com $\delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$, que por sua vez é o discriminante da equação (2.6). Logo, como o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , o sinal de $\Delta(\xi_0, \eta_0)$ é igual ao sinal de $\delta(x_0, y_0)$. Em outras palavras, a equação (2.6) é parabólica ou hiperbólica ou elíptica se, e somente se, a equação (2.8) for parabólica ou hiperbólica ou elíptica. $\square$

Capítulo 3

Séries de Fourier

No início do século XIX, Jean-Baptiste Joseph Fourier desenvolveu uma poderosa ferramenta matemática para representar uma função periódica como uma soma infinita de senos e cossenos, o que deu início à teoria das séries de Fourier. É sabido que esta teoria foi desenvolvida através do estudo da propagação de calor em uma barra, cuja dinâmica pode ser modelada por uma EDP, problema este que veremos com mais detalhes no próximo capítulo.

O estudo das séries de Fourier é fundamental, uma vez que nos permite determinar as soluções dos problemas que estudamos nos capítulos subsequentes. Desse modo, este capítulo é dedicado ao estudo detalhado das séries de Fourier, desde a sua definição até a sua convergência e unicidade.

3.1 Séries de Fourier

Nesta seção nosso objetivo é estudar as relações existentes entre a série de Fourier de uma função f e seus coeficientes. Para isto, precisamos que a função f cumpra certas condições.

Definição 3.1 (Série de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com $f \in \mathcal{L}^1$. Então, a expressão do lado direito é definida como sendo a série de Fourier de f :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (3.1)$$

Entretanto, para prosseguir e determinar os coeficiente a_n e b_n , se faz necessário três

relações de ortogonalidade envolvendo a integral do produto das funções seno e cosseno, são elas:

Lema 3.2. *Primeira relação de ortogonalidade:*

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1. \quad (3.2)$$

Demonstração. Note que o seno e o cosseno são, respectivamente, uma função ímpar e uma função par, ou seja, pela Proposição 1.14, item (iii) o produto entre elas é uma função ímpar. Dessa forma, para $n, m \geq 1$, temos a integral de uma função ímpar em um intervalo limitado e pela Proposição 1.16, item (ii) obtemos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

□

Lema 3.3. *Segunda relação de ortogonalidade:*

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m \text{ e } n, m \geq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Demonstração. Inicialmente, como o cosseno é uma função par, pela Proposição 1.14, item (ii), o produto ainda é uma função par e visto que estamos integrando uma função par em um intervalo limitado segue da Proposição 1.16, item (i):

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Analisaremos agora dois casos, primeiro se $n = m \geq 1$ e depois se $n \neq m$ e $n, m \geq 1$:

(i) Se $n = m \geq 1$, então

$$2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Logo, utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ temos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L 1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left[x + \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = L. \end{aligned}$$

(ii) Se $n \neq m$ e $n, m \geq 1$, então utilizando a identidade trigonométrica $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$ obtemos

$$2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Daí, note que,

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx &= \left[\frac{L}{2(n+m)\pi} \sin\left(\frac{2(n+m)\pi x}{L}\right) \right]_0^L = 0 \\ \int_0^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx &= \left[\frac{L}{2(n-m)\pi} \sin\left(\frac{2(n-m)\pi x}{L}\right) \right]_0^L = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

□

Lema 3.4. *Terceira relação de ortogonalidade:*

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m \text{ e } n, m \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Demonstração. Inicialmente, dado que o seno é uma função ímpar, pela Proposição 1.14, item (ii), o produto é uma função par e como estamos integrando uma função par em um intervalo limitado segue da Proposição 1.16, item (i):

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Analisaremos agora dois casos, primeiro se $n = m \geq 1$ e em seguida se $n \neq m$ e $n, m \geq 1$:

(i) Se $n = m \geq 1$, então utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

temos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \int_0^L 1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right]_0^L = L. \end{aligned}$$

(ii) Se $n \neq m$ e $n, m \geq 1$, então utilizando a identidade trigonométrica $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin(a) \sin(b)$ obtemos

$$2 \int_0^L \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \int_0^L \left[\cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) - \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right] dx.$$

E como,

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) dx &= \left[\frac{L}{2(n-m)\pi} \sin \left(\frac{2(n-m)\pi x}{L} \right) \right]_0^L = 0 \\ \int_0^L \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) dx &= \left[\frac{L}{2(n+m)\pi} \sin \left(\frac{2(n+m)\pi x}{L} \right) \right]_0^L = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$2 \int_0^L \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0.$$

□

A partir disto temos o seguinte resultado que nos fornece uma forma explícita para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier.

Teorema 3.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, com $f \in \mathcal{L}^1$ em cada intervalo limitado de modo que*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \quad (3.5)$$

e

$$\int_{-l}^L |f(x)| dx < \infty.$$

Supondo que a série de Fourier de f converge uniformemente, então, definimos como os coeficientes de Fourier da função f os números a_n e b_n , dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 0, \quad (3.6)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (3.7)$$

Em particular,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.8)$$

Demonstração. Uma vez que precisamos analisar os coeficientes separadamente, dividiremos a demonstração em três partes, a primeira vamos determinar a_0 , em seguida a_n e por fim b_n :

(i) De fato, como a série converge uniformemente, então pela Proposição 1.46 a função f deve ser contínua, ou seja, pode ser integrada. Logo, integrando ambos os lados e utilizando a Proposição 1.48 temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right). \end{aligned}$$

Daí, como o cosseno e o seno são, respectivamente, uma função par e uma função ímpar, pela Proposição 1.16, itens (i) e (ii), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[\frac{L \sin(n\pi)}{\pi n} \right]_0^L = 0 \\ \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx.$$

Ou ainda,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

(ii) Para provarmos (3.6), com $n > 0$, multiplicamos (3.5) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, para $m \geq 1$ fixado obtemos

$$f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Sendo que a série converge uniformemente, ou seja, pela Proposição 1.46 a função f deve

ser contínua e, portanto, integrável. Logo, integrando ambos os lados temos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Daí, utilizando propriedades de integrais e a Proposição 1.48 obtemos as seguintes integrais

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Entretanto, a primeira integral é nula, pois é análoga a calculada no item (i) da demonstração. Enquanto a segunda relação de ortogonalidade (3.3) garante que a segunda integral é nula sempre que $n \neq m$ e, por fim, a terceira integral é nula pela primeira relação de ortogonalidade (3.2). Logo, para $n = m$ temos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} 0 + a_m L + b_m 0.$$

Ou ainda,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

(iii) De fato, multiplicando (3.5) por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, para $m \geq 1$ fixado obtemos

$$f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Daí, como a série converge uniformemente, segue da Proposição 1.46 que a função f deve ser contínua e portanto integrável. Dessa forma, integrando ambos os lados obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Então, utilizando propriedades de integrais e a Proposição 1.48 obtemos as seguintes

integrais

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Contudo, pela Proposição 1.16, item (ii) a primeira integral é nula. Enquanto que a segunda integral é nula pela primeira relação de ortogonalidade (3.2) e a terceira relação de ortogonalidade (3.4) garante que a terceira integral é nula sempre que $n \neq m$. Portanto, para $n = m$ obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} 0 + a_m 0 + b_m L.$$

Ou ainda,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

□

Como visto no primeiro capítulo, podemos utilizar a paridade de uma função para facilitar o cálculo de integrais. Desse modo, podemos empregar este resultado a fim de simplificar o estudo das séries de Fourier de funções pares e ímpares.

Proposição 3.6. *Se f for uma função par, periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$, então os coeficientes de Fourier da função f são dados por:*

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = 0.$$

Em particular, a série de Fourier de f é uma série de cossenos.

Demonstração. De fato, por definição a_n é dado por (3.6). Logo, como o cosseno é uma função par e por hipótese f também é par, segue da Proposição 1.14, item (ii), que o produto entre elas também é par. Então, pela Proposição 1.16, item (i) temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Por outro lado, por hipótese f é par e, por definição, b_n é dado por (3.7). Como a função seno é ímpar, temos pela Proposição 1.14, item (iii), que o produto entre elas é ímpar e consequentemente pela Proposição 1.16, item (ii) obtemos

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

□

Proposição 3.7. *Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$, então os coeficientes de Fourier da função f são dados por:*

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Em particular, a série de Fourier de f é uma série de senos.

Demonstração. Com efeito, por hipótese f é par e, por definição, a_n é dado por (3.6). Como o cosseno é uma função par segue da Proposição 1.14, item (iii), que o produto entre elas é ímpar e consequentemente pela Proposição 1.16, item (ii) temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Por outro lado, por definição b_n é da forma (3.7). Daí, como a função seno é ímpar e por hipótese a função f também é ímpar, segue da Proposição 1.14, item (ii), que o produto entre elas também é par. Logo, pela Proposição 1.16, item (i) obtemos

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

□

Se uma função pode ser escrita como a combinação linear de outras duas, então o próximo resultado relaciona os coeficientes de Fourier de suas respectivas séries.

Proposição 3.8. *Sejam f e g funções periódicas de período $2L$, com $f, g \in \mathcal{L}^1$. Definimos a função $h = \alpha f + \beta g$, com α e β constantes. Então, os coeficientes de Fourier da função*

h são dados por

$$a_0(h) = \alpha a_0(f) + \beta a_0(g),$$

$$a_n(h) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g),$$

$$b_n(h) = \alpha b_n(f) + \beta b_n(g).$$

Demonstração. De fato, escrevendo a série de Fourier da função f :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Sendo que os coeficientes de Fourier da função f são dados por:

$$a_0(f) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Da mesma forma, escrevendo a série de Fourier da função g

$$g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(g) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n(g) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Sendo os coeficientes de Fourier da função g da forma: $a_0(g) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx$, $a_n(g) =$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ e } b_n(g) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Por fim, escrevendo a série de Fourier da função h :

$$h(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(h) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n(h) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Logo, os coeficientes de Fourier da função h são dados por:

$$\begin{aligned} a_0(h) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) dx \\ a_0(h) &= \alpha \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx + \beta \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) dx \\ a_0(h) &= \alpha a_0(f) + \beta a_0(g). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n(h) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n(h) &= \alpha \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \beta \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n(h) &= \alpha a_n(f) + \beta a_n(g). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} b_n(h) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n(h) &= \alpha \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \beta \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n(h) &= \alpha b_n(f) + \beta b_n(g). \end{aligned}$$

O que completa a demonstração. □

3.1.1 Convergência Pontual das Séries de Fourier

Nesta seção estamos interessados em garantir as condições necessárias para a convergência pontual da série de Fourier de uma função f . Desse modo, além das hipóteses mínimas para definir os coeficientes de Fourier, precisamos adicionar uma nova hipótese em relação a f na vizinhança do ponto x . Em outras palavras, nosso intuito é fazer estimativas acerca do valor de

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

onde $s_n(x)$ é a soma parcial da série de Fourier de uma função f , isto é

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right).$$

Para isto, precisaremos definir o núcleo de Dirichlet e apresentar algumas de suas propriedades.

Definição 3.9. Definimos o núcleo de Dirichlet como

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right). \quad (3.10)$$

Proposição 3.10. O núcleo de Dirichlet (3.10) possui as seguintes propriedades:

- (i) $D_n(x)$ é uma função par;
- (ii) $D_n(x)$ é uma função contínua;
- (iii) $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;
- (iv) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;
- (v) $D_n(0) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right)$;
- (vi) A seguinte expressão é válida para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{\sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}. \quad (3.11)$$

Demonstração. (i) De fato, como a função cosseno é par, segue que

$$D_n(-x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(-x)}{L} \right) \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) = D_n(x).$$

(ii) Como $D_n(x)$ é a soma de funções contínuas, então $D_n(x)$ é uma função contínua.

(iii) Com efeito, utilizando a identidade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) -$

$\sin(a) \sin(b)$ obtemos

$$\begin{aligned}
 D_n(x+2L) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(x+2L)}{L} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} + 2k\pi \right) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cos(2k\pi) - \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \sin(2k\pi) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) = D_n(x).
 \end{aligned}$$

(iv) De fato,

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2L} [x]_{-L}^L + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \left[\frac{L \sin(k\pi x)}{\pi n} \right]_0^L = 1.
 \end{aligned}$$

(v) Com efeito,

$$\begin{aligned}
 D_n(0) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi 0}{L} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right).
 \end{aligned}$$

(vi) Para provar (3.11), note que (3.10) pode ser escrito como

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right). \quad (3.12)$$

Neste caso, vamos calcular a expressão

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

Daí, conforme a fórmula de De Moivre temos

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) + i \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}. \quad (3.13)$$

Ou seja, $S_n(\theta)$ é a parte real da série (3.13). Nesse caso, basta estudar a sua convergência. Note que a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica com $z \neq 1$ é dada por

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Então, considerando $z = e^{ik\theta}$ obtemos

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Ou ainda, multiplicando o numerador e o denominador por $e^{-i\theta/2}$ segue que

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}.$$

Agora utilizando fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ podemos reescrever a expressão para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} &= \frac{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) - \cos([n + (1/2)]\theta) - i \sin([n + (1/2)]\theta)}{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2) - \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)} \\ \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} &= \frac{-i \sin(\theta/2) - i \sin([n + (1/2)]\theta) + \cos(\theta/2) - \cos([n + (1/2)]\theta)}{-2i \sin(\theta/2)} \\ \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} &= \frac{-i \sin(\theta/2) - i \sin([n + (1/2)]\theta)}{-2i \sin(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2) - \cos([n + (1/2)]\theta)}{-2i \sin(\theta/2)} \\ \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} &= \frac{\sin(\theta/2) + \sin([n + (1/2)]\theta)}{2 \sin(\theta/2)} + \frac{i \cos(\theta/2) - i \cos([n + (1/2)]\theta)}{2 \sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)]\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(\theta/2) + \sin([n + (1/2)]\theta)}{2 \sin(\theta/2)} + \frac{i \cos(\theta/2) - i \cos([n + (1/2)]\theta)}{2 \sin(\theta/2)}.$$

Como $S_n(\theta)$ é a parte real desta série segue que

$$S_n(\theta) = \frac{\sin(\theta/2) + \sin([n + (1/2)]\theta)}{2 \sin(\theta/2)}. \quad (3.14)$$

Por fim, note que tomando $\theta = \frac{n\pi x}{L}$ em (3.14) e substituindo em (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \\ D_n(x) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + S_n \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \\ D_n(x) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{\sin \left(\frac{n\pi x}{2L} \right)}{2 \sin \left(\frac{n\pi x}{2L} \right)} + \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right)} \right) \\ D_n(x) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right)} \right) \\ D_n(x) &= \frac{1}{2L} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)}. \end{aligned}$$

O que completa a demonstração da Proposição. $\square$

Antes de prosseguir, precisamos escrever a expressão que define e_n de forma mais conveniente para obter as majorações necessárias. Faremos isto a seguir.

Proposição 3.11. *Seja $s_n(x)$ a soma parcial da série de Fourier de uma função f . Isto é,*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right).$$

Então,

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt, \quad (3.15)$$

com $g(x, t) = [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)]$.

Demonstração. Inicialmente, substituindo os coeficientes de Fourier em $s_n(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \\ s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y)dy + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dy + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dy \right) \\ s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y)dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[f(y) \left(\cos \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + \sin \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Dai, utilizando a identidade trigonométrica $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

obtemos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right) dy \\ s_n(x) &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Fazendo $y = x - t$ e utilizando a definição do núcleo de Dirichlet (3.10) segue que

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt.$$

Entretanto, D_n e f são funções periódicas de período $2L$, assim podemos reescrever $s_n(x)$ da seguinte maneira:

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt.$$

Logo, utilizando o fato de D_n ser uma função par temos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_0^L D_n(t) f(x+t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 3.10, item (iv), obtemos

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \int_{-L}^L D_n(x) dx \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \int_{-L}^L D_n(x) \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como o núcleo de Dirichlet é uma função par, segue da Proposição 1.16,

item (i):

$$\begin{aligned}
 e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - 2 \int_0^L D_n(x) \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \int_0^L D_n(x)[f(x^+) + f(x^-)]dx \\
 &= \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)]\}dx.
 \end{aligned}$$

Como $g(x, t) = [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)]$, obtemos (3.15). $\square$

Com isto, podemos enunciar o Teste de Dini, um dos principais resultados utilizados na demonstração do teorema que irá garantir a convergência ponto a ponto da série de Fourier de uma função f .

Teorema 3.12 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1([-L, L])$. Fixado x em $[-L, L]$, suponha que $f(x^+)$ e $f(x^-)$ existam e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (3.17)$$

Então, $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Inicialmente, utilizando a Proposição 3.10, item (vi), vamos decompor $e_n(x)$ como a seguinte soma

$$\begin{aligned}
 e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt \\
 &= \int_0^\delta \frac{tD_n(t)g(x, t)}{t}dt + \int_\delta^L \frac{g(x, t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right)}{2L \sin \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} dt.
 \end{aligned}$$

Para a primeira integral utilizaremos (3.17), enquanto na segunda integral utilizaremos a primeira parte do Lema de Riemann-Lebesgue, Lema 1.55, mais precisamente a equação (1.4).

Daí, note que

$$|tD_n(t)| = \left| \frac{t \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right)}{2L \sin \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} \right| \leq \frac{t}{2L \sin \left(\frac{\pi t}{2L} \right)}.$$

Como a função no segundo membro é contínua e crescente em $[0, L]$, então para $t \in [0, L]$

temos

$$|tD_n(t)| \leq \frac{L}{2L \sin\left(\frac{\pi L}{2L}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta < \min\{L, \eta\}$ tal que utilizando (3.17) obtemos

$$\left| \int_0^\delta \frac{tD_n(t)g(x,t)}{t} dt \right| \leq \int_0^\delta |tD_n(t)| \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.18)$$

Então, com esse δ fixado vamos analisar a segunda integral. Logo, para aplicar o Lema de Riemman-Lebesgue, basta verificar se a função

$$h(t) = \frac{g(x,t)}{2L \sin\left(\frac{\pi t}{2L}\right)},$$

para $t \in [\delta, L]$ é integrável. De fato, por conta de (3.18), o denominador nunca se anula em $[\delta, L]$ e $g(x,t)$ é integrável, pois é a soma e subtração de funções integráveis. Logo, para n suficientemente grande e utilizando o Lema de Riemann-Lebesgue, Lema 1.55, em particular (1.4), obtemos

$$\left| \int_\delta^L \frac{g(x,t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)}{2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} dt \right| = \left| \int_\delta^L \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right) h(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Portanto, utilizando (3.18) e (3.19) temos

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &= \left| \int_0^\delta \frac{tD_n(t)g(x,t)}{t} dt + \int_\delta^L \frac{g(x,t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)}{2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\delta \frac{tD_n(t)g(x,t)}{t} dt \right| + \left| \int_\delta^L \frac{g(x,t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}\right)}{2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto é, $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$. □

Como consequência do resultado anterior obtemos o teorema de Fourier, um resultado fundamental dessa teoria, pois estabelece as condições nas quais uma função periódica pode ser escrita como uma soma infinita de senos e cossenos.

