



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Equação do 2º grau: alguns processos resolutivos ao longo da história

Arthur Diego Silva Ramos

Orientador: Dr. Wagner Rodrigues Costa

RECIFE

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Arthur Diego Silva Ramos

Equação do 2º grau: alguns processos resolutivos ao longo da história

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

R175e Ramos, Arthur Diego Silva.
Equação do 2º grau: alguns processos resolutivos
ao longo da história / Arthur Diego Silva Ramos. -
Recife, 2025.

40 f.; il.

Orientador(a): Wagner Rodrigues Costa.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Licenciatura em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática - História. 2. Equações do 2º grau.
3. Matemática - Estudo e ensino. I. Costa, Wagner
Rodrigues, orient. II. Título

CDD 510

Arthur Diego Silva Ramos

Equação do 2º grau: alguns processos resolutivos ao longo da história

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Costa
Departamento de Educação - UFRPE
(Orientador e presidente)

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida
Departamento de Educação - UFRPE

Prof. Dr. Severino Barros de Melo
Departamento de Educação – UFRPE

Recife

2025

Dedico este trabalho a Deus, pois sem Ele não teria chegado até aqui. "Porque sem mim nada podeis fazer."(João 15:5)

Agradecimentos

A Deus, pela minha vida e por me ajudar a superar todos os obstáculos. Aos meus pais, Djalma Martins Ramos e Lucicleida da Silva, que me incentivaram nos momentos difíceis ao longo de toda a minha graduação. Aos professores, pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação profissional. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Wagner Costa, por sua orientação e apoio durante minha jornada na escrita deste TCC.

Resumo

A História da Matemática (HdM) é um recurso valioso para o ensino, pois permite compreender a origem e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Diante disso, este trabalho analisa o ensino de equações do segundo grau e investiga como a HdM pode contribuir para a aprendizagem desse tema na educação básica. O referencial teórico baseia-se em Mendes (2006), Boyer(1996), Eves(1995), Pereira e Proença(2024), Miorim(1995) e BNCC que discutem o uso da HdM como recurso pedagógico para atribuir significado ao conhecimento matemático. A pesquisa, de abordagem qualitativa e baseada em referências bibliográficas, reuniu conceitos teóricos importantes sobre o tema. Ademais analisa como o tema de equação do 2º grau é abordado em alguns livros didáticos. Os resultados indicam que a simplificação excessiva de procedimentos algébricos, sem justificativas, reduz a compreensão dos conceitos matemáticos e enfraquece a contribuição da HdM no ensino. Assim, o estudo reforça a importância de integrar a História da Matemática ao ensino, promovendo uma aprendizagem mais contextualizada e significativa.

Palavras-chave: História da Matemática; Equação do segundo grau; Ensino de Matemática.

Abstrac

The History of Mathematics (HdM) is a valuable resource for teaching as it allows for understanding the origin and development of mathematical concepts. In this context, this paper analyzes the teaching of quadratic equations and investigates how HdM can contribute to learning this topic in basic education. The theoretical framework is based on Mendes (2006), Boyer (1996), Eves (1995), Pereira and Proença (2024), Miorim (1995), and the BNCC, which discuss the use of HdM as a pedagogical resource to give meaning to mathematical knowledge. The research, which adopts a qualitative approach and is based on bibliographic references, gathers important theoretical concepts on the subject. Furthermore, it analyzes how the topic of quadratic equations is addressed in some textbooks. The results indicate that the excessive simplification of algebraic procedures, without justifications, reduces the understanding of mathematical concepts and weakens the contribution of HdM in teaching. Thus, the study reinforces the importance of integrating the History of Mathematics into teaching, promoting more contextualized and meaningful learning.