Teorema 3.13 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a série de Fourier da função f converge em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. Isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (3.20)$$

Demonstração. Note que uma série converge se a sequência das somas parciais converge. Então, considere

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

a n -ésima soma parcial da série de Fourier de f . Logo, basta mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{[f(x^+) + f(x^-)]}{2}$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) - \frac{[f(x^+) + f(x^-)]}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0.$$

De fato, como f é seccionalmente diferenciável, temos f e f' seccionalmente contínuas, ou seja, os limites laterais para todo x pertencente ao domínio existem. Isto é, existem os limites

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$$

$$f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t}.$$

Então, as razões incrementais $\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$ e $\frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$ serão limitadas para $t > 0$ suficientemente pequeno. Com efeito, como as derivadas laterais existem, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < t - 0 < \delta_1$ implica em

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} - f'_+(x) \right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$-\varepsilon + f'_+(x) < \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} < \varepsilon + f'_+(x).$$

Analogamente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < 0 - t < \delta_2$ implica em

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} - f'_-(x) \right| < \varepsilon,$$

logo,

$$-\varepsilon + f'_-(x) < \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} < \varepsilon + f'_-(x).$$

Sendo assim, são limitadas e, portanto, existem $M_1 > 0$ e $M_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right| \leq M_1 \text{ e } \left| \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} \right| \leq M_2.$$

Daí, note que, para $\eta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt &= \int_0^\eta \left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_0^\eta \left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right| + \left| \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_0^\eta (M_1 + M_2) dt = (M_1 + M_2) \int_0^\eta dt < \infty. \end{aligned}$$

Assim a condição (3.17) do Teste de Dini é satisfeita e, portanto, $e_n(x) \rightarrow 0$ o que completa a demonstração do Teorema. $\square$

3.1.2 Estimativa dos Coeficientes de Fourier

Nesta seção estamos interessados em estimar os coeficientes de Fourier de uma função dada, a partir de hipóteses sobre a diferenciabilidade da mesma.

Proposição 3.14. *Seja f periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$. Então, existe uma constante $M > 0$ tal que, $|a_n| \leq M$ e $|b_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Suponha que f seja periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$. Sendo as funções senos e cossenos limitadas, podemos obter as seguintes estimativas:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$$

e

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx.$$

Dessa forma, como $f \in \mathcal{L}^1$, então f e $|f|$ são integráveis. Logo, existe uma constante $M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$ tal que $|a_n| \leq M$ e $|b_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Proposição 3.15. *Seja f contínua e periódica de período $2L$, derivável e de modo que a derivada f' seja $\mathcal{L}^1$. Então, existe uma constante $M > 0$ tal que, $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n}$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que f seja contínua e periódica de período $2L$, derivável e a derivada $f' \in \mathcal{L}^1$. Então, para todo $n \geq 1$, por definição, temos

$$a_n L = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tomando $u = f(x)$ e $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, obtemos $du = f'(x) dx$ e $v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Daí, integrando por partes:

$$\begin{aligned} a_n L &= \left[f(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n L &= -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Logo, tomando os valores absolutos e utilizando o fato da função seno ser limitada, temos $|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$. Por outro lado, para todo $n \geq 1$, por definição, temos

$$b_n L = \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tomando $u = f(x)$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, obtemos $du = f'(x) dx$ e $v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Daí, integrando por partes e como f é periódica segue que:

$$\begin{aligned} b_n L &= \left[-f(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n L &= \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, tomando os valores absolutos e utilizando o fato da função cosseno ser limitada temos $|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$.

Portanto, na hipótese de que f seja contínua e que possua derivada $\mathcal{L}^1$, existe um $M = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$ tal que $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Proposição 3.16. *Seja f periódica de período $2L$ com primeira derivada contínua e a segunda derivada $\mathcal{L}^1$. Então, existe uma constante $M > 0$ tal que $|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n^2}$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Supondo f periódica de período $2L$ com primeira derivada contínua e a segunda derivada $\mathcal{L}^1$. Nosso objetivo é utilizar a Proposição anterior para melhorar a estimativa dos coeficientes. Para isto, note que

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Considere $u = f'(x)$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, então $du = f''(x) dx$ e $v = \frac{-L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Logo, integrando por partes e como f é periódica obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{n\pi} \left[-f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n &= -\frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Daí, tomando os valores absolutos e utilizando o fato da função cosseno ser limitada temos $|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$. Por outro lado, temos

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tomando $u = f'(x)$ e $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, obtemos $du = f''(x) dx$ e $v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Logo, integrando por partes e pela periodicidade da f temos:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-1}{n\pi} \left[f'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= -\frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Então, tomando os valores absolutos e utilizando o fato da função seno ser limitada,

obtemos $|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)|dx$.

Portanto, como por hipótese f possui primeira derivada contínua e a segunda derivada $\mathcal{L}^1$, existe $M = \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)|dx$ tal que $|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n^2}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

3.1.3 Desigualdade de Bessel

Nesta seção, veremos a desigualdade de Bessel que é um resultado fundamental para garantir a convergência uniforme das séries de Fourier. Inicialmente, precisamos de um novo conceito envolvendo as funções $\mathcal{L}^2$.

Definição 3.17. Uma sequência (f_n) de funções $\mathcal{L}^2$ em um intervalo $[a, b]$ converge em média quadrática, para uma função $f \in \mathcal{L}^2$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

A expressão $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ é chamada o erro médio quadrático, na aproximação de f por f_n .

Com isto, podemos obter uma relação entre as séries de Fourier de uma função f e os demais polinômios trigonométricos.

Teorema 3.18. As somas parciais $s_n(x)$ da série de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^2$ são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática.

Demonstração. Seja $s_n(x)$ as somas parciais da série de Fourier de f , ou seja,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right).$$

Por outro lado, considere um polinômio trigonométrico de ordem n dado por

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right).$$

Daí, tomamos o erro médio quadrático das aproximações de f por s_n e por t_n , ou seja, $e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx$ e $\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx$. Então, nosso objetivo é mostrar que $e_n \leq \hat{e}_n$.

De fato, note que,

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx - 2 \int_{-L}^L s_n(x) f(x) dx + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

Analisaremos cada integral separadamente e para isto utilizaremos a convergência uniforme das séries. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right]^2 dx \\ &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Sendo,

$$\int_{-L}^L \frac{a_0^2}{4} dx = \frac{L}{2} a_0^2.$$

Enquanto, por (3.9), obtemos

$$\int_{-L}^L a_0 \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) dx = a_0 \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx + b_k \int_{-L}^L \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right) = 0.$$

Além disso, na terceira integral temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 dx &= \int_{-L}^L \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Expandindo e integrando cada termo e utilizando as relações de ortogonalidade (3.2), (3.3) e (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 dx &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_{-L}^L \cos^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx \\ \int_{-L}^L 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cdot \sum_{j=1}^n b_j \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx &= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k b_j \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx, \\ \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 dx &= \sum_{k=1}^n b_k^2 \int_{-L}^L \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} b_k b_j \int_{-L}^L \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 dx &= L \sum_{k=1}^n a_k^2, \\ \int_{-L}^L 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cdot \sum_{j=1}^n b_j \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \left(\sum_{k=1}^n b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 dx &= L \sum_{k=1}^n b_k^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-L}^L |s_n(x)|^2 dx = \frac{L}{2} a_0^2 + L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}-2 \int_{-L}^L s_n(x) f(x) dx &= -2 \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right] f(x) dx \\ &= -2 \left[\frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_k \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right) \right] \\ &= -a_0^2 L - 2L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).\end{aligned}$$

Isso implica em

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = -\frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (3.21)$$

Além disso, temos

$$\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |t_n(x)|^2 dx - 2 \int_{-L}^L t_n(x) f(x) dx + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L |t_n(x)|^2 dx &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) \\ -2 \int_{-L}^L t_n(x) f(x) dx &= -a_0 c_0 L - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2}c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) - a_0c_0L - 2L \sum_{k=1}^n (a_kc_k + b_kd_k) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Assim, completando quadrados obtemos

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2}a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Daí, note que para $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$ e $d_k = b_k$, com $k \in \mathbb{N}$ obtemos o menor valor de $\hat{e}_n$ que por sua vez coincide com e_n . Isto é, $e_n \leq \hat{e}_n$ e, portanto, as somas parciais $s_n(x)$ da série de Fourier de f são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática. $\square$

Como consequência deste resultado, obtemos a desigualdade de Bessel. Este resultado garante que a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier é limitada.

Teorema 3.19 (Desigualdade de Bessel). *Seja f uma função $\mathcal{L}^2([-L, L])$ e a_n e b_n os coeficientes de Fourier da função f . Então, para todo n vale a desigualdade*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (3.22)$$

Demonstração. Note que para $n \in \mathbb{N}$, por (3.21), temos $e_n \geq 0$ uma vez que:

$$0 \leq \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = e_n = -\frac{L}{2}a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Portanto,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Logo, da arbitrariedade de n , obtemos

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

$\square$

3.1.4 Forma Complexa da Série de Fourier

Nesta seção mostraremos que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier de f poderá ser escrita na forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

de modo que para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ temos

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Inicialmente, relembremos que a partir da fórmula de Euler podemos reescrever as funções seno e cosseno do seguinte modo:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (3.23)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (3.24)$$

Consequentemente, podemos reescrever a série de Fourier de uma função f de uma maneira diferente usando exponenciais complexas, mais precisamente.

Teorema 3.20. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$. Então, a série de Fourier de f poderá ser escrita na forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}. \quad (3.25)$$

Sendo (3.25) a série de Fourier complexa de f e os coeficientes c_n são chamados de coeficientes de Fourier complexos de f e são da forma:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.26)$$

Demonstração. Inicialmente, pela Definição 3.1, a série de Fourier de f é da forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Por outro lado, utilizando (3.23) e (3.24) obtemos

$$\begin{aligned} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= a_n \left(\frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{an}{2} + \frac{bn}{2i}\right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{an}{2} - \frac{bn}{2i}\right) e^{-in\pi x/L} \\ &= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\pi x/L}. \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever a série de Fourier de f da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\pi x/L} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\pi x/L} \\ &= \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\pi x/L}. \end{aligned}$$

Portanto, tomamos $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e obtemos a série de Fourier complexa de f sendo c_n os coeficientes de Fourier complexos de f .

Em particular, utilizando que a_n e b_n são dados, respectivamente, por (3.6) e (3.7) segue que c_n é dado por (3.26). De fato, para $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \end{aligned}$$

□

Com essa nova expressão para a série de Fourier, podemos rescrever a desigualdade de Bessel (3.22) do seguinte modo:

Proposição 3.21. *Seja $f \in SC([-L, L])$ e seja (c_n) a sequência dos coeficientes de Fourier*

complexos de f . Então a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

converge e vale a desigualdade de Bessel (3.22) em sua forma complexa, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 &= \sum_{n=-N}^{-1} |c_n|^2 + c_0^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \frac{a_n + ib_n}{2} \right|^2 + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^N \left| \frac{a_n - ib_n}{2} \right|^2 \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N [|a_n + ib_n|^2 + |a_n - ib_n|^2] \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N [2|a_n|^2 + 2|b_n|^2] \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Bessel (3.22), essa desigualdade vale para todo N então a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ converge e vale a desigualdade de Bessel (3.22) em sua forma complexa. $\square$

A partir da expressão complexa da série de Fourier de uma função f introduziremos a primeira relação de convergência uniforme da série. Entretanto, antes de prosseguir precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

Proposição 3.22. *Suponha que $f \in C_{\text{per}}(2L)$ é diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$. Então, os coeficientes de Fourier complexos de f e f' satisfazem:*

$$c'_n = \frac{in\pi}{L} c_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. De fato, como $f \in C_{\text{per}}(2L)$ e $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$, tomamos $u = e^{-in\pi x/L}$ e $dv = f'(x)dx$, ou seja, $du = -\frac{in\pi}{L} e^{-in\pi x/L} dx$ e $v = f(x)$. Logo, integrando por partes

obtemos para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(x) e^{-in\pi x/L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \left[f(x) e^{-in\pi x/L} \Big|_{-L}^L + \frac{in\pi}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \right] \\ &= \frac{in\pi}{L} c_n. \end{aligned}$$

□

Lema 3.23. Se $f, g \in SC([-L, L])$ definimos

$$(f|g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx.$$

Então, $(\cdot|\cdot)$ é uma forma bilinear simétrica positiva em $SC([-L, L])$, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h)$, $\forall f, g, h \in SC([-L, L])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(f|g) = (g|f)$, $\forall f, g \in SC([-L, L])$;
- (iii) $(f|f) \geq 0$, $\forall f \in SC([-L, L])$.

Demonstração. Demonstraremos cada item a partir da definição de $(\cdot|\cdot)$ e das propriedades de integrais.

(i) Note que $\forall f, g, h \in SC([-L, L])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$(\alpha f + \beta g|h) = \int_{-L}^L [\alpha f(x) + \beta g(x)]h(x)dx = \alpha \int_{-L}^L f(x)h(x)dx + \beta \int_{-L}^L g(x)h(x)dx = \alpha(f|h) + \beta(g|h).$$

(ii) Perceba que $\forall f, g \in SC([-L, L])$ obtemos

$$(f|g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx = \int_{-L}^L g(x)f(x)dx = (g|f).$$

(iii) Se $\forall f \in SC([-L, L])$, então

$$(f|f) = \int_{-L}^L f(x)f(x)dx = \int_{-L}^L f(x)^2dx \geq 0.$$

Portanto, $(\cdot|\cdot)$ é uma forma bilinear simétrica positiva em $SC([-L, L])$. □

Lema 3.24 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakowski-Schwartz (CBS)). Sejam f e g funções

$SC([-L, L])$. Então,

$$|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|,$$

com $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$, para todo $f \in SC([-L, L])$.

Demonstração. De fato, basta utilizar as propriedades $(\cdot|\cdot)$ definido no Lema 3.23. Isto é, dado $t \in \mathbb{R}$ temos

$$0 \leq (tf + g|tf + g) = t^2\|f\|^2 + 2t(f|g) + \|g\|^2.$$

Logo, temos um trinômio do segundo grau em t e para ele ser sempre não-negativo seu discriminante deve ser não-positivo, ou seja,

$$4(f|g)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0 \iff |(f|g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

□

De posse desses resultados, podemos garantir sob quais condições a série de Fourier converge uniformemente. Contudo, a próxima seção terá um enfoque maior nesse tipo de convergência.

Teorema 3.25. *Suponha que $f \in C_{per}(2L)$ é diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2L)$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para f .*

Demonstração. Note que da convergência pontual da série de Fourier de f e do teste M. de Weierstrass 1.44, basta mostrar a existência de uma constante $M > 0$ tal que

$$\sum_{n=-N}^N |c_n| \leq M, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, seja $N \in \mathbb{N}$ dado arbitrariamente. Usando a Proposição (3.22), a desigualdade de Bessel em sua forma complexa 3.21, juntamente com a desigualdade de Cauchy-

Bunyakowski-Schwartz 3.24 obtemos,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N |c_n| &= |c_0| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n| = |c_0| + \frac{L}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n} |c'_n| \\
 &\leq |c_0| + \frac{L}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c'_n|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq |c_0| + \frac{\sqrt{L}}{\pi\sqrt{2}} \|f'\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = M.
 \end{aligned}$$

Uma vez que temos uma p-série com $p > 1$, ou seja, uma série convergente e como $f' \in SC_{per}(2L)$ obtemos então a existência de $\|f'\|$. $\square$

3.1.5 Convergência Uniforme da Série de Fourier

Nesta seção, demonstraremos um dos resultados mais importantes deste capítulo, pois ele garante as condições necessárias para a série de Fourier convergir uniformemente. Em outras palavras estudaremos com mais detalhes as condições suficientes sobre a função f que garantem a convergência uniforme da série de Fourier.

Inicialmente, vejamos um caso mais simples onde exigimos mais hipóteses sobre a f de modo a garantir a convergência uniforme da série de Fourier.

Proposição 3.26. *Seja f periódica de período $2L$ com primeira derivada contínua e a segunda derivada $\mathcal{L}^1$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente.*

Demonstração. Note que a série de Fourier de f é dada por (3.5)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Daí, como as funções seno e cosseno são limitadas temos

$$\left| a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \left| a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| + \left| b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.16, podemos majorar a série $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Isto é, temos uma p-série com $p > 1$, ou seja, uma série convergente. Logo, pelo teste da comparação para séries numéricas segue que a série também converge. Portanto, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série de Fourier de f converge uniformemente e absolutamente para f . $\square$

Vejamos agora como garantir a convergência enfraquecendo as hipóteses sobre a função f .

Teorema 3.27 (Primeiro Teorema Sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira $\mathcal{L}^2$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente.*

Demonstração. Assim como visto na Proposição anterior, basta garantir a convergência da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \quad (3.27)$$

Com efeito, suponha que f seja periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira $\mathcal{L}^2$. Então, utilizando as relações obtidas na demonstração da Proposição 3.15 temos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Segue que $a_n = \frac{-L}{n\pi} b'_n$ e $b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n$, sendo a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de f' . Logo, a soma parcial da série (3.27) é majorada por

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{-L}{k\pi} b'_k \right| + \left| \frac{L}{k\pi} a'_k \right| \right) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|).$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz para vetores do $\mathbb{R}^n$ obtemos

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right)^{1/2}.$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz em $\mathbb{R}^2$, temos $(|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ e utilizando esta desigualdade obtemos

$$\frac{L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n 2(|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right)^{1/2}.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{L\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right)^{1/2}.$$

Perceba que a primeira série é convergente, pois é uma p-série com $p > 1$. Por outro lado, tomando a soma parcial da segunda série, temos a soma de termos não-negativos, ou seja, a soma parcial é monótona e sua limitação é garantida pela Desigualdade de Bessel (3.22), pois

$$\begin{aligned} \frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a'_k)^2 + (b'_k)^2] &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \\ \sum_{k=1}^{\infty} [(a'_k)^2 + (b'_k)^2] &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{(a'_0)^2}{2} \\ \left[\sum_{k=1}^{\infty} [(a'_k)^2 + (b'_k)^2] \right]^{1/2} &\leq \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{(a'_0)^2}{2} \right]^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, é convergente e consequentemente a série (3.27) converge pelo teste da comparação. Portanto, pelo Teste M. de Weierstrass a série de Fourier de f converge uniformemente e absolutamente para f . $\square$

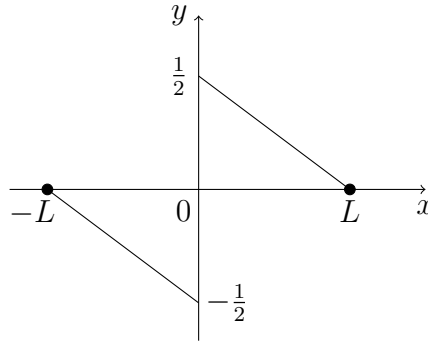
Note que o teorema anterior necessita que a função seja contínua em toda a reta, enquanto a primeira derivada pode conter pontos de descontinuidade e até mesmo se tornar ilimitada nas vizinhanças de pontos isolados. Além disso, se f for descontínua em um ponto, então a série de Fourier não pode convergir uniformemente em qualquer intervalo que o contém, uma vez que isto contrariaria a Proposição 1.46. Em outras palavras, para ter convergência uniforme da série de Fourier, necessariamente f deve ser contínua.

Entretanto, o próximo teorema garante que basta f ser contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f nesse intervalo $[a, b]$. Mas antes de prosseguir, necessitamos de um resultado auxiliar.

Lema 3.28. *Seja ψ a função periódica de período $2L$ definida por:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{se } -L \leq x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Figura 3.1: Gráfico da função ψ no intervalo $[-L, L]$



Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Então, a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Note que para $0 < x \leq L$ temos $-L \leq -x < 0$

$$\psi(-x) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = -\psi(x),$$

ou seja, ψ é uma função ímpar e neste caso temos uma série de senos. Então,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{1}{L^2} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{1}{L^2} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\cos(n\pi) + \cos(0)] - \frac{1}{L^2} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{L^2} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Tomando $u = x$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, ou seja, $du = dx$ e $v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Logo, integrando por partes na segunda temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L^2} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{1}{L^2} \left[-\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{1}{L^2} \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{L^2} \frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi L} \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{1}{n\pi}.$$

Logo, a série de Fourier da função ψ é dada por

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.28)$$

Sendo assim, basta provarmos que para qualquer $\delta > 0$, a série (3.28) converge uniformemente para $0 < \delta \leq |x| \leq L$. Para isso, mostraremos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}, \quad (3.29)$$

converge uniformemente para $\varepsilon > 0$ arbitrário e $\theta \in [\varepsilon, \pi]$. Pois, ao tomar a parte imaginária e fazendo $\theta = \frac{\pi x}{L}$ obtemos a série (3.28).

Seja $E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ de modo que

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k e^{ij\theta} - \sum_{j=1}^{k-1} e^{ij\theta} \right) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)]. \quad (3.30)$$

Além disso,

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} e^{ij\theta} \right) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \left(\sum_{l=1}^j e^{il\theta} \right) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta).$$

Agora, utilizando a *fórmula de Abel de adição por partes*. Isto é, se (a_n) e (b_n) são duas sequências e $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ temos

$$\sum_{k=m}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + \frac{1}{n+1} B_n - \frac{1}{m} B_{m-1}.$$

Considerando $a_n = \frac{1}{n}$ e $B_n = E_n(\theta)$ em (3.30)

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)] = \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (3.31)$$

Por outro lado, utilizaremos um argumento semelhante ao realizado para obter o valor de $S_n(\theta)$ em (3.14). Então, por (3.24) e como a norma de um número complexo $|e^{i\theta}| = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, neste caso para $0 < \theta < 2\pi$ temos

$$|E_n(\theta)| = \left| \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{|e^{i\theta}| + |-e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{i\theta/2}| |e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}|} = \frac{1}{\sin(\theta/2)},$$

Portanto, de (3.31) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| &= \left| \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) \right| + \left| \frac{1}{n+1} E_n(\theta) \right| + \left| -\frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin(\theta/2)} \left[\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Logo, para $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ e m suficientemente grande temos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \sin(\varepsilon/2)} < \varepsilon.$$

Portanto, pelo critério de Cauchy, Teorema 1.38, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge uniformemente e consequentemente a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, para $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Teorema 3.29 (Segundo Teorema Sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ e com derivada primeira $\mathcal{L}^2$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. Sejam $x_1, \dots, x_k$, os pontos de descontinuidade de f em $[-L, L)$ e $w_1, \dots, w_k$ os saltos de f nesses pontos de descontinuidade, ou seja, $w_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$, com $j = 1, \dots, k$.

Então, para j fixado, a função $w_j\psi(x - x_j)$, sendo ψ definida como no Lema 3.28, é descontínua em pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, com $n = 0, 1, \dots$ e o salto nesses pontos é w_j . Sendo assim, definimos uma nova função $f(x) - w_j\psi(x - x_j)$ que é contínua nesses pontos e em todos os pontos em que f é contínua.

Desse modo, construímos uma função com menos descontinuidades que a original e para eliminar todas as descontinuidades basta repetir o processo k vezes e obtemos a seguinte função:

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j).$$

Dessa forma, g é contínua para todo x . Portanto, pelo Teorema 3.27, a série de Fourier de g converge uniformemente para g em toda reta. E mais, podemos escrever f como:

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j).$$

Logo, a série de Fourier da função f é a soma das séries de Fourier de g e $\psi(x - x_j)$, para $j = 1, \dots, k$. Daí, note que pelo Lema 3.28 a série de Fourier da função $\psi(x - x_j)$ converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contém pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, com $n = 0, 1, \dots$. Então, a série de Fourier da função f converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contém pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, com $n = 0, 1, \dots$ e $j = 1, \dots, k$, que são os pontos de descontinuidade de f . Isso completa a demonstração do Teorema. $\square$

3.1.6 Unicidade da Série de Fourier

Nos capítulos seguintes estaremos interessados em obter unicidade das soluções. Então, se faz necessário falar da unicidade da série de Fourier, objetivo central dessa seção. Em particular, abordaremos a identidade de Parseval e introduziremos o sistema trigonométrico. Entretanto, antes de prosseguir, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.30. *Se $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, L])$ definimos*

$$(f|g) = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx, \quad (3.32)$$

sendo $\overline{g(x)}$ o complexo conjugado de $g(x)$, $x \in [0, L]$. Então, (3.32) é um produto interno

no espaço $C_{\mathbb{C}}([0, L])$ de todas as funções contínuas $[0, L] \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $(f|f) \geq 0$, $\forall f \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$;
- (ii) $(f|f) = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$;
- (iii) $(\alpha f + g|h) = \alpha(f|h) + (g|h)$, $\forall f, g, h \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- (iv) $(f|g) = \overline{(g|f)}$, $\forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$.

Demonstração. Vamos utilizar a definição do produto interno e propriedades dos números complexos.

(i) Note que $\forall f \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$ temos que:

$$(f|f) = \int_0^L f(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^L |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

(ii) Perceba que $(f|f) = 0$ se, e somente se,

$$\int_0^L f(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^L |f(x)|^2 dx = 0,$$

ou seja, $|f(x)|^2 = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$.

(iii) $\forall f, g, h \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ obtemos:

$$\begin{aligned} (\alpha f + g|h) &= \int_0^L (\alpha f + g)(x) \overline{h(x)} dx \\ &= \int_0^L [\alpha f(x) + g(x)] \overline{h(x)} dx \\ &= \int_0^L \alpha f(x) \overline{h(x)} + g(x) \overline{h(x)} dx \\ &= \int_0^L \alpha f(x) \overline{h(x)} dx + \int_0^L g(x) \overline{h(x)} dx \\ &= \alpha \int_0^L f(x) \overline{h(x)} dx + \int_0^L g(x) \overline{h(x)} dx \\ &= \alpha(f|h) + (g|h). \end{aligned}$$

(iv) $\forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, b])$ segue que:

$$\overline{(g|f)} = \overline{\int_0^L g(x) \overline{f(x)} dx} = \int_0^L \overline{g(x) \overline{f(x)}} dx = \int_0^L \overline{g(x)} f(x) dx = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx = (f|g).$$

□

O teorema a seguir é um resultado importante no estudo das séries de Fourier, pois relaciona a integral do módulo ao quadrado de uma função com a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier na mesma função. Introduziremos o resultado tanto na sua forma complexa quanto na sua forma real.

Teorema 3.31. *Sejam $f, g \in C_{per}(2L)$ e suponha que f é diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{per}(2L)$. Então,*

$$\frac{1}{2L} (f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Sendo $(\cdot|\cdot)$ definido em (3.32) e $c_n(f)$ e $c_n(g)$ são, respectivamente, os coeficientes de Fourier complexos das funções f e g . Em particular, vale a identidade de Parseval

$$\frac{1}{2L} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,$$

com $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$, para todo $f \in C_{per}(2L)$.

Demonstração. De fato, pelo Teorema 3.25, a série de Fourier de f dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\pi x/L}$$

converge uniformemente. Então, utilizando a expressão (3.32) e a Proposição 1.48 obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2L}(f|g) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\pi x/L} \right] \overline{g(x)} dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \int_{-L}^L \overline{g(x)} e^{in\pi x/L} dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \int_{-L}^L \overline{g(x) e^{-in\pi x/L}} dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \overline{\left[\int_{-L}^L g(x) e^{-in\pi x/L} dx \right]} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}.
 \end{aligned}$$

Em particular, tomando $g \equiv f$ segue que

$$\frac{1}{2L} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

□

Corolário 3.32. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e periódicas de período $2L$ com f diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos e $f' \in SC_{per}(2L)$. Então,*

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} a_0(f)a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)],$$

sendo $a_n(f)$ e $b_n(f)$ os coeficientes de Fourier de f e $a_n(g)$ e $b_n(g)$ os coeficientes de Fourier de g .

Demonstração. De fato, como estamos sob as hipóteses do Teorema 3.31, então f e g satisfazem

$$\frac{1}{2L}(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Uma vez que estamos com funções reais temos que a seguinte igualdade é válida:

$$\frac{1}{2L}(f|g) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx.$$

Por outro lado, como $c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ e $c_n(g) = \frac{a_n(g) - ib_n(g)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(f) \overline{c_n(g)} + c_0(f) \overline{c_0(g)} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} \\ &= c_0(f) \overline{c_0(g)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}. \end{aligned}$$

Daí, note que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \right) \left(\frac{a_n(g) + ib_n(g)}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} [a_n(f)a_n(g) + a_n(f)ib_n(g) - ib_n(f)a_n(g) - i^2b_n(f)b_n(g)] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)a_n(g) + i(a_n(f)b_n(g) - b_n(f)a_n(g)) + b_n(f)b_n(g)] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)] + \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)b_n(g) - b_n(f)a_n(g)). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \right) \left(\frac{a_n(g) - ib_n(g)}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} [a_n(f)a_n(g) - a_n(f)ib_n(g) + ib_n(f)a_n(g) - i^2b_n(f)b_n(g)] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)a_n(g) + i(-a_n(f)b_n(g) + b_n(f)a_n(g)) + b_n(f)b_n(g)] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)] + \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n(f)b_n(g) + b_n(f)a_n(g)). \end{aligned}$$

Como queremos apenas a parte real, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx &= c_0(f)\overline{c_0(g)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} \\ &= \frac{1}{4}a_0(f)a_0(g) + \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)] \\ &= \frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)]. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.33 (Identidade de Parseval). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ com f diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos e $f' \in SC_{per}(2L)$. Então,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (3.33)$$

Demonstração. Note que f satisfaz as hipóteses do Corolário 3.32, então basta tomar $f \equiv g$ e obtemos (3.33). □

Observação 3.34. Note que, o Teorema 3.31 é válido para situações mais gerais. Por exemplo, se $f \in \mathcal{L}^2([-L, L])$, a demonstração pode ser encontrada em [2]. Sendo este caso utilizado a seguir para provar a unicidade das séries de Fourier.

Agora vejamos as definições e mais um resultado auxiliar necessário para demonstrar a unicidade das séries de Fourier.

Definição 3.35 (Sistema Ortonormal). Um conjunto $\{\psi_n\}$ de funções $\mathcal{L}^2([-L, L])$ é chamado sistema ortogonal se para $n \neq m$ temos $\int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$ e $\int_{-L}^L \psi_n^2(x)dx = c_n \neq 0$. Se $c_n = 1$ para todo n , então dizemos que é um sistema ortonormal.

Exemplo 3.36. Como consequência das relações de ortogonalidade (3.2), (3.3) e (3.4) temos

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \dots, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \dots,$$

é um sistema ortogonal e

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \dots, \quad (3.34)$$

é um sistema ortonormal.

Definição 3.37 (Sistema Ortonormal Completo). Dizemos que um sistema ortonormal é completo se para toda função $f \in \mathcal{L}^2([-L, L])$ e para todo n tivermos

$$\int_{-L}^L f \psi_n = 0. \quad (3.35)$$

Então, $f(x) = 0$ para todo x em que f é contínua.

Teorema 3.38. *O sistema trigonométrico (3.34) é completo.*

Demonstração. Seja f uma função periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^2([-L, L])$. Se f satisfaz (3.35), então para todo n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

Isto é, todos os coeficientes de Fourier de f se anulam. Logo, utilizando a relação (3.33) da Identidade de Parseval obtemos

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0.$$

Afirmção: $f = 0$ para todo x em que f é contínua. De fato, suponha por contradição que existe um ponto de continuidade x_0 de f e $f(x_0) \neq 0$. Neste caso vai existir um intervalo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ com $\delta > 0$, onde $f(x) \neq 0$. Logo,

$$0 < \int_I |f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0,$$

o que é um absurdo pois a primeira integral não seria nula. Portanto, $f(x) = 0$ para todo x em que f é contínua. $\square$

Com isto, podemos garantir que a expressão da série de Fourier de uma função f é única, mais precisamente.

Teorema 3.39 (Unicidade da Série de Fourier). *Sejam f e g funções periódicas de período $2L$ e $\mathcal{L}^2([-L, L])$. Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então $f(x) = g(x)$ em todos os pontos de continuidade de f e g .*

Demonstração. De fato, definimos uma nova função $h = f - g$. Como f e g possuem os mesmos coeficientes de Fourier, segue que

$$\int_{-L}^L h \psi_n = 0$$

para todas as ψ_n do sistema trigonométrico (3.34). Portanto, pelo Teorema 3.38, temos $h = 0$ e consequentemente $f = g$ em todos os pontos de continuidade. $\square$

Capítulo 4

Equação do Calor

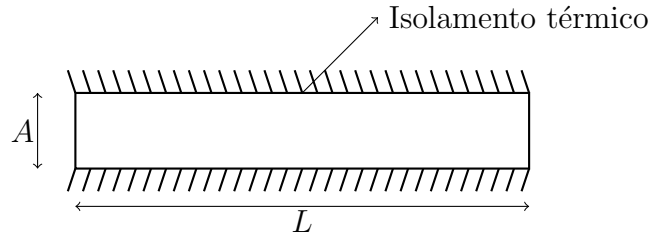
É sabido que a teoria das séries de Fourier foi desenvolvida no início do século XIX, por Jean-Baptiste Joseph Fourier, através do estudo da propagação de calor em uma barra, cuja dinâmica pode ser modelada por uma equação diferencial parcial, conhecida como equação do calor. Então, neste capítulo, estamos interessados em analisar com detalhes o problema que motivou o estudo destas séries.

Desse modo, dividimos o capítulo em quatro partes, na primeira seção abordaremos a dedução da equação do calor e introduziremos condições de contorno e condições iniciais para o problema. Em seguida, discutiremos o problema da condução do calor com condições de fronteira homogênea e posteriormente trabalharemos com outras condições de fronteira. Sendo nosso objetivo principal obter a existência e a unicidade de solução para estes problemas.

4.1 Dedução da Equação do Calor

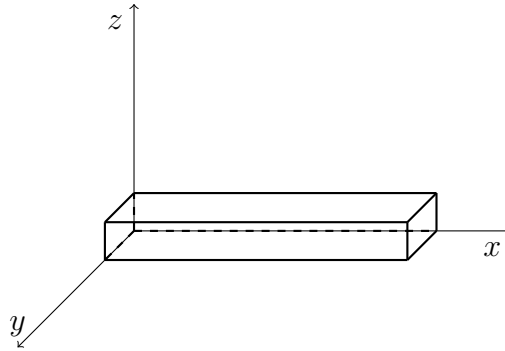
Para entendermos melhor o problema da condução do calor e consequentemente deduzir a equação, suponha que temos uma barra de comprimento L , feita de um material condutor uniforme de calor e com seções transversais de área A , com grandezas físicas constantes em cada seção transversal, mas podendo variar de uma seção para outra. Além disso, supomos que a superfície lateral da barra está isolada termicamente, ou seja, não existe transferência de calor com o meio ambiente, enquanto nas extremidades, a barra permite a transferência de calor.

Representaremos por $u(x, t)$, a função que indica a temperatura em um ponto de

Figura 4.1: Barra de comprimento L 

Fonte: Produzido pelo autor (2025)

abscissa x no instante de tempo t , ou seja, a temperatura independe das coordenadas espaciais y e z .

Figura 4.2: Barra colocada sobre o eixo x 

Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Então, para deduzir a EDP que a função $u(x, t)$ deve satisfazer, vamos utilizar a seguinte lei:

Definição 4.1 (Lei do Resfriamento de Fourier). Sejam P_1 e P_2 duas placas de áreas iguais a A , mantidas constantes às temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente. Se posicionarmos P_1 e P_2 paralelamente a uma distância d , então ocorrerá passagem de calor da placa mais quente para a placa mais fria. A quantidade de calor por uma unidade de tempo transferida de uma placa para a outra é dada por

$$Q = \frac{\kappa A |T_1 - T_2|}{d},$$

onde κ (de dimensões $\text{cal}/\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$) é a condutibilidade térmica do material entre as placas.

Note que não podemos utilizar diretamente a lei do resfriamento de Fourier 4.1, pois a temperatura nas seções varia com o tempo. Então, precisamos introduzir a grandeza

fluxo de calor através de uma seção x , num instante t do seguinte modo: tomamos duas seções transversais da barra localizadas em x e $x + d$, e, fixado um instante t , utilizamos a lei do resfriamento de Fourier 4.1 para determinar a troca instantânea de calor. Isto é,

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\kappa A |u(x, t) - u(x + d, t)|}{d} = \kappa A \left| \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - u(x + d, t)}{d} \right| = \kappa A \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (4.1)$$

Então, definimos o fluxo de calor através de uma seção x , num instante t da seguinte forma:

Definição 4.2. O fluxo de calor na direção positiva do eixo x é definido por:

$$q(x, t) = -\kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (4.2)$$

Observação 4.3. O sinal de menos em (4.2) surge a partir da análise em (4.1), a saber:

(i) Se u cresce com x , pelo teste da primeira derivada $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, então

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = \kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Entretanto, o calor fluir para esquerda e q deve ser negativo;

(ii) Se u decresce com x , então pelo teste da primeira derivada, $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$. Então,

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = -\kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Entretanto, o calor fluir para direita e q deve ser positivo. Portanto, o fluxo de calor na direção positiva do eixo x é pela expressão (4.2).