Keywords: History of Mathematics; Mathematics Education; Quadratic Equations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Segmento \overline{AB} dividido com ponto P e Segmento \overline{PE} perpendicular no ponto P	19
Figura 2 – Representação geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$	22
Figura 3 – Área $10x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $2,5$	22
Figura 4 – Área $10x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $2,5$	23
Figura 5 – Intersecção entre o círculo e o eixo x	30
Figura 6 – Capítulo 7 do livro Bianchinni, p. 155	33
Figura 7 – Capítulo 7 do livro Bianchinni, p. 162	34
Figura 8 – Representação geométrica da equação $x^2 + 5x = 300$	35
Figura 9 – Área $5x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $1,25$	35
Figura 10 – Área $5x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $1,25$.	36

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	O QUE A BNCC DIZ SOBRE A EQUAÇÃO DO 2º GRAU	13
2.1	Habilidades Relacionadas às Equações do 2º Grau na BNCC	13
2.2	Perspectivas Críticas no Ensino das Equações do 2º Grau	14
3	FORMAS RESOLUTIVAS DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	16
3.1	Mesopotâmia	16
3.2	Grécia	18
3.3	Índia	20
3.4	Método de Brahmagupta para Equações do Segundo Grau	20
3.5	Exemplo de Aplicação do Método de Brahmagupta	20
3.6	Contribuição e Importância do Método de Brahmagupta	21
3.7	Árabia	21
3.7.1	Método de resolução de equação quadrática de Al-khowarizmi	22
3.8	Europa	25
3.9	René Descartes	26
3.10	Sir John Leslie	29
4	METODOLOGIA	32
5	O LIVRO DIDÁTICO E AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	33
5.1	Análise do livro didático	33
5.2	Resolução do exercício proposto no livro didático	34
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
7	REFERÊNCIAS	40

1 Introdução

A matemática, ciência que está constante evolução, reflete o esforço humano para interpretar e solucionar problemas do mundo real. Por outro lado, as equações do segundo grau, com seus diversos métodos resolutivos ao longo da história, são exemplos claros dessa evolução, abrangendo contribuições de civilizações como a Mesopotâmia, a Grécia, a Índia e o mundo árabe, além de avanços europeus. Esses métodos históricos revelam não apenas técnicas matemáticas distintas, mas também os contextos culturais e as necessidades que impulsionaram seu desenvolvimento. A História da Matemática (HdM), como ferramenta metodológica, é um recurso valioso para o ensino e a aprendizagem da disciplina. Ela pode auxiliar o professor no desenvolvimento de atitudes e valores essenciais para a construção do conhecimento matemático. Conforme Cita Mendes

[...] que o uso da história como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensinoaprendizagem da matemática que permita uma resignificação do conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos [...]. (Mendes, 2006, p. 84 apud Mesquita, 2011, p. 9).

É comum encontrar nos livros didáticos técnicas resolutivas de equação do segundo grau pela “fórmula de Bháskara”, pela técnica de completar quadrado, mais precisamente em livros do 9º ano. Mas ao se deparar com o legado deixado pela HdM, percebe-se que existe uma variedade de métodos que foram usados, mas que não são mencionados ou explorados nas aulas de matemática. Nesse sentido, tornar esses métodos conhecidos aos professores da Educação Básica é importante para uma maior compreensão da equação do segundo grau. O conhecimento desses métodos pode ajudar os professores de matemática a endossar o entendimento de que inúmeros povos, dos mais variados lugares e em distintas épocas, contribuíram para a construção do conhecimento matemático. Por vezes, cria-se uma falsa impressão que tudo que temos hoje de matemática sempre foi assim. Mas, não. Ela está em constante construção. Nesse sentido, nosso objetivo é apresentar alguns processos de resolução de equações do 2º grau ao longo da HdM a fim de mostrar a diversidade de produções matemáticas ao longo do tempo.

O estudo do objeto matemático equação do segundo grau é tópico de ensino na Educação Básica (Brasil, 2017), o que demanda dos professores conhecimento adequado desse tema, para além do que é mencionado nos livros didáticos. Por mais que o livro diático de matemática seja um

recurso muito usado como apoio ao trabalho do professor, extrapolar suas fronteiras implica qualificar o trabalho docente.

Este trabalho constitui-se de uma pesquisa bibliográfica. De acordo com Vergara (2000), A pesquisa bibliográfica baseia-se em materiais já elaborados, como livros e artigos científicos, sendo essencial para coletar informações fundamentais sobre aspectos relacionados direta ou indiretamente ao tema estudado. Uma de suas principais vantagens é fornecer um referencial analítico para outros tipos de pesquisa, embora, em alguns casos, possa se encerrar como um fim em si mesma.