Observação 4.4. O fluxo de calor é apenas na direção longitudinal, pois o material da barra é uniforme e ela está isolada termicamente na lateral. Então, esse é um problema de condução do calor em apenas uma dimensão.

Consequentemente, fixado um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + \delta$. Utilizaremos o fluxo de calor (4.2) para determinar a quantidade de calor q que entra, no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$. Isto é, a quantidade de calor que entra em x_0 e a quantidade de

calor que sai em $x_0 + \delta$

$$\begin{aligned}
 q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} [q(x_0, t) - q(x_0 + \delta, t)] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[-\kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) - (-\kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \delta, t)) \right] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \kappa A \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \delta, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] dt.
 \end{aligned}$$

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \delta, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t).$$

Logo, a quantidade de calor q que entra é dada por

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx dt. \quad (4.3)$$

Por outro lado, a quantidade de calor absorvida é diretamente proporcional ao calor específico da substância c , a massa m e a variação de temperatura ΔT . Sendo c a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a temperatura de um grama dessa substância, com m dada pela multiplicação da área A pela densidade da substância ρ . Logo,

$$q = \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho A \Delta T dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho A [u(x, t_0 + \tau) - u(x, t_0)] dx.$$

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dt = u(x, t_0 + \tau) - u(x, t_0).$$

Sendo assim, q também pode ser escrito como

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho A \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt. \quad (4.4)$$

Então, igualando as expressões (4.3) e (4.4) para q , temos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho A \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt.$$

Utilizando propriedades das integrais obtemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [\kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - c\rho A \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)] dx dt = 0. \quad (4.5)$$

Como a expressão (4.5) é válida para todo $t_0 > 0$, para todo $0 < x_0 < L$ e para todos os $\tau > 0$ e $\delta > 0$. Pela arbitrariedade desses pontos, podemos concluir que isso só acontece quando a expressão dentro da integral seja igual a zero para todo x e t , ou seja,

$$\kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - c\rho A \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0.$$

Logo, reorganizando temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Portanto, sendo $\alpha^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$ (de dimensões cm^2/s) a constante de difusibilidade térmica, obtemos a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (4.6)$$

Esta equação representa a lei de variação de temperatura $u(x, t)$ numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente. Dessa forma, a temperatura $u(x, t)$ da barra obedece à equação do calor.

Entretanto, esta equação possui diversas soluções, por exemplo, considerando a função $u(x, t) = c$ ou $u(x, t) = cx$, com c constante, é notório que são soluções. Então, precisamos de outras condições em relação a barra, em particular, a temperatura inicial da barra e o que ocorre nas suas extremidades.

Uma vez que a distribuição de temperatura deve depender da temperatura inicial ao longo da barra, então, a condição inicial do problema é dada por

$$u(x, 0) = f(x),$$

com $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada que descreve a temperatura nos vários pontos da barra no instante $t = 0$.

Por outro lado, também estamos interessados no que acontece nas extremidades da barra, pois isto influencia no valor de $u(x, t)$. Então, vejamos que existem diversos tipos de condições de fronteira para um problema de condução do calor, a saber:

(i) Extremidades Mantidas a Temperatura Conhecida. Neste caso, podemos ter as extremidade da barra mantidas a temperaturas constantes. Logo, temos as seguintes condições de fronteira

$$u(0, t) = h_0, \quad u(L, t) = h_1.$$

Sendo h_0 e h_1 temperaturas conhecidas. Ou ainda, podemos ter um caso mais complexo, quando se conhece a variação de temperatura em uma ou em ambas as extremidades. Assim, as condições de fronteira ficam

$$u(0, t) = h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t).$$

Sendo $h_0(t)$ e $h_1(t)$ para $t > 0$ as temperaturas conhecidas.

(ii) Extremidades Isoladas Termicamente. Neste caso, as extremidades da barra estão isoladas termicamente, ou seja, o fluxo de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos. Daí, pela equação (4.2) obtemos que as condições fronteira são

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

(iii) Outras Condições de Fronteira. Podemos ter o caso em que existe transferência de calor entre as extremidades da barra e o meio ambiente. Neste caso, considere u_0 a temperatura do meio ambiente, então as condições de fronteiras são regidas pela lei

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = e\{u(0, t) - u_0\}, \quad -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = e\{u(L, t) - u_0\}.$$

Sendo e uma constante, dita emissividade, característica do par constituído pelo material da barra e pelo meio ambiente. Ou ainda, podemos ter uma combinação de duas quaisquer das condições anteriores, por exemplo, podemos ter uma extremidade com uma temperatura conhecida enquanto a outra está isolada termicamente, ou seja,

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

4.2 O Problema da Condução do Calor Com Condições de Fronteira Homogênea

Nesta seção estudaremos um problema inicial de condução do calor em uma barra, considerando tanto suas condições de fronteira quanto suas condições iniciais. Utilizaremos o método de Fourier para encontrar a solução do problema e posteriormente determinar sua unicidade.

Inicialmente, consideremos os conjuntos $\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L, t > 0\}$ e $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$. Então, o problema da condução do calor em uma barra de comprimento L , cujas extremidades são mantidas a uma temperatura constante de 0° e com uma distribuição inicial de temperatura $f(x)$, consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\overline{\mathcal{R}}$ que satisfaça às seguintes condições:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Entretanto, antes de prosseguir, para determinar o candidato a solução precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.5. *Considere o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned}\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) &= 0, \quad 0 < x < L \\ \varphi(0) &= 0 = \varphi(L).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Então, os autovalores λ do problema (4.8) são sempre soluções reais positivas.

Demonstração. Note que queremos um valor de λ para o qual o problema (4.8) tenha solução não trivial. Em particular, as soluções não triviais correspondentes são as autofunções correspondentes ao autovalor λ .

Inicialmente, vamos admitir soluções complexas, ou seja, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor e φ uma autofunção associada, $\varphi \in C_{\mathbb{C}}^2((0, L)) \cap C_{\mathbb{C}}([0, L])$.

Daí, como $\varphi'' = -\lambda\varphi$ existem os limites

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) &= -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi = -\lambda\varphi(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi''(x) &= -\lambda \lim_{x \rightarrow L^-} \varphi = -\lambda\varphi(L) = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, como φ é contínua em $[0, L]$ segue que,

$$\begin{aligned}-\lambda \int_0^x \varphi(y) dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \varphi''(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\varphi'(x) - \varphi'(a)], \\ -\lambda \int_x^L \varphi(y) dy &= \lim_{b \rightarrow L^-} \int_x^b \varphi''(y) dy = \lim_{b \rightarrow L^-} [\varphi'(b) - \varphi'(x)].\end{aligned}$$

Logo, existem os limites $\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a)$, $\lim_{b \rightarrow L^-} \varphi'(b)$.

Com essas propriedades podemos integrar as funções φ'' e φ' em $[0, L]$, e com $\varphi'' = -\lambda\varphi$ obtemos,

$$\lambda(\varphi|\varphi) = (\lambda\varphi|\varphi) = (-\varphi''|\varphi) = - \int_0^L \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx = - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \int_a^b \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx$$

Tomando $u = \overline{\varphi}$ e $\varphi''(x)dx = dv$ segue que $du = \overline{\varphi'(x)}dx$ e $\varphi'(x) = v$. Logo, integrando por partes e utilizando o Lema 3.30 temos

$$\begin{aligned}- \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \int_0^L \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \left[\varphi'(x) \overline{\varphi(x)} \Big|_a^b - \int_0^L \varphi'(x) \overline{\varphi'(x)} dx \right] \\ &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} [\varphi'(b) \overline{\varphi(b)} - \varphi'(a) \overline{\varphi(a)}] + \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx \\ &= \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx = (\varphi'|\varphi') \geq 0.\end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, então $\int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx = 0$, ou seja, $\varphi'(x) = 0$ e isso implica que para todo $x \in [0, L]$ temos $\varphi(x) = c$, com c constante. Entretanto, $\varphi(0) = 0 = \varphi(L)$, então a única solução constante do problema (4.8) seria $\varphi \equiv 0$. Portanto, $\lambda(\varphi|\varphi) = (\varphi'|\varphi') > 0$ implica em $\lambda > 0$. Além disso, $\lambda \in \mathbb{R}$, pois

$$\lambda(\varphi|\varphi) = (\lambda\varphi|\varphi) = (-\varphi''|\varphi) = (\varphi| - \varphi'') = \overline{\lambda}(\varphi|\varphi).$$

□

Assim, dando continuidade, para determinar o candidato a solução do problema 4.7 vamos utilizar o método da separação de variáveis, ou seja, procuramos soluções da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$. Daí, note que da condição de fronteira $u(0, t) = u(L, t) = 0$ temos $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ e $u(L, t) = F(L)G(t) = 0$.

Note que $F(0) = F(L) = 0$ para todo $t > 0$. De fato, suponha por contradição que $F(0) \neq 0$. Então, como $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ obtemos $G(t) \equiv 0$, o que implica em $u(x, t) \equiv 0$. Desse modo, $u(x, t) \equiv 0$ é solução da equação do calor e satisfaz às condições de fronteira, então para u ser solução do PVIF (4.7), deve satisfazer também a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ e isso só ocorre quando $f(x) \equiv 0$. Entretanto, não estamos interessados em $f(x) \equiv 0$, e portanto, $F(0) = 0$ para todo $t > 0$. E, de maneira análoga obtemos $F(L) = 0$ para todo $t > 0$.

Por outro lado, queremos que u satisfaça a equação do calor (4.6), então vamos calcular suas derivadas parciais. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= F(x)G'(t); \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= F'(x)G(t); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= F''(x)G(t).\end{aligned}$$

Daí, substituindo na equação do calor (4.6) e admitindo que $F(x)$ e $G(t)$ nunca se anulam, obtemos

$$F(x)G'(t) = \alpha^2 F''(x)G(t) \iff \frac{1}{\alpha^2} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Note que um lado está apenas em função de x e o outro apenas em função de t , ou seja, ambos os lados independem de x e de t e têm que serem iguais a uma mesma constante que denotaremos por $-\lambda$. Então, obtemos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned}\frac{F''(x)}{F(x)} &= -\lambda \iff F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad 0 < x < L, \\ F(0) &= F(L) = 0,\end{aligned}\tag{4.9}$$

e

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda \iff G'(t) + \lambda \alpha^2 G(t) = 0, \quad t \geq 0.\tag{4.10}$$

Pelo Lema 4.5, a EDO (4.9) só tem solução não trivial se λ for um real positivo. Então,

basta considerar $\lambda > 0$ e a solução geral real da EDO (4.9) é da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Sendo c_1 e c_2 constantes. Impondo as condições de contorno $F(0) = F(L) = 0$ temos

$$0 = F(0) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}0) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}0) \iff c_1 = 0.$$

Por outro lado, como $c_1 = 0$ obtemos

$$F(L) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) \iff c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como queremos $c_2 \neq 0$, impomos $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, ou seja, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, onde n é um inteiro não nulo, e portanto, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n \in \mathbb{N}$. Logo, λ_n são os autovalores do problema dado e $F_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ são as autofunções do problema dado, com $x \in [0, L]$ e $n \in \mathbb{N}$, pois como a função seno é ímpar, os valores negativos de n implicariam em um múltiplo de F_n .

Agora, analisaremos a EDO (4.10). Temos $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n \in \mathbb{N}$, então a solução geral da EDO (4.10) é da forma

$$G_n(t) = d_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}.$$

Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $b_n = c_n d_n$ e obtemos para $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$ a função

$$u_n(x, t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}.$$

Observação 4.6. Por um momento, deixando de lado o rigor matemático sobre os problemas de convergência e diferenciabilidade termo a termo, u_n satisfaz a equação do calor, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) &= -b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}; \\ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) &= \frac{n\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}; \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{n^2\pi^2}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t)$. Ressaltamos que, mais adiante, veremos em quais condições isto é válido.

Observação 4.7. Perceba que u_n satisfaz as condições de contorno, pois

$$\begin{aligned} 0 = u_n(0, t) &= b_n \sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = b_n \sin(0) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \\ 0 = u_n(L, t) &= b_n \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = b_n \sin(n\pi) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \end{aligned}$$

Portanto, $u_n(0, t) = u_n(L, t) = 0$.

Dessa forma, pelo Princípio da Superposição, Proposição 2.13, a combinação linear de soluções é também uma solução. Em outras palavras,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.11)$$

também satisfaz a equação do calor e as condições de contorno. Entretanto, para resolver o PVIF (4.7) a função (4.11) deve satisfazer a condição inicial, ou seja, para $x \in [0, L]$ temos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 0/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.12)$$

Portanto, o candidato a solução do problema é a função $u(x, t)$ definida em (4.11), sendo b_n os coeficientes de Fourier da função (4.12) dada em $[0, L]$, e estendida para $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Logo,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Além disso, como estamos com um PVIF precisamos relacionar a condição de contorno e a condição inicial. Neste caso, basta tomar $t = 0$ na condição de contorno e obtemos $f(0) = u(0, 0) = 0$ e $f(L) = u(L, 0) = 0$, ou seja, f precisa satisfazer a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(L)$ para $x \in [0, L]$.

Observação 4.8. Perceba que nem toda função é uma solução aceitável para o problema, pois queremos garantir que o problema seja bem posto, ou seja, garantir a existência e unicidade da solução, além da sua dependência nas condições de contorno e condições

iniciais. Por exemplo, a função abaixo satisfaz o PVIF (4.7)

$$u(x, t) = \begin{cases} 2001, & t > 0 \text{ e } 0 < x < L, \\ 0, & t > 0 \text{ e } x = 0 \text{ ou } x = L, \\ f(x), & t = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

De fato, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e $u(x, 0) = f(x)$. Entretanto, os valores para $t > 0$ não tem nenhuma relação com os valores iniciais de $f(x)$ nem com as condições de fronteira.

Desse modo, precisamos definir o que se entende por solução do PVIF (4.7) e, neste caso, temos dois sentidos de solução.

Definição 4.9 (Sentido (I) de Solução do PVIF (4.7)). Uma função $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ é uma solução do PVIF (4.7) se ela for contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, se tiver derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ em $\mathcal{R}$, e se satisfaz às três relações em (4.7).

Apesar da definição anterior exigir que o dado inicial $f(x)$ seja uma função contínua e $f(0) = f(L) = 0$, existem situações em que isso não ocorre, por exemplo, uma barra cuja temperatura inicial é constante $f(x) = 50^\circ C$. Ou ainda, duas barras do mesmo material, uma a $50^\circ C$ e outra a $100^\circ C$ postas em contato por uma das extremidades, ao olharmos como um sistema constituído de uma única barra, a temperatura inicial é uma função descontínua.

Então, para atender esse tipo de condição inicial, precisamos abdicar da igualdade de $f(x)$ e sua série de Fourier. Entretanto, ainda podemos calcular os coeficientes de Fourier para uma classe muito grande de funções f . Desse modo, considerando $\widehat{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, t > 0\}$, definimos quando a função $u(x, t)$ pode ser solução do PVIF (4.7) em um sentido mais fraco.

Definição 4.10 (Sentido (II) de Solução do PVIF (4.7)). Uma função contínua $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ é uma solução do PVIF (4.7) se para toda função $\varphi \in SC([0, L])$ tivermos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx. \end{cases} \quad (4.13)$$

Em outras palavras, a condição inicial é satisfeita em um sentido médio, pois é melhor falar de temperatura média na vizinhança de um ponto x do que falar da temperatura no próprio ponto.

Observação 4.11. Note que existe uma relação entre as duas definições. Em particular, a definição 4.10 é uma extensão da definição 4.9. Em outras palavras, se o PVIF possui solução do tipo I a solução é do tipo II.

De fato, basta verificar que a terceira condição em (4.13) é satisfeita. Para isso, considere $\varphi(x)$ uma função seccionalmente contínua e I_j , com $j = 1, \dots, k$ intervalos disjuntos que formam uma partição de $[0, L]$ de modo que φ seja contínua em cada um destes intervalos. Daí, para cada I_j , uma vez que $u(x, t)$ e $\varphi(x)$ são contínuas no compacto, $u(x, t)\varphi(x)$ é uniformemente contínua no conjunto $\{(x, t); x \in I_j, 0 \leq t \leq 1\}$ o que implica em

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{I_j} u(x, t)\varphi(x)dx = \int_{I_j} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)\varphi(x)dx = \int_{I_j} f(x)\varphi(x)dx.$$

Veremos a seguir que a nossa função u definida em (4.11) é solução do PVIF (4.7) no sentido (II), mas na demonstração desse fato precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.12. *Seja $f \in \mathcal{L}^2([0, L])$. Então, para $j = 0, 1, 2, \dots$, as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^j c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.14)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^j c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.15)$$

convergem uniformemente em qualquer sub-retângulo de $\widehat{\mathcal{R}}$:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t); 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L, 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\}.$$

Demonstração. De fato, Note que

$$|c_n| = \left| \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx.$$

Como f é $\mathcal{L}^2([0, L])$, ela também é $\mathcal{L}^1([0, L])$, então existe constante $M = \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx$

tal que $|c_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| n^j c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right| &\leq M n^j e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t_1 / L^2} \\ \left| n^j c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right| &\leq M n^j e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t_1 / L^2}. \end{aligned}$$

Tomando $\sigma = \pi^2 \alpha^2 t_1 / L^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^j e^{-(n+1)^2 \sigma}}{n^j e^{-n^2 \sigma}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^j e^{-n^2 \sigma - 2n\sigma - \sigma}}{n^j e^{-n^2 \sigma}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^j e^{-n^2 \sigma} e^{-2n\sigma} e^{-\sigma}}{n^j e^{-n^2 \sigma}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^j e^{-2n\sigma} e^{-\sigma}}{n^j} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^j e^{-2n\sigma} e^{-\sigma} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^j e^{-2n\sigma} e^{-\sigma} \right| = 0 < 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, em virtude do teste da razão para séries numéricas garantimos a convergência da série $M \sum_{n=1}^{\infty} n^j e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t_1 / L^2}$. Então, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, as séries de funções (4.14) e (4.15) convergem uniformemente e absolutamente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$. $\square$

Desse modo, temos o primeiro resultado que garante a existência de solução para o PVIF (4.7) em um sentido mais fraco.

Teorema 4.13. *Se $f \in \mathcal{L}^2([0, L])$, então a expressão (4.11) define uma função em $\widehat{\mathcal{R}}$ que é solução do PVIF (4.7) no sentido (II).*

Demonstração. Note que pelo Lema 4.12, a convergência uniforme da série (4.14) para $j = 0$, em sub-retângulos $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ implica que a expressão (4.11) define uma função contínua em $\widehat{\mathcal{R}}$, pois para cada n a série de funções é contínua em todo ponto $x \in [0, L]$. Então, basta mostrar que u definida em (4.11) satisfaça as condições em (4.13).

(i) u satisfaz a equação do calor. De fato, pelo Lema 4.12, temos uma série de funções continuamente diferenciável e, pela Proposição 1.47, podemos derivar termo a termo,

consequentemente obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{n\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{n^2 \pi^2}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}.\end{aligned}$$

O que nos garante que u satisfaz a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ em $\widehat{\mathcal{R}}$.

(ii) u satisfaz as condições de contorno. Com efeito,

$$\begin{aligned}0 = u(0, t) &= b_n \sin\left(\frac{n\pi \cdot 0}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} = b_n \sin(0) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \\ 0 = u(L, t) &= b_n \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} = b_n \sin(n\pi) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}.\end{aligned}$$

(iii) Se $\varphi \in SC([0, L])$, então, u satisfaz $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx$. De fato, sejam d_n os coeficientes de Fourier de $\varphi(x)$ estendida como uma função ímpar e periódica de período $2L$. Então, pela relação (3.32) temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \varphi(x) dx. \quad (4.16)$$

Por outro lado, para $t > 0$ temos

$$\int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x) dx.$$

Pela convergência uniforme em x da série e para $t > 0$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x) dx \\ \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n \frac{L}{2} d_n = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n d_n.\end{aligned} \quad (4.17)$$

Sendo assim, usando $0 \leq (|a| + |b|)^2 \iff |a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, segue para $t \geq 0$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n d_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| |d_n| \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \right] < \infty.$$

Onde utilizamos a Desigualdade de Bessel (3.22) para garantir a convergência das séries da direita. Portanto, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série do lado esquerdo converge uniformemente e absolutamente em $t \geq 0$. Então, ela define uma função contínua em t , pois para cada n a série é contínua em $t \geq 0$.

Por fim, pela convergência uniforme segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n d_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n d_n. \quad (4.18)$$

Logo, por (4.16), (4.17) e (4.18) segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} b_n d_n = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n d_n = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.$$

Portanto, a expressão (4.11) define uma função em $\widehat{\mathcal{R}}$ que é solução do PVIF (4.7) no sentido (II) 4.10. $\square$

Observação 4.14. Note que a expressão (4.11) define uma função $u(x, t)$ que é infinitamente diferenciável em $\widehat{\mathcal{R}}$ e conseqüentemente o fenômeno da condução do calor é altamente regularizador/suavizador. Em outras palavras, a condução do calor em uma barra, dada por uma função quase arbitrária, tende rapidamente a se uniformizar e ser descrita por uma função C^∞ .

Com certas mudanças nas hipóteses da função f podemos garantir que u definida em (4.11) é solução do PVIF (4.7) no sentido (I). Entretanto, antes de prosseguir precisaremos do seguinte resultado auxiliar para a demonstração do teorema.

Lema 4.15. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ estendida para $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$ tal que a derivada f exista em $[0, L]$ e seja $\mathcal{L}^2$. Então, a série dos coeficientes de Fourier de f converge absolutamente.*

Demonstração. Sejam b_n os coeficientes de Fourier de f . Note que para garantir a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|,$$

precisamos de uma expressão ligando b_n com os coeficientes de Fourier de f' . Dessa forma, como f é contínua no compacto, então é integrável. Logo, tomando $u = f(x)$ e

$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = dv$ temos $du = f'(x)dx$ e $-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = v$ e integrando por partes em b_n obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \left[-\frac{2}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} f(x) \right]_0^L - \frac{2}{L} \int_0^L -\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} f'(x) dx \\ b_n &= \frac{L}{n\pi} \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.2, estendemos f' como uma função par e periódica de período, $2L$. Assim, a série de Fourier de f' é da forma

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sendo $d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ os coeficientes de Fourier de f' . Consequentemente $b_n = \frac{L}{n\pi} d_n$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{L}{n\pi} d_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{L}{n\pi} \right| |d_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty.$$

Pois, a primeira série é uma p-série com $p > 1$, ou seja, convergente. Enquanto que para a segunda série, pela desigualdade de Bessel (3.22) temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f'(x)|^2 dx.$$

Como por hipótese $f' \in \mathcal{L}^2$, a série também é convergente. Portanto, a série dos coeficientes de Fourier de f converge absolutamente. $\square$

Assim, temos o segundo resultado que garante a existência de solução para o PVIF (4.7).

Teorema 4.16. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e tal que a derivada f' exista em $[0, L]$ e seja $\mathcal{L}^2$. Então, a expressão (4.11) define uma função contínua em $\overline{\mathcal{D}}$, que é solução do PVIF 4.7 no sentido (I).*

Demonstração. Note que f é contínua no compacto, ou seja, é limitada e integrável.

Então, pela Proposição 1.57, f é $\mathcal{L}^2([0, L])$. Assim, pelo Teorema 4.13, a expressão (4.11) é solução do PVIF (4.7) no sentido (II). Dessa forma, basta provar que a expressão (4.11) define uma função contínua em $t \geq 0$.

De fato, pelo Lema 4.15, para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}$ temos

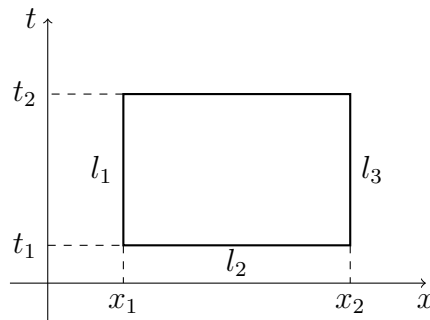
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Portanto, pelo Teste de M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a expressão (4.11) converge uniformemente e absolutamente em $\overline{\mathcal{R}}$. Além disso, como para cada n a série é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, segue da Proposição 1.46 que ela define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$. Sendo assim, a expressão (4.11) define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ que é solução do PVIF (4.7) no sentido (I). $\square$

Uma vez determinada a existência de solução para o problema, estamos interessados em garantir a unicidade dessa solução. Para isto, introduziremos o Princípio do Máximo-Mínimo, resultado fundamental no estudo das EDPs. Em geral, muitos problemas possuem soluções satisfazendo o Princípio do Máximo-Mínimo o que nos permite obter informações sobre a própria solução.

Teorema 4.17 (Princípio do Máximo-Mínimo). *Seja $u(x, t)$ uma função contínua no retângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t); x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$, e tal que $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para $x_1 < x < x_2$ e $t_1 < t < t_2$. Então, o máximo de u é assumido em um dos seguintes lados de $\overline{\mathcal{R}}$: $l_1 = \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\}$, $l_2 = \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\}$ e $l_3 = \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$.*

Figura 4.3: Retângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12}$



Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Demonstração. Sejam M o valor máximo de u em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ e m o máximo de u em $A = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, neste caso vamos mostrar que $M = m$.

Suponha, por contradição, que $M > m$, pois não podemos ter $m > M$, uma vez que $A \subset \overline{\mathcal{R}}_{12}$. Daí, considere $(x_0, t_0) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} - A$, o ponto onde $u(x, t)$ assume seu valor máximo. Então, para $L = x_2 - x_1$, definimos a seguinte função

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2}(x - x_0)^2.$$

Daí, note que em A o máximo de u é m , ou seja,

$$v(x, t) < m + \frac{(M - m)L^2}{4L^2} < M.$$

Por outro lado, $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$ e conseqüentemente o valor máximo de v é assumido em um ponto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} - A$. Daí, calculando as derivadas parciais de v obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - m}{4L^2} 2(\bar{x} - x_0) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - m}{2L^2}. \end{aligned}$$

Então, como u satisfaz a equação do calor temos

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}) = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}) - \alpha^2 \frac{M - m}{2L^2} < \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}).$$

O que é um absurdo, pois em virtude das condições de máximo para funções de várias variáveis, no ponto de máximo $(\bar{x}, \bar{t})$, devemos ter $\frac{\partial v}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{t}) < 0$. Portanto, u assume seu valor máximo em A , ou seja, $M = m$. $\square$

Observação 4.18. Note que o valor mínimo também é atingido em A , pois $-u$ também satisfaz a equação do calor e o mínimo de u é igual a $-\max(-u)$.

Com este resultado, podemos garantir a unicidade da solução do sentido (I) e no sentido (II), mais precisamente.

Teorema 4.19. *Seja f uma função definida em $[0, L]$. Então, a solução do PVIF (4.7) no sentido (I), caso exista, é única.*

Demonstração. Suponha que $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sejam duas soluções do PVIF (4.7) no

sentido (I) 4.9. Então, $u = u_1 - u_2$ é uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) &= u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0, \\ u(L, t) &= u_1(L, t) - u_2(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0.\end{aligned}$$

Isto é, u satisfaz o seguinte PVIF

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

Então, dado $T > 0$, u é contínua no retângulo $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ e satisfaz a equação do calor em $0 < x < L$ e $0 < t < T$. Portanto, pelo Princípio do Máximo-Mínimo, Teorema 4.17, obtemos $0 \leq u(x, t) \leq 0$, para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}$ e pela arbitrariedade de $T > 0$ temos $u(x, t) = 0$, ou seja, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. $\square$

Teorema 4.20. *Seja f uma função $\mathcal{L}^2([0, L])$. Então, a solução do PVIF (4.7) no sentido (II) é única.*

Demonstração. Demonstraremos que u é solução para o PVIF 4.7 no sentido (II) se, e somente se, u é igual a (4.11).

Como visto anteriormente, a expressão (4.11) é solução para o PVIF 4.7 no sentido (II). Então, basta mostrar que se u for uma solução do PVIF 4.7 no sentido (II) ela é igual a (4.11).

De fato, para cada $t > 0$ fixado, a função $u(x, t)$ é ímpar, periódica de período $2L$, contínua e derivável para $x \in [0, L]$. Então, para $0 < x < L$ e $t > 0$, segue que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sendo $b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ os coeficientes de Fourier de u para cada $t > 0$ fixado. Então, como $\frac{\partial u}{\partial t}$ é contínua em $t > 0$ e $x \in [0, L]$, derivando em relação a t

obtemos

$$b'_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Uma vez que u é solução do PVIF 4.7, u satisfaz a equação do calor, ou seja,

$$b'_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2\alpha^2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Dessa forma, tomando $u = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$ temos $du = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx$ e $v = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. Então, integrando $b'_n(t)$ por partes obtemos

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \frac{2\alpha^2}{L} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx \\ &= -\frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx. \end{aligned}$$

Daí, como u é solução do PVIF 4.7 temos $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Então, tomamos $u = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $dv = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$ temos $du = -\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx$ e $v = u(x, t)$. Assim, integrando $b'_n(t)$ por partes temos

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= -\frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \left[u(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx \\ &= -\frac{2\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^3} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t). \end{aligned}$$

Ou ainda, para $t > 0$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{b'_n(t)}{b_n(t)} &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \\ \int \frac{b'_n(t)}{b_n(t)} dt &= \int -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} dt \\ \ln(b_n(t)) &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2} + p_n \\ b_n(t) &= \beta_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2}, \end{aligned}$$

com p_n uma constante e $\beta_n = e^{p_n}$. Logo, para $0 < x < L$ e $t > 0$ obtemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Isto é, basta mostrar que $\beta_n = b_n$. Com efeito, multiplicando u por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ para $m \geq 1$ fixado obtemos

$$u(x, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Então, integrando ambos os lados e utilizando a terceira relação de ortogonalidade (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_0^L \beta_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{L}{2} \beta_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{2} \beta_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 0 / L^2} \\ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \beta_m \\ b_m &= \beta_m. \end{aligned}$$

Assim, se u for uma solução do PVIF 4.7 no sentido (II) 4.10 ela é igual a (4.11) o que implica na unicidade da solução. $\square$

Ainda como consequência do Princípio do Máximo-Mínimo 4.17, podemos analisar a dependência contínua da solução nos dados iniciais do problema.

Teorema 4.21 (Continuidade da Solução Com os Dados Iniciais). *Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$*

funções contínuas em $[0, L]$, para os quais os PVIF

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f_i(x), \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, têm soluções u_1 e u_2 , no sentido (I). Então,

$$\max_{(x,t) \in \mathcal{R}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0, L]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Demonstração. De fato, considere a função $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, que por sua vez é contínua em $[0, L]$, pois é a diferença de funções contínuas em $[0, L]$. Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(0, t) &= u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0, \\ v(L, t) &= u_1(L, t) - u_2(L, t) = 0, \\ v(x, 0) &= u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f_1(x) - f_2(x).\end{aligned}$$

Isto é, v satisfaz o seguinte PVIF

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= f_1(x) - f_2(x), \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

Sendo assim, dado $T > 0$, v é contínua no retângulo $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ e satisfaz a equação do calor em $0 < x < L$ e $0 < t < T$. Logo, pelo Princípio do Máximo-Mínimo, Teorema 4.17, temos

$$\begin{aligned}\max_{(x,t) \in \overline{\mathcal{R}}} |v(x, t)| &\leq \max_{x \in [0, L]} |v(x, 0)| \\ \max_{(x,t) \in \overline{\mathcal{R}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \max_{x \in [0, L]} |f_1(x) - f_2(x)|.\end{aligned}$$

□

Em outras palavras, pequenas variações na condição inicial acarretam pequenas variações para cada $t > 0$ fixo na solução final. Assim, com o teorema anterior e o próximo lema podemos obter um novo teorema acerca da existência e unicidade de solução do PVIF (4.7).

Lema 4.22. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.19)$$

converge uniformemente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Demonstração. De fato, dado um $\varepsilon > 0$, como a função exponencial é decrescente temos

$$\left| e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right| \leq e^{-n^2\pi^2\alpha^2 \varepsilon/L^2}.$$

Considerando $\sigma = \pi^2\alpha^2\varepsilon/L^2$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-(n+1)^2\sigma}}{e^{-n^2\sigma}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{-n^2\sigma - 2n\sigma - \sigma + n^2\sigma} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-\sigma(2n+1)}| = 0 < 1.$$

Logo, em virtude do teste da razão para séries numéricas garantimos a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 \varepsilon/L^2}$. Então, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série de funções (4.19) converge uniformemente e absolutamente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$, para qualquer que seja $\varepsilon > 0$, ou seja, (4.19) converge uniformemente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. $\square$

Note que no Teorema 4.16, a existência da solução foi obtida por meio da hipótese de que f' exista e seja $\mathcal{L}^2([0, L])$, enquanto que o próximo teorema exige um pouco menos para garantir a existência da solução.

Teorema 4.23. *Seja $f(x)$ uma função contínua em $[0, L]$ com $f(0) = f(L) = 0$. Então, existe uma e somente uma solução do PVIF 4.7 no sentido (I).*

Demonstração. Note que precisamos apenas provar a existência da solução, uma vez que a unicidade é garantida pela aplicação do Teorema 4.19.

Com efeito, f é contínua no compacto, ou seja, é limitada e integrável. Então, pela Proposição 1.57, f é $\mathcal{L}^2([0, L])$. Logo, pelo Teorema 4.13, o PVIF (4.7) possui solução no sentido (II), em particular, essa solução é dada em $\widehat{\mathcal{H}}$ por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

Uma vez que a série converge uniformemente em y , para (x, t) em $\widehat{\mathcal{R}}$ fixado, pela Proposição 1.48, a solução u pode ser escrita como

$$u(x, t) = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] f(y) dy.$$

Como essa expressão é válida para $(x, t) \in \widehat{\mathcal{R}}$, então em $\mathcal{R}$ obtemos

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) f(y) dy, \quad (4.20)$$

sendo

$$G(x, y, t) = \left[\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right].$$

E mais, a função $G(x, y, t)$ é contínua nas três variáveis para $t > 0$, pois é o produto de funções contínuas e, pelo Lema 4.22, a série converge uniformemente, consequentemente, a Proposição 1.46 garante a continuidade de G .

Por outro lado, tomamos uma sequência de funções continuamente diferenciáveis $f_k(x)$, com $f_k(0) = f_k(L) = 0$ tal que $\max_{x \in [0, L]} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Assim, para cada $k > 0$ temos o seguinte PVIF

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f_k(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

E em virtude do Teorema 4.16, o PVIF possui solução u_k , contínua em $\overline{\mathcal{R}}$. Dessa forma, podemos expressar a solução em $\widehat{\mathcal{R}}$ como

$$u_k(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) f_k(y) dy. \quad (4.21)$$

Logo, aplicando o Teorema 4.21, para k e l inteiros, obtemos

$$\max_{(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}} |u_k(x, t) - u_l(x, t)| \leq \max_{x \in [0, L]} |f_k(x) - f_l(x)|.$$

Isto é, existe uma função contínua $v(x, t)$ em $\overline{\mathcal{R}}$ tal que o seguinte limite é uniforme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = v(x, t). \quad (4.22)$$

Dessa forma, como f_k converge uniformemente para f , quando $k \rightarrow \infty$, por (4.21) e (4.22) obtemos em $\widehat{\mathcal{R}}$

$$v(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) f(y) dy. \quad (4.23)$$

Portanto, (4.20) e (4.23) implicam que $u(x, t) = v(x, t)$, em $\widehat{\mathcal{R}}$. Além disso, (4.22) implica que $v(x, 0) = f(x)$. Logo, a função $v(x, t)$, contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, é a solução do PVIF (4.7) no sentido (I). $\square$

4.3 O Problema da Condução do Calor Com Outras Condições de Fronteira

Nesta seção, estamos interessados em estudar o problema da condução do calor em uma barra de comprimento L , cujas extremidades estão isoladas termicamente e possui uma distribuição inicial de temperatura $f(x)$. Consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\overline{\mathcal{R}}$ que satisfaça às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Inicialmente vamos utilizar o método da separação de variáveis para determinar o candidato a solução do problema. Isto é, procuramos soluções da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$. Calculando suas derivadas parciais obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= F(x)G'(t); \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= F'(x)G(t); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= F''(x)G(t). \end{aligned}$$

Daí, note que da condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$, temos $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F'(0)G(t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = F'(L)G(t) = 0$.

Note que $F'(0) = F'(L) = 0$ para todo $t > 0$. De fato, suponha por contradição que $F'(0) \neq 0$. Então, como $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F'(0)G(t) = 0$ temos $G(t) \equiv 0$ e consequentemente $u(x, t) \equiv 0$. Sendo assim, $u(x, t) \equiv 0$ é solução da equação do calor e satisfaz às condições de fronteira, então para u ser solução do PVIF (4.24), deve satisfazer também a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ e isso só ocorre quando $f(x) \equiv 0$. Entretanto, não estamos interessados em $f(x) \equiv 0$ e, portanto, $F'(0) = 0$ para todo $t > 0$. E, de maneira análoga obtemos $F'(L) = 0$ para todo $t > 0$.

Por outro lado, substituindo na equação do calor temos $F(x)G'(t) = \alpha^2 F''(x)G(t)$. Assim, e admitindo que $F(x)$ e $G(t)$ nunca se anulam, obtemos

$$F(x)G'(t) = \alpha^2 F''(x)G(t) \iff \frac{1}{\alpha^2} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Perceba que um lado está apenas em função de x e o outro apenas em função de t , ou seja, ambos os lados independem de x e de t e têm que serem iguais a uma mesma constante que denotaremos por $-\lambda$. Então, obtemos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda &\iff F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad 0 < x < L, \\ F'(0) = F'(L) &= 0, \end{aligned} \tag{4.25}$$

e

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda \iff G'(t) + \lambda \alpha^2 G(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.26}$$

Note que de forma análoga ao Lema 4.5, se λ é um autovalor da EDO (4.25) com auto-função F , sendo complexa ou não, de classe C^1 , integrando de 0 a L temos

$$\lambda \int_0^L |F(x)|^2 dx = \lambda \int_0^L F(x) \overline{F(x)} dx = - \int_0^L F''(x) \overline{F(x)} dx.$$

Daí, tomamos $u = \overline{F(x)}$ e $dv = F''(x)dx$, ou seja, $du = \overline{F'(x)}dx$ e $v = F'(x)$. Então,

integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^L |F(x)|^2 dx &= - \left[F'(x) \overline{F(x)} \right]_0^L - \int_0^L F'(x) \overline{F(x)'} dx \\ &= -F'(L) \overline{F(L)} + F'(0) \overline{F(0)} + \int_0^L F'(x) \overline{F'(x)} dx \\ &= \int_0^L |F'(x)|^2 dx \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda \geq 0$ e analisaremos dois casos:

(i) Se $\lambda = 0$, então $\int_0^L |F'(x)|^2 dx = 0$ e como F deve satisfazer $F'(0) = F'(L) = 0$, obtemos $F' \equiv 0$ e conseqüentemente $F(x) = c_2$.

(ii) Se $\lambda > 0$, então a solução geral real da EDO 4.25 é da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Sendo c_1 e c_2 constantes, derivamos com relação a x e obtemos

$$F'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Daí, impondo as condições de contorno $F(0) = F(L) = 0$ temos

$$F'(0) = -\sqrt{\lambda}c_1 \sin(\sqrt{\lambda}0) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}0) \iff c_2 = 0.$$

Por outro lado, como $c_2 = 0$ obtemos

$$F'(L) = -\sqrt{\lambda}c_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) \iff -\sqrt{\lambda}c_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como queremos $c_2 \neq 0$, impomos $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, ou seja, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, onde n é um inteiro não nulo, e portanto, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n = 0, 1, \dots$. Logo, λ_n são os autovalores do problema dado e $F_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ são as autofunções do problema dado, com $x \in [0, L]$ e $n = 0, 1, \dots$.

Por fim, analisaremos na EDO (4.26) apenas os casos em que λ não resultou em uma solução identicamente nula. Isto é, os casos em que $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$. Logo,

(i) Se $\lambda = 0$, então $G'(t) = 0$ e a solução geral é da forma $G(t) = c_3$. Sendo assim temos a função $u_0(x, t) = c_2 c_3 = \frac{a_0}{2}$.

(ii) Se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n = 0, 1, \dots$, então a solução geral da EDO (4.26) é da forma

$$G_n(t) = d_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $a_n = c_n d_n$ e obtemos para $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$ a função

$$u_n(x, t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}.$$

Ou ainda,

$$u_n(x, t) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}.$$

Observação 4.24. Por um momento, deixando de lado o rigor matemático sobre os problemas de convergência e diferenciabilidade termo a termo, u_n satisfaz a equação do calor, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) &= -a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}; \\ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) &= -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}; \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{n^2\pi^2}{L} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t)$. Ressaltamos que, mais adiante, teremos as condições nas quais isso vale.

Observação 4.25. Perceba que u_n satisfaz as condições de contorno, pois

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u_n}{\partial x}(0, t) = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi \cdot 0}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin(0) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}, \\ 0 &= \frac{\partial u_n}{\partial x}(L, t) = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin(n\pi) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial u_n}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_n}{\partial x}(L, t) = 0$.

Dessa forma, pelo Princípio da Superposição, Teorema 2.13, a combinação linear de soluções é também uma solução. Em outras palavras,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.27)$$

também satisfaz a equação do calor e as condições de contorno. Contudo, para resolver o PVIF (4.24) a função (4.27) deve satisfazer a condição inicial, ou seja, para $x \in [0, L]$ temos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 0 / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.28)$$

Portanto, o candidato a solução do problema é a função $u(x, t)$ definida em (4.11), sendo a_n os coeficientes de Fourier da função (4.12) dada em $[0, L]$, e estendida para $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Logo, para $n = 0, 1, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

O teorema a seguir garante sob quais condições u definida em (4.27) é solução para o PVIF (4.24) em um sentido mais fraco.

Teorema 4.26. *Sejam $f \in \mathcal{L}^2([0, L])$ e f' seccionalmente diferenciável em $[0, L]$, com f' estendida como uma função ímpar e periódica de período $2L$. Então, a expressão (4.27) define uma função em $\widehat{\mathcal{H}}$ que é solução do PVIF (4.24) no sentido (II).*

Demonstração. Note que queremos que u , definida em (4.27), satisfaça as condições (4.13). De fato, pelo Lema 4.12, temos uma série de funções continuamente diferenciável e, pela Proposição 1.47, podemos derivar termo a termo obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{n^2 \pi^2}{L} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}. \end{aligned}$$

Isto é, u satisfaz a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ em $\widehat{\mathcal{H}}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin(0) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}, \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} = -\frac{n\pi}{L} a_n \sin(n\pi) e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, u satisfaz as condições de contorno. Por fim, note que se $\varphi \in SC([0, L])$, então,

u satisfaz $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx$. De fato, sejam d_n os coeficientes de Fourier de $\varphi(x)$ estendida como uma função par e periódica de período $2L$. Então, pela relação (3.32) temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \varphi(x) dx. \quad (4.29)$$

Por outro lado, para $t > 0$ temos

$$\int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x) dx.$$

Pela convergência uniforme em x da série e para $t > 0$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x) dx \\ \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n \frac{L}{2} d_n \\ \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \frac{L}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n d_n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Daí, usando que $0 \leq (|a| + |b|)^2$ então $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, obtemos para $t \geq 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n d_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |d_n| \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 \right] < \infty.$$

Sendo a convergência das séries da direita obtidas a partir da Desigualdade de Bessel (3.22). Desse modo, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série do lado esquerdo converge uniformemente e absolutamente em $t \geq 0$. Então, ela define uma função contínua em t , pois para cada n a série é contínua em $t \geq 0$.

Dessa forma, pela convergência uniforme temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n d_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n \quad (4.31)$$

Logo, por (4.29), (4.30) e (4.31) obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} a_n d_n \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Portanto, a expressão (4.27) define uma função em $\widehat{\mathcal{R}}$ que é solução do PVIF (4.24) no sentido (II). $\square$

Assim como visto na seção anterior, a partir de certas mudanças na hipótese de f podemos garantir a existência de solução no sentido (I), mas antes de prosseguir precisamos de um resultado auxiliar para a demonstração do teorema.

Lema 4.27. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ estendida para $\mathbb{R}$ de modo a ser par e periódica de período $2L$. É tal que a derivada f' exista em $[0, L]$ e seja seccionalmente contínua. Então, a série dos coeficientes de Fourier de f converge absolutamente.*

Demonstração. Seja a_n os coeficientes de Fourier de f . Note que para garantir a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

precisamos de uma expressão ligando a_n com os coeficientes de Fourier de f' . Logo, como f é contínua no compacto, então é integrável. Então, tomando $u = f(x)$ e $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ temos $du = f'(x) dx$ e $v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e integrando por partes em $[0, L]$ obtemos

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \left[f(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{2}{L} \int_0^L \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f'(x) dx \\ a_n &= -\frac{L}{n\pi} \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.2, estendemos f' como uma função ímpar e periódica de

período, $2L$. Assim, a série de Fourier de f' é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sendo $d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ os coeficientes de Fourier de f' . Consequentemente $a_n = -\frac{L}{n\pi} d_n$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| -\frac{L}{n\pi} d_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| -\frac{L}{n\pi} \right| |d_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 < \infty.$$

Pois, a primeira série é uma p-série com $p > 1$, ou seja, convergente. Enquanto, para a segunda série, pela desigualdade de Bessel 3.22 temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f'(x)|^2 dx.$$

Como por hipótese f' é seccionalmente contínua no compacto, então é limitada e integrável e, pela Proposição 1.57, temos $f' \in \mathcal{L}^2$ e consequentemente a série converge. Portanto, a série dos coeficientes de Fourier de f converge absolutamente. $\square$

Desse modo, temos um outro resultado sobre a existência de solução para o PVIF (4.24), sendo que este garante solução no sentido (I).

Teorema 4.28. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ tal que a derivada f' exista em $[0, L]$ e seja seccionalmente contínua. Então, a expressão (4.27) define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, que é solução do PVIF (4.24) no sentido (I).*

Demonstração. Note que f é contínua no compacto, ou seja, é limitada e integrável. Então, pela Proposição 1.57, $f \in \mathcal{L}^2([0, L])$. Assim, pelo Teorema 4.26, a expressão (4.27) é solução do PVIF (4.24) no sentido (II) 4.10. Sendo assim, basta provar que a expressão (4.27) define uma função contínua em $t \geq 0$.

Com efeito, pelo Lema 4.27, para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}$ temos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Portanto, pelo Teste de M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a expressão (4.27) converge

uniformemente e absolutamente em $\overline{\mathcal{R}}$. E mais, para cada n a série é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, então, pela Proposição 1.46, a série define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$.

Desse modo, a expressão (4.27) define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ que é solução do PVIF 4.24 no sentido (I) 4.9. $\square$

Garantida a existência de solução, a partir do Princípio do Máximo-Mínimo, Teorema 4.17, podemos garantir a unicidade dessa solução no sentido (I) e no sentido (II).

Teorema 4.29. *Seja f uma função definida em $[0, L]$. Então, a solução do PVIF (4.24) no sentido (I), caso exista, é única.*

Demonstração. Suponha que $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sejam duas soluções do PVIF (4.24) no sentido (I) 4.9. Então, $u = u_1 - u_2$ é uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0.\end{aligned}$$

Isto é, u satisfaz o seguinte PVIF

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

Então, dado $T > 0$, u é contínua no retângulo $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ e satisfaz a equação do calor em $0 < x < L$ e $0 < t < T$. Sendo assim, pelo Princípio do Máximo-Mínimo 4.17 obtemos $0 \leq u(x, t) \leq 0$, $\forall (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}$ e pela arbitrariedade de $T > 0$ temos $u(x, t) = 0$, ou seja, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. $\square$

Teorema 4.30. *Seja f uma função $\mathcal{L}^2([0, L])$. Então, a solução do PVIF (4.24) no sentido (II) é única.*

Demonstração. Queremos mostrar que u é solução para o PVIF (4.24) no sentido (II) se, e somente se, u é igual a (4.27).

Como demonstrado anteriormente, a expressão (4.27) é solução para o PVIF (4.24) no sentido (II). Assim, nos resta mostrar que se u for uma solução do PVIF (4.24) no sentido (II) ela é igual a (4.27).

Com efeito, para cada $t > 0$ fixado a função $u(x, t)$ é par, periódica de período $2L$, contínua e derivável para $x \in [0, L]$. Então, para $0 < x < L$ e $t > 0$ temos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sendo, para cada $T > 0$ fixado, $a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ os coeficientes de Fourier de u . Uma vez que $\frac{\partial u}{\partial t}$ é contínua em $t > 0$ e $x \in [0, L]$, derivando em relação a t , obtemos

$$a'_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Daí, como u é solução do PVIF (4.24), u satisfaz a equação do calor, ou seja,

$$a'_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2\alpha^2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Logo, tomando $u = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$ temos $du = -\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx$ e $v = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$. Então, utilizando que u é solução do PVIF (4.24) e satisfaz as condições de contorno, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = 0$, integramos $a'_n(t)$ por partes e obtemos

$$\begin{aligned} a'_n(t) &= \frac{2\alpha^2}{L} \left[-\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx \\ &= \frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx. \end{aligned}$$

Novamente, tomando $u = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $dv = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$ temos $du = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx$ e $v = u(x, t)$. Assim, integrando $a'_n(t)$ por partes temos

$$\begin{aligned} a'_n(t) &= \frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \left[u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2} \int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} dx \\ &= -\frac{2\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^3} \int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} a_n(t). \end{aligned}$$

Ou ainda, para $t > 0$ segue que

$$\begin{aligned}\frac{a'_n(t)}{a_n(t)} &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \\ \int \frac{a'_n(t)}{a_n(t)} dt &= \int -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} dt \\ \ln(a_n(t)) &= -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2} + p_n \\ a_n(t) &= \gamma_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2},\end{aligned}$$

com $\gamma_n = e^{p_n}$. Logo, para $0 < x < L$ e $t > 0$ obtemos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Dessa forma, basta mostrar que $\gamma_n = a_n$. De fato, multiplicando u por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, para $m \geq 1$ fixado, temos

$$u(x, t) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Então, integrando ambos os lados e utilizando a segunda relação de ortogonalidade (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_0^L \gamma_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{L}{2} \gamma_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 t / L^2}.\end{aligned}$$

Portanto, quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x, 0) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{2} \gamma_m e^{-\alpha^2 m^2 \pi^2 0 / L^2} \\ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \gamma_m.\end{aligned}$$

Logo, $a_m = \gamma_m$, em outras palavras, se u for uma solução do PVIF (4.24) no sentido (II) ela é igual a (4.27) e, conseqüentemente, a solução é única. $\square$

Observação 4.31. Um outro tipo de condição de fronteira que podemos nos deparar são as chamadas condições de fronteira não homogêneas, ou seja, quando a temperatura nas extremidades é não nula. Isto é, dadas as funções f , h_0 e h_1 , o problema consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\overline{\mathcal{R}}$ que satisfaça às seguintes condições:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L.\end{aligned}\tag{4.32}$$

A ideia central da resolução consiste em utilizar uma mudança de variável e reduzi-lo a outro problema de condução de calor com condições de fronteira homogênea que já foram estudadas. Entretanto, apesar do novo problema possuir condições de fronteira homogênea, ele possui o que chamamos de equação do calor não homogênea e para essa equação temos problemas distintos dos apresentados.

Capítulo 5

Equação de Laplace

A equação de Laplace foi inicialmente introduzida no artigo de Euler, [1], em 1752, que trata de hidrodinâmica. No entanto, a equação recebeu o nome de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), em reconhecimento ao seu estudo aprofundado das soluções da equação enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço em 1782.

A equação de Laplace aparece em diversos problemas da física matemática e de outras áreas que não dependem do tempo, uma vez que ela descreve processos estacionários. Desse modo, apresentamos uma motivação clássica para o estudo da equação de Laplace a partir do problema da densidade de substâncias, como discutido na referência [9]. Em particular, neste momento, deixaremos de lado um rigor matemático mais formal, focando em uma abordagem mais intuitiva.

Este modelo está relacionado à densidade de uma substância específica, de densidade u , que se encontra em equilíbrio dentro de um corpo Ω . Assim, para qualquer subconjunto V de Ω , o fluxo de u ao longo de V é igual a zero. Isto é, considerando F o fluxo de densidade e $\hat{n}$ o vetor normal unitário em ∂V segue que

$$\int_{\partial V} F \cdot \hat{n} dS = 0.$$

Logo, pelo Teorema da Divergência 1.73 temos que

$$\int_V \nabla \cdot F dX = 0.$$

Assim, pela arbitrariedade de V , temos $\nabla \cdot F = \operatorname{div}(F) = 0$ em Ω .

Por outro lado, em diversas aplicações físicas, é natural que a densidade u se

desloque da região de maior concentração para a de menor concentração. Dessa forma, considerando $c_\Omega > 0$ a constante que representa as propriedades de condutividade do Ω obtemos

$$F = -c_\Omega \nabla u \iff \nabla \cdot F = -c_\Omega (\nabla \cdot \nabla u) = 0.$$

Portanto, $\Delta u = 0$, pois $c_\Omega > 0$.

Observação 5.1. Ressaltamos que a hipótese de que $F = -c_\Omega \nabla u$ com $c_\Omega > 0$ constante, representa uma condição de homogeneidade do corpo Ω , pois estamos desprezando a possibilidade de meio heterogêneo. Entretanto, em problemas mais reais, se Ω é heterogêneo, a constante c_Ω é substituída por uma matriz $a_{ij}(X)$ definida positiva.

Desse modo, este capítulo está dividido em três subtópicos, sendo que nos dois primeiros estamos interessados em estudar problemas de Dirichlet envolvendo a equação de Laplace, a saber: o problema de Dirichlet em um retângulo e o problema de Dirichlet em um disco unitário. Enquanto no terceiro, utilizaremos o princípio do máximo para funções harmônicas a fim de garantir a unicidade da solução para estes problemas.

5.1 O Problema de Dirichlet no Retângulo

Nesta seção estamos interessados em discutir o problema de Dirichlet cujo interior é um retângulo, conseqüentemente a fronteira dessa região se compõe de quatro segmentos. Assim sendo, seja $f \in C(\partial\Omega)$ dada e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o interior de um retângulo. Então, temos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em} \quad (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad y \in [0, b]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sendo $f_1, f_2 \in C([0, a])$ e $g_1, g_2 \in C([0, b])$ funções dadas, satisfazendo: $f_1(0) = g_1(0)$, $f_1(a) = g_2(0)$, $f_2(0) = g_2(b)$ e $f_2(a) = g_1(b)$.

Com intuito de resolver este problema, precisamos transformá-lo em quatro problemas de Dirichlet, sendo cada um deles com valor zero em três das funções que aparecem nas condições de contorno em (5.1). Então, a solução do problema (5.1) é a soma dessas

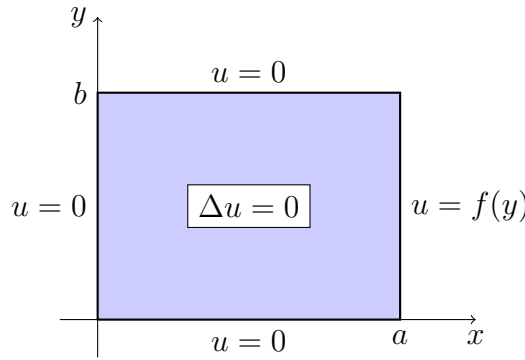
outras quatro soluções dos problemas parciais.

Desse modo, o problema geral (5.1) se reduz a resolver isoladamente cada um dos problemas parciais. Assim, a fim de solucionar o problema (5.1), focamos em um caso particular, uma vez que os demais seguem de forma análoga.

Então, seja $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ e que f se anula para $y = 0$, $y = b$ e $x = 0$, sendo $f \in C([0, b])$ e satisfazendo $f(0) = 0 = f(b)$. Então, temos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em} \quad (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Figura 5.1: Um caso particular do problema de Dirichlet em um retângulo



Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Para determinar o candidato a solução do problema vamos utilizar o método da separação de variáveis, ou seja, procuramos soluções da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Assim, como queremos que u satisfaça a equação de Laplace, vamos calcular suas derivadas parciais. Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= X'(x)Y(y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= X''(x)Y(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= X(x)Y'(y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= X(x)Y''(y). \end{aligned}$$

Daí, substituindo na equação de Laplace e admitindo que $X(x)$ e $Y(y)$ nunca se anulam

obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Perceba que um lado depende apenas de x enquanto o outro depende apenas de y , ou seja, ambos independem da variável e nesse caso são iguais a uma mesma constante que denotaremos por λ . Então, obtemos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \quad \text{em } (0, a) \\ X(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

e

$$\begin{aligned} Y''(y) + \lambda Y(y) &= 0, \quad \text{em } (0, b) \\ Y(0) &= 0 = Y(b). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pelo Lema 4.5, sabemos que o problema (5.4) só tem solução não trivial se λ for um real positivo. Então, tomando $\lambda = \sigma^2$ a solução geral é da forma

$$Y(y) = c_1 \cos(\sigma y) + c_2 \sin(\sigma y).$$

Sendo c_1 e c_2 constantes. Impondo as condições de contorno $Y(0) = Y(b) = 0$ temos

$$0 = Y(0) = c_1 \cos(\sigma 0) + c_2 \sin(\sigma 0).$$

Então, $c_1 = 0$ e, conseqüentemente,

$$Y(b) = c_2 \sin(\sigma b).$$

Logo, $c_2 \sin(\sigma b) = 0$ e como queremos $c_2 \neq 0$ impomos $\sin(\sigma b) = 0$, ou seja, $\sigma b = n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lambda = \sigma^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = \lambda_n$ são os autovalores do problema (5.4) e as funções $Y_n = B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $y \in [0, b]$ são as autofunções do problema (5.4), pois como a função seno é ímpar, os valores negativos de n implicaria em um múltiplo da Y_n .

Agora, analisaremos a EDO (5.3). Temos $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} > 0$ então a solução da EDO

é dada por

$$X(x) = c_3 e^{\sigma x} + c_4 e^{-\sigma x} = c_3 e^{n\pi x/b} + c_4 e^{-n\pi x/b}.$$

Logo, impondo a condição de contorno $X(0) = 0$ obtemos $c_2 = -c_1$. Sendo assim, usando o fato de que $2 \sinh(t) = e^t - e^{-t}$ temos

$$X_n = C_n (e^{n\pi x/b} - e^{-n\pi x/b}) = 2C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos $D_n = B_n C_n$ e obtemos

$$u_n(x, y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

Observação 5.2. Por um momento, deixando o rigor matemático sobre o problema de convergência e diferenciabilidade termo a termo, u_n satisfaz a equação de Laplace, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) &= D_n \frac{n\pi}{b} \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, y) &= D_n \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) &= D_n \frac{n\pi}{b} \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x, y) &= -D_n \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = 0$.

Observação 5.3. Note que u_n satisfaz as seguintes condições de contorno pois

$$\begin{aligned} 0 &= u_n(x, 0) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi 0}{b}\right) \\ 0 &= u_n(x, b) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi b}{b}\right) \\ 0 &= u_n(0, y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi 0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $u_n(x, 0) = u_n(x, b) = u_n(0, y) = 0$.

Sendo assim, pelo Princípio da Superposição 2.13, a combinação linear de soluções

é também uma solução, ou seja,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

também satisfaz a equação de Laplace e as condições de contorno vistas acima. Entretanto, para resolver o problema de Dirichlet (5.2) precisamos que u satisfaça a condição de contorno não homogênea para $y \in [0, b]$. Logo, impondo $u(a, y) = f(y)$ obtemos

$$f(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Uma vez que queremos expressar f como uma série de Fourier tomamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Daí, note que $D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$ é uma constante e $a \neq 0$, então $\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \neq 0$. Logo, pela Proposição 3.8, a igualdade é válida se os coeficientes coincidem, ou seja,

$$b_n = D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right).$$

Ou ainda,

$$D_n = \frac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}.$$

Portanto, para $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$ o candidato a solução do problema (5.2) é dado por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (5.5)$$

Sendo $b_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt$, $n \in \mathbb{N}$ os coeficientes de Fourier da função f definida em $[0, b]$ e estendida para todo o $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2b$.

Observação 5.4. Note que pelo teste da primeira derivada, a função seno hiperbólico é

estritamente crescente e, nesse caso, para todo $x \in [0, a]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$0 = \frac{\sinh\left(\frac{n\pi 0}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \leq \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \leq \frac{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} = 1.$$

Portanto, a série (5.5) converge se a série de Fourier de f convergir.

Por outro lado, a convergência da série das derivadas é mais complicada e para evitar a necessidade de muita diferenciabilidade de f vamos utilizar a expressão para b_n e reescrever (5.5) da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= \int_0^b f(t) \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sendo

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right). \quad (5.7)$$

A partir de agora, nosso objetivo é obter resultados acerca da função K definida em (5.7) que nos auxiliarão no principal teorema dessa seção.

Lema 5.5. *A função K definida por (5.7) está em $C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e satisfaz a equação de Laplace, ou seja, $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 0$.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que a série definida em (5.7) converge uniformemente em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qualquer que seja $\varepsilon \in (0, a)$. De fato, considere $0 \leq \bar{x} = \frac{\pi x}{b} < \bar{a} = \frac{\pi a}{b}$, então pelo fato de que a exponencial é uma função crescente obtemos

$$0 \leq \frac{\sinh(n\bar{x})}{\sinh(n\bar{a})} \leq \frac{e^{n\bar{x}} - e^{-n\bar{x}}}{e^{n\bar{a}} - e^{-n\bar{a}}} = \frac{e^{n\bar{x}}(1 - e^{-2n\bar{x}})}{e^{n\bar{a}}(1 - e^{-2n\bar{a}})} = e^{-n(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 - e^{-2n\bar{x}}}{1 - e^{-2n\bar{a}}} < e^{-n(\bar{a}-\bar{x})}.$$

Portanto, se $x \in [0, a - \varepsilon]$ temos

$$\frac{b}{2} \left| \frac{2 \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \right| \leq \left| \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \right| \leq e^{-n(\bar{a}-\bar{x})}.$$

Como a função exponencial é estritamente crescente, obtemos

$$e^{-n(\bar{a}-\bar{x})} = e^{-n(\pi a/b - \pi x/b)} < e^{-n(\pi a/b - \pi(a-\varepsilon)/b)} = e^{-n\pi\varepsilon/b}.$$

Logo,

$$\frac{b}{2} \left| \frac{2 \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \right| \leq e^{-n\pi\varepsilon/b}.$$

Daí, como a série $\sum e^{-n\pi\varepsilon/b}$ converge, pois é uma série geométrica com razão menor que um, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série (5.7) converge uniformemente. Uma vez que para cada n a série é contínua em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então, pela Proposição 1.46, K define uma função contínua em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qualquer que seja $\varepsilon \in (0, a)$ e, portanto, $K \in C([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Por outro lado, para verificar a diferenciabilidade, derivando a série em relação a x obtemos:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, y, t) = \frac{2n\pi}{b^2} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

Assim, como $2 \cosh t = e^t + e^{-t}$, para $x \in [0, a - \varepsilon]$, usando o fato da função exponencial ser estritamente crescente, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, y, t) \right| &\leq \frac{2n\pi}{b^2} e^{-n(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 + e^{-2n\bar{x}}}{1 - e^{-2n\bar{a}}} = \frac{2n\pi}{b^2} e^{-n(\pi a/b - \pi x/b)} \frac{1 + e^{-2n\pi x/b}}{1 - e^{-2n\pi a/b}} \\ &< \frac{2n\pi}{b^2} e^{-n(\pi a/b - \pi(a-\varepsilon)/b)} \frac{1 + e^{-2n\pi(a-\varepsilon)/b}}{1 - e^{-2n\pi a/b}} \\ &< \frac{2n\pi}{b^2} e^{-n\pi\varepsilon/b} \frac{2}{1 - e^{-\frac{2n\pi a}{b}}} = C n e^{-\alpha n}. \end{aligned}$$

Sendo C e α constantes positivas. Além disso, derivando em relação a t e a y obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t}(x, y, t) &= \frac{2n\pi}{b^2} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \\ \frac{\partial K}{\partial y}(x, y, t) &= \frac{2n\pi}{b^2} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).\end{aligned}$$

E prosseguindo de maneira análoga ao caso de x obtemos que,

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial K}{\partial t}(x, y, t) \right| &\leq Cne^{-\alpha n} \\ \left| \frac{\partial K}{\partial y}(x, y, t) \right| &\leq Cne^{-\alpha n}.\end{aligned}$$

Uma vez que para $i \in \mathbb{N}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^i e^{-\alpha(n+1)}}{n^i e^{-\alpha n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^i e^{-\alpha} \right| < 1.$$

Logo, em virtude do teste da razão para séries numéricas, a série $\sum n^i e^{-\alpha n}$ converge, então, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, as séries das derivadas

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial K}{\partial t} \quad \text{e} \quad \sum \frac{\partial K}{\partial y}$$

convergem uniformemente e absolutamente. Dessa forma, segue por indução que se $i \in \mathbb{N}$, com C e α contantes positivas obtemos

$$\left| \frac{\partial^i K}{\partial x^i} \right| \leq Cn^i e^{-\alpha n}, \quad \left| \frac{\partial^i K}{\partial t^i} \right| \leq Cn^i e^{-\alpha n}, \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^i K}{\partial y^i} \right| \leq Cn^i e^{-\alpha n}.$$

Portanto, as séries das derivadas de qualquer ordem convergem uniformemente em $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Usando indução, o Teorema 1.47 da derivação termo a termo para cada variável, e o fato de que $\varepsilon \in (0, a)$ é arbitrário, obtemos que $K \in C^\infty([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Por fim, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x}(x, y, t) &= \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, y, t) &= \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \\ \frac{\partial K}{\partial y}(x, y) &= \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x, y, t) &= -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).\end{aligned}$$

Isto é, K satisfaz a equação de Laplace, pois $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 0$. $\square$

Lema 5.6. *Seja $f \in C([0, b])$ diferenciável em $(0, b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, b])$ e suponha $f(0) = 0 = f(b)$. Então, a série em (5.5) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$. Além disso,*

$$u(x, y) = \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt, \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b]. \quad (5.8)$$

Demonstração. Seja F a extensão ímpar e periódica de período $2b$ de f . Dessa forma $F \in C_{per}(2b)$ e $F' \in SC_{per}(2b)$, então, pelo Teorema 3.25, a série $\sum c_n$ dos coeficientes de Fourier complexos de F converge absolutamente e uniformemente em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, como F é uma função ímpar e $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, obtemos que a série de Fourier real é uma série de senos e, portanto, os coeficientes complexos satisfazem $c_n = -\frac{ib_n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

E mais, como o seno é uma função ímpar e F também é, pela Proposição 1.14 item (ii), o produto entre elas é uma função par e como $F(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, b]$, utilizando a Proposição 1.16 item (i), obtemos

$$b_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt = \frac{1}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt.$$

Dáí, pela convergência absoluta de $\sum c_n$, obtemos que a série $\sum b_n$ também converge

absolutamente. Além disso, se $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ temos

$$\left| b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right| \leq |b_n|.$$

Portanto, a série (5.5) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$.

Por fim, basta provar que a expressão (5.8) é válida. Para isto, fixado $x \in [0, a]$, tomamos $0 < \delta < a - x$ e, pelo Lema 5.5, a série (5.7), que define K , converge uniformemente em $[0, a - \delta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $x \in [0, a - \delta]$. Logo, pela Proposição 1.48, podemos trocar a ordem da série com a integral, ou seja,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= \int_0^b f(t) \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt. \end{aligned}$$

□

De posse desses resultados, temos as ferramentas necessárias para provar a existência da solução para o problema (5.2), ou seja, demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 5.7. *Seja $f \in C([0, b])$ diferenciável em $(0, b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, b])$ e suponha $f(0) = 0 = f(b)$. Então a série em (5.5) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$, $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$ e u é solução de (5.2).*

Demonstração. Note que, pelo Lema 5.6, a série em (5.5) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$ e consequentemente $u \in C([0, a] \times [0, b])$. Por outro lado, pelo Lema 5.5, $K \in C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 0$. Então, utilizando o Teorema 1.63, a expressão obtida no Lema 5.6 e indução, obtemos $u \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$.

E mais, para todo $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \int_0^b f(t) \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x, y, t) \right] dt = 0.$$

Isto é, u satisfaz a equação de Laplace. Além disso, como $K_n(x, 0, t) = 0$, $K_n(x, b, t) = 0$ e $K_n(0, y, t) = 0$ quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$, $x, y, t \in \mathbb{R}$, u satisfaz as condições de contorno em $y = 0$, $y = b$ e $x = 0$. Por fim, como a série de Fourier de f converge uniformemente em $[0, b]$ então $u(a, y) = f(y)$ para todo $y \in [0, b]$. Portanto, u é solução de (5.2). $\square$

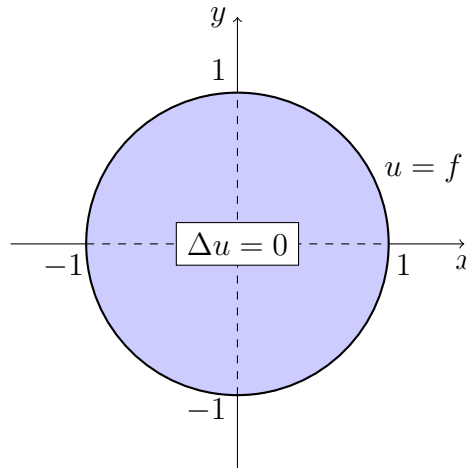
5.2 O Problema de Dirichlet no Disco Unitário

Nesta seção nosso objetivo é resolver o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f \in C(\partial\Omega). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Sendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ o disco unitário.

Figura 5.2: O problema de Dirichlet cujo interior é um disco unitário



Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Note que não podemos aplicar diretamente o método de separação de variáveis, pois só podemos utilizar o método quando a região de interesse Ω pode ser escrita como um produto cartesiano $\Omega = A \times B$.

Entretanto, o disco aberto pode ser escrito como um produto cartesiano em coordenadas polares. Dessa forma, vamos reescrever o problema (5.9) em coordenadas polares com $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, sendo $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1)$, ou seja, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e se $x \neq 0$ temos $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, ou ainda, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Desse modo, quando $r \neq 0$, tomamos $v(r, \theta) = u(x, y)$ e obtemos pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(\frac{-y}{y^2 + x^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{y^2}{y^2 + x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(\frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(\frac{x}{y^2 + x^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{x^2}{(y^2 + x^2)^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(\frac{-2xy}{y^2 + x^2} \right).\end{aligned}$$

Logo, usando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ segue que

$$0 = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (5.10)$$

Assim, definimos $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ e, conseqüentemente, $g \in C_{per}(2\pi)$, pois as funções componentes seno e cosseno são $C_{per}(2\pi)$. Portanto, procuramos $v(r, \theta)$ satisfazendo:

$$\begin{aligned}v &\in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R}), \\ v(r, \theta + 2\pi) &= v(r, \theta), \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R}, \\ r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in \mathbb{R}, \\ v(1, \theta) &= g(\theta).\end{aligned} \quad (5.11)$$

Observação 5.8. Note que a mudança de variável não modifica o tipo de equação, conforme a Proposição 2.28. Além disso, a mudança de coordenadas não funciona bem na origem, pois queremos que v seja de classe C^2 na origem com $v(0, \theta)$ independente de θ . Além disso, a complexidade da EDP em (5.11) é maior do que as trabalhadas anteriormente, pois possui coeficientes variáveis que se anulam em $r = 0$.

A fim de determinar o candidato a solução do problema (5.11), utilizando o método da separação de variáveis, procuramos soluções da forma $v(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$. Daí,

substituindo na EDP obtemos

$$r^2\varphi''(r)\psi(\theta) + r\varphi'(r)\psi(\theta) + \varphi(r)\psi''(\theta) = 0 \iff \frac{r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = \frac{-\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda.$$

Perceba que um lado está apenas em função de r e o outro apenas em função de θ e consequentemente eles são iguais a uma constante λ . Então, obtemos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned}\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) &= 0, \\ \psi(\theta + 2\pi) &= \psi(\theta),\end{aligned}\tag{5.12}$$

e

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0.\tag{5.13}$$

Note que prosseguindo de maneira análoga ao Lema 4.5, se λ é um autovalor de (5.12) com autofunção ψ , sendo complexa ou não, de classe C^1 , então integramos de 0 a 2π e obtemos:

$$\lambda \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^2 dt = \lambda \int_0^{2\pi} \psi(t) \overline{\psi(t)} dt = - \int_0^{2\pi} \psi''(t) \overline{\psi(t)} dt.$$

Tomando $u = \overline{\psi(t)}$ e $dv = \psi''(t)dt$, ou seja, $du = \overline{\psi'(t)}dt$ e $v = \psi'(t)$. Assim, integrando por partes segue que:

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^2 dt &= - \left[\psi'(t) \overline{\psi(t)} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \psi'(t) \overline{\psi'(t)} dt \right] \\ &= -\psi'(2\pi) \overline{\psi(2\pi)} + \psi'(0) \overline{\psi(0)} + \int_0^{2\pi} \psi'(t) \overline{\psi'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda \geq 0$ e analisaremos dois casos:

(i) Se $\lambda = 0$, então $\int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt = 0$, ou seja, $|\psi'(t)|^2 = 0$ o que implica que $\psi(t)$ é constante e é solução de (5.12).

(ii) Se $\lambda > 0$, então a solução geral da EDO em (5.12) é dada por:

$$\psi(\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Uma vez que, $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ então para todo $\theta \in \mathbb{R}$ obtemos

$$A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta + 2\sqrt{\lambda}\pi) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta + 2\sqrt{\lambda}\pi) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Logo, da periodicidade temos $\sqrt{\lambda} = n$, e, nesse caso, basta considerar a raiz positiva, ou seja, $n \in \mathbb{N}$. Portanto, os autovalores de (5.12) são da forma n^2 , $n \in \mathbb{Z}$ e as autofunções associadas são

$$\psi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Por outro lado, tomando $\lambda = n^2$ na equação (5.13) obtemos

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - n^2 \varphi(r) = 0. \quad (5.15)$$

Então, temos uma equação de Euler de segunda ordem e para resolver vamos procurar solução da forma $\varphi(r) = r^\alpha$, daí $\varphi'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ e $\varphi''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$. Substituindo na EDO obtemos $\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$, ou ainda, $\alpha^2 - n^2 = 0$ e isso implica que $\alpha = \pm n$. Logo, se $n \in \mathbb{N}$ então a solução geral de (5.15) é da forma

$$\varphi_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Entretanto, no caso em que $n = 0$ tomamos $w = \varphi'_0$ na equação (5.15) e obtemos

$$\begin{aligned} rw'(r) + w(r) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(rw) &= 0 \\ rw &= cte \\ \varphi'_0(r) = w &= \frac{D_0}{r}. \end{aligned}$$

Daí, integrando ambos os lados em relação a r segue que $\varphi_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r)$ e, portanto, a solução geral de (5.15) é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_n(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \varphi_0(r) &= C_0 + D_0 \ln(r). \end{aligned}$$

Uma vez que estamos interessados em soluções de (5.11) contínuas em $\overline{\Omega}$, queremos apenas

as soluções de (5.15) que são contínuas em $r = 0$, ou seja, as funções φ_n com $D_n = 0$, pois a função $\ln(r)$ não está definida em $r = 0$. Portanto, as soluções de (5.15) que estamos interessados são da forma

$$\varphi_n(r) = C_n r^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

Sendo assim, o candidato a solução do problema (5.11) é dado por

$$\begin{aligned} v_n(r, \theta) &= \varphi_n(r)\psi_n(\theta) = \varphi_n(r) = C_n r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ &= \varphi_n(r) = [A_n C_n \cos(n\theta) + B_n C_n \sin(n\theta)] r^n. \end{aligned}$$

Ou ainda, tomando $a_n = A_n C_n$ e $b_n = B_n C_n$ obtemos

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] r^n.$$

Ainda podemos simplificar a expressão para v utilizando a forma complexa das séries de Fourier, ou seja,

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} r^{|n|}. \quad (5.17)$$

Por fim, impondo a condição $v(1, \theta) = g(\theta)$, obtemos

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Dessa forma, os coeficientes de Fourier complexos da função g são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt. \quad (5.18)$$

Assim, usando a expressão para c_n podemos reescrever v da seguinte forma

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt e^{in\theta} r^{|n|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-t)} r^{|n|} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt = (g * P_r)(\theta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Note que $P_r(t)$ denota o núcleo de Poisson do disco unitário e é determinado por

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} r^{|n|}. \quad (5.20)$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que $v \in C^2([0, 1) \times \mathbb{R})$ e que $v(r, \theta) \rightarrow g(\theta)$ uniformemente quando $r \rightarrow 1^-$ é solução de (5.11). Pois, dessa forma, mostraremos que $u(x, y) = v(r, \theta)$ é solução do problema (5.9). Então, inicialmente vejamos propriedades relacionadas a função P_r .

Lema 5.9. *A série $P_r(t)$ definida por (5.20) converge uniformemente e absolutamente. Além disso,*

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}. \quad (5.21)$$

Demonstração. Como estamos no disco unitário temos $|re^{it}| = |r||e^{it}| < 1$ e

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} r^{|n|} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n.$$

Sendo que ambas são séries geométricas com razão $0 \leq r \leq 1$, ou seja são séries convergentes. Então, pelo Teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série P_r converge uniformemente e absolutamente. Logo,

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} r^{|n|} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-it})^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-it})^n. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, como estamos no disco unitário, as séries geométricas possuem razão menor que um e convergem para seus respectivos limites, a saber:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (re^{it})^n = \frac{re^{it}}{1 - re^{it}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-it})^n = \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}}.$$

Logo, das relações de Euler para o cosseno temos (3.23) e, consequentemente,

$$P_r(t) = 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}.$$

□

Lema 5.10. *Seja $P(r, t) = P_r(t)$, $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Então, para cada $r \in [0, 1)$ fixo $P(r, \cdot) \in C_{per}(2\pi)$, $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ com*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0, \quad (5.22)$$

em $(0, 1) \times \mathbb{R}$. E mais, $v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ e satisfaz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad (5.23)$$

em $(0, 1) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Note que para cada $r \in [0, 1)$ fixo, $P(r, \cdot)$ definida por (5.21) é $C_{per}(2\pi)$, pois a função cosseno é $C_{per}(2\pi)$. Por outro lado, se $0 \leq r < 1$ então

$$|1 - 2r \cos(t) + r^2| \geq |1 + r^2| - |2r \cos(t)| \geq 1 + r^2 - 2r = (1 - r)^2 > 0.$$

Logo, da expressão (5.21) concluímos que de fato $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$, pois é o quociente de funções infinitamente diferenciáveis, com derivadas contínuas e o denominador nunca se anula em $0 \leq r < 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{2r^2 \cos(t) + 2 \cos(t) - 4r}{(1 - 2r \cos(t) + r^2)^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= \frac{-4r^3 \cos(t) + 12r^2 - 12r \cos(t) + 8 \cos^2(t) - 4}{(1 - 2r \cos(t) + r^2)^3} \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{2r^3 \sin(t) - 2r \sin(t)}{(1 - 2r \cos(t) + r^2)^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= \frac{2r^5 \cos(t) - 4r^4 \cos^2(t) - 8r^4 \sin^2(t) + 4r^2 \cos^2(t) + 8r^2 \sin^2(t) - 2r \cos(t)}{(1 - 2r \cos(t) + r^2)^3}. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$ em $(0, 1) \times \mathbb{R}$.

Por fim, como sabemos que $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ e usando a continuidade de g , juntamente com o Teorema 1.63, podemos derivar sobre o sinal da integral infinitas vezes. Portanto,

$v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$. Logo, se $r \in (0, 1)$ temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \theta - t) + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}(r, \theta - t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(r, \theta - t) \right] dt = 0.$$

□

Lema 5.11. *Quaisquer que sejam $r \in [0, 1)$ e $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1. \quad (5.24)$$

Em particular, $P(r, t) > 0$ para $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Note que por meio das propriedades de números complexos e por (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} |re^{i\theta} - e^{it}|^2 &= (re^{i\theta} - e^{it})(re^{-i\theta} - e^{-it}) \\ &= r^2 - re^{-it+i\theta} - re^{it-i\theta} + 1 \\ &= r^2 - r(e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}) + 1 \\ &= r^2 - 2r \cos(\theta - t) + 1. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2}.$$

Por outro lado, para provar (5.24) vamos reescrever a série que define P de outra forma.

Para isso, usamos o fato de P ser uma função real e o cosseno uma função par, então

$$\begin{aligned} P(r, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} r^{|n|} = \mathcal{R} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} r^{|n|} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(nt) r^{|n|} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) r^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(-nt) r^{-n} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) r^n. \end{aligned}$$

Dáí, sejam $r \in [0, 1)$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Uma vez que o cosseno é uma função limitada segue que

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) r^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} r^n.$$

Então, como temos uma série geométrica com razão $r \in [0, 1)$, ou seja, convergente, consequentemente pelo teste M. de Weierstrass, Teorema 1.44, a série converge uniformemente em $[0, R] \times \mathbb{R}$ qualquer que seja $R \in [0, 1)$.

Logo, tomando $R > r$ e $t = \theta - \theta'$, como a série converge uniformemente, pela Proposição 1.48, podemos integrar termo a termo e utilizando a periodicidade de P em função de t obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} P(r, t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) r^n \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) r^n dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) r^n dt = 1. \end{aligned}$$

□

Lema 5.12. *A função $v(r, \theta)$ converge uniformemente a $g(\theta)$ quando $r \rightarrow 1^-$.*

Demonstração. Note que queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < 1 - r < \eta \implies |v(r, \theta) - g(\theta)| < \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (5.25)$$

Dessa forma, primeiro estimamos a diferença $v(r, \theta) - g(\theta)$. Então, pelo Lema 5.11,

obtemos

$$\begin{aligned} v(r, \theta) - g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') P_r(\theta - \theta') d\theta' - g(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') P_r(\theta - \theta') d\theta' - g(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') [g(\theta') - g(\theta)] d\theta'. \end{aligned}$$

Logo,

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') [g(\theta') - g(\theta)] d\theta' \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \theta') |g(\theta') - g(\theta)| d\theta'.$$

Dai, como P_r e g são periódicas de período 2π , tomamos $t = \theta - \theta'$ e obtemos

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} P_r(t) |g(\theta-t) - g(\theta)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |g(\theta-t) - g(\theta)| dt \quad (5.26)$$

Sendo que,

$$\lim_{r \uparrow 1} P_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0, t \in [-\pi, \pi], \\ +\infty & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Portanto, para majorar a integral (5.26) vamos dividir em duas, uma quando t está perto de zero e outra quando t está longe de zero.

Então, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como g é contínua em um compacto $[-\pi, \pi]$ então é uniformemente contínua, e mais, g é periódica de período 2π . Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\pi}{2}$ e $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$|\theta - \theta'| < \delta \implies |g(\theta) - g(\theta')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.27)$$

Além disso, g é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|g(t)| \leq M, \forall t \in \mathbb{R}$.

Utilizando a expressão (5.24), (5.26), (5.27) e o fato de que P_r é par obtemos

$$\begin{aligned}
 |v(r, \theta) - g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) 2M dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) |g(\theta - t) - g(\theta)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) 2M dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(t) dt + \frac{M}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \right] \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt + \frac{M}{\pi} \left[\int_{\delta}^{\pi} P_r(-t)(-dt) + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, em $0 < \delta \leq t \leq \pi$ o cosseno é uma função decrescente, ou seja, $\cos(t) \leq \cos(\delta)$ o que implica em $1 - 2r \cos(t) + r^2 \geq 1 - 2r \cos(\delta) + r^2$. Isto é,

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} = P_r(\delta).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |v(r, \theta) - g(\theta)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(\delta) dt \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) P_r(\delta) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M P_r(\delta).
 \end{aligned}$$

Entretanto, $P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 1^-$. Perceba também que δ não depende de θ e, portanto, existe $\eta > 0$ tal que $0 < 1 - r < \eta \implies P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Assim, η depende de δ , mas não depende de θ . Portanto,

$$0 < 1 - r < \eta \implies |v(r, \theta) - g(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Isto é, $v(r, \theta)$ converge uniformemente a $g(\theta)$ quando $r \rightarrow 1^-$. □

De posse desses resultados podemos demonstrar a existência de solução para o

problema (5.9), mais precisamente.

Teorema 5.13. *Sejam $v(r, \theta)$ dada por (5.19) e $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$u(x, y) = \begin{cases} v(r, \theta) & \text{se } x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ f(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Então u é solução de (5.9).

Demonstração. De fato, os Lemas 5.10 e 5.12 juntamente com o fato de que $P(r, \cdot)$ é periódica de período 2π e uma vez definido $v(r, \theta)$ em $r = 1$ por $v(1, \theta) = g(\theta)$, obtemos que v é solução de (5.11). Portanto, $u(x, y) = v(r, \theta)$ é solução do problema (5.9). $\square$

5.3 Princípio do Máximo Para Funções Harmônicas

Nas seções anteriores obtemos soluções para os problemas de Dirichlet tanto no retângulo quanto no disco unitário, no entanto nada foi dito em relação a sua unicidade. Desse modo, nesta seção, temos como objetivo aplicar o princípio do máximo para funções harmônicas e obter a unicidade das soluções.

Teorema 5.14 (Princípio do Máximo Para Funções Harmônicas). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio, ou seja, é aberto e conexo, e seja $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω . Suponha que u atinge seu máximo em Ω , ou seja, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $u(\xi) \leq u(\xi_0)$, qualquer que seja $\xi \in \overline{\Omega}$. Então, u é constante em $\overline{\Omega}$.*

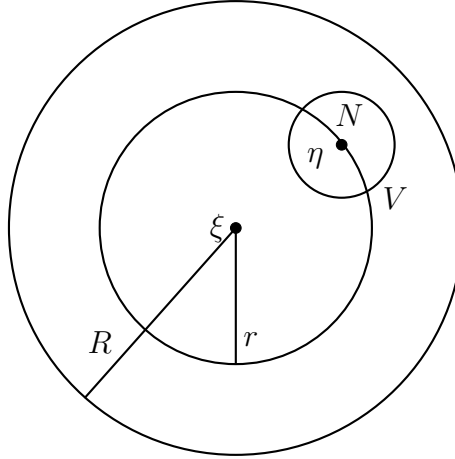
Demonstração. Note que por hipótese, u é limitada superiormente e atinge o máximo em Ω , ou seja, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $M = u(\xi_0) = \max\{u(\xi); \xi \in \overline{\Omega}\}$. Seja $S = \{\xi \in \Omega; u(\xi) = M\}$. Então, $S \neq \emptyset$ e S é fechado em Ω uma vez que é a imagem inversa do fechado $\{M\}$ pela função contínua $u|_{\Omega}$.

Afirmção: S é aberto em Ω , ou seja, dado $\xi \in S$ então $B(\xi, R) \subseteq S$. De fato, seja $\xi \in S$ arbitrário e seja $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$. Como u é harmônica em Ω , pelo Teorema do Valor Médio, Teorema 1.76, obtemos

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u \, ds, \quad \forall r \in (0, R). \quad (5.28)$$

Daí, suponha por contradição que $B(\xi; R) \not\subseteq S$. Então, existe $\eta \in B(\xi; R)$ tal que $\eta \notin S$, ou seja, $u(\eta) < M = u(\xi)$. Logo, como u é contínua, existe uma vizinhança V de η em $B(\xi; R)$ tal que $u < M$ em V .

Figura 5.3: Se $u(\eta) < M = u(\xi)$, então existe uma vizinhança V de η com $u < M$



Fonte: Produzido pelo autor (2025)

Por fim, tomando $r = |\xi - \eta|$, $N = V \cap \partial B(\xi; R)$, isso implica que $u < M$ em N . Portanto, para todo $r \in (0, R)$ obtemos

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} u \, ds = \frac{1}{2\pi r} \left(\int_{\partial B(\xi; r) - N} u \, ds + \int_N u \, ds \right) \\ &< \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) - N} ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N u \, ds \\ &= \frac{M}{2\pi r} \left[\int_{\partial B(\xi; r) - N} ds + \int_N ds \right] \\ &= \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} ds = \frac{M}{2\pi r} \cdot 2\pi r = M. \end{aligned}$$

Logo, $M < M$, o que é um absurdo. Sendo assim, $B(\xi; R) \subseteq S$ e S é aberto. Como Ω é conexo, $S \neq \emptyset$ e S é aberto e fechado em Ω , obtemos $S = \Omega$. Portanto, u é constante em Ω e pela continuidade, u também é constante em $\overline{\Omega}$. $\square$

Observação 5.15. Note que para o princípio do mínimo, basta aplicar o princípio do máximo para $-u$.

Observação 5.16. Perceba que no teorema anterior, não pedimos que o domínio Ω fosse limitado e em geral, se o domínio Ω não for limitado, a função pode não ter máximo. Entretanto, este fato não contradiz o teorema, pois o que afirmamos é que se a função atinge um máximo, esse máximo é atingido em algum ponto da fronteira $\partial\Omega$.

Como consequência direta do princípio do máximo para funções harmônicas obtemos a unicidade, em particular, da solução dos problemas de Dirichlet no retângulo e no disco unitário, pois as regiões são conjuntos conexos.

Corolário 5.17. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e sejam $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Então existe no máximo uma solução para o problema*

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Demonstração. Sejam u, v soluções de (5.29) e defina $w = u - v$. Então, $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é harmônica em Ω , pois $\Delta w = \Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = f - f = 0$. Logo, w atinge seu máximo e seu mínimo em $\partial\Omega$. E mais, pelo Princípio do Máximo Para Funções Harmônicas, Teorema (5.14), temos w constante em $\bar{\Omega}$ e como $w|_{\partial\Omega} = (u - v)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} - v|_{\partial\Omega} = g - g = 0$, ou seja, $w|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Portanto, $w \equiv 0$ e consequentemente $u \equiv v$. $\square$

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho apresentamos a teoria das séries de Fourier como uma ferramenta para o estudo das equações diferenciais parciais, em particular, na obtenção de solução para problemas envolvendo a equação do calor e a equação de Laplace. Notamos que a expressão para a série de Fourier dependia das condições de fronteira e das condições iniciais envolvidas no problemas, e que o estudo prévio da convergência destas séries foi fundamental nos resultados acerca da solução dos problemas.

Além disso, ao explorarmos o Princípio do Máximo-Mínimo percebemos a importância deste resultado na teoria das EDPs, uma vez que diferentes problemas associados a EDPs tem soluções satisfazendo este princípio.

Portanto, com a finalização do trabalho alcançamos os objetivos inicialmente elencados, percebendo a relevância das séries de Fourier no estudo das equações diferenciais parciais e a aplicabilidade destas equações na modelagem de fenômenos físicos reais, evidenciando assim a importância do estudo desta teoria.

Referências Bibliográficas

- [1] EULER, L. **Découverte d'un nouveau principe de Mécanique**. Mem. Acad. Roy. Sci. berlin, 1750 (data de apresentação). v. 6, p. 185-217, 1752.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. DE **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. (Coleção Projeto Euclides).
- [3] IÓRIO, V. DE M. **EDP Um Curso de Graduação**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. (Coleção Matemática Universitária).
- [4] JÚNIOR, R. I.; IÓRIO, V. DE M. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. 3 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2013. (Projeto Euclides).
- [5] LIMA, E. L. **Análise Real, vol. 1**. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária).
- [6] LIMA, E. L. **Análise Real, vol. 2**. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).
- [7] LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 1**. 15 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. (Coleção Projeto Euclides).
- [8] LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 2**. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Coleção Projeto Euclides).
- [9] TEIXEIRA, E. V. **Um Convite à Análise Geométrica de EDPs Elípticas de 2ª Ordem**. IV Escola Brasileira de Equações Diferenciais. João Pessoa, Agosto, 2011 +56pp.