2 O que a BNCC diz sobre a equação do 2º grau

As equações do segundo grau ocupam um lugar importante no currículo de matemática, particularmente no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino das equações do 2º grau se concentra nas habilidades ligadas à resolução de problemas e ao desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo abordado a partir do 8º ano do Ensino Fundamental e continuado no Ensino Médio.

Ademais, importante destacar que a discussão algébrica com ligação às equações ocorre desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, o que implica dizer que este documento curricular valoriza o processo de apreensões algébricas como facilitador para entendimentos mais sólidos. A partir do 3º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais (EFAI), a BNCC apresenta o objeto Relação de igualdade no campo dos Números a fim de que os estudantes desenvolvam a capacidade de *Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.* (EF03MA11). Esse diálogo entre as duas Unidades Temáticas, Álgebra e Números, reforça o quão próximas elas estão, com este diálogo seguindo durante todo o processo de construção dos conceitos algébricos

2.1 Habilidades Relacionadas às Equações do 2º Grau na BNCC

Na BNCC, o tema das equações do 2º grau está inserido na unidade temática de “Álgebra” e é diretamente relacionado a duas habilidades:

- **EF08MA09:** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- **EF09MA09:** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O que a BNCC nos mostra é que até o estudante chegar nessa compreensão, ele vem desenvolvendo ideias algébricas, como: Relação de igualdade, Propriedades da igualdade, Noções de equivalência, Linguagem algébrica, Expressões algébricas, Valor numérico de expressões algébricas, Equações do 1º grau e Equações do 2º grau. Como bem se percebe nas duas habilidades acima citadas, o foco da demanda cognitiva está em Resolver, Elaborar e Compreender, o que mostra uma preocupação em explorar viéses menos voltados para questões procedimentais. No 8º ano, os problemas propostos aos estudantes devem levá-los a desenvolver a capacidade de representar as situações na forma reduzida de uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. Situações como esta podem ser resolvidas com o apoio de procedimentos menos memorísticos e custosos. Destaca-se ainda, que esta mesma habilidade do 8º ano a Elaboração, o que se espera que o estudante também crie problemas com equações do segundo grau. A habilidade também menciona a possibilidade do uso de alguma ferramenta tecnológica no processo resolutivo, o que amplia as possibilidades de aprendizagem deste objeto. A segunda habilidade em apreço, EF09MA09, já amplia as equações para as de segundo grau completa, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, focando seus processos resolutivos na fatoração e nos produtos notáveis, numa clara sinalização à valorização de procedimentos historicamente usados nas práticas matemáticas.

A ideia central dessa habilidade é que o aluno não apenas aprenda a manipular coeficientes e resolver a equação por meio da fórmula ou outros métodos algébricos, mas que também compreenda os conceitos subjacentes, como a relação entre técnicas completar quadrado e equação do segundo grau. O fato de não haver menção direta da conhecida *fórmula de bháskara* não significa que o professor está impedido de discutir com os estudantes sua historicidade e economia resolutiva. Pelo contrário, é salutar mostrar quais ideias lhe deram origem. O presente trabalho, inclusive, tem como ideia central apresentar aos professores de matemática outros métodos resolutivos de equação do segundo grau desenvolvidos ao longo da HdM como forma de perceber a vasta capilaridade cultural desse objeto. Cabe destacar que pela própria BNCC, a equação do segundo grau está relacionada a outros tópicos da Matemática como o das Funções quadráticas, por exemplo, mas também a outras áreas do conhecimento como Física. Assim, o conhecimento histórico das diversas formas resolutivas pode beneficiar uma compreensão mais profunda das equações do segundo grau.

2.2 Perspectivas Críticas no Ensino das Equações do 2º Grau

Artigos acadêmicos como o de Pereira e Proença(2024) intitulado como resoluções de problemas e ensino de equação do segundo grau discutem a abordagem tradicional para o ensino das equações do 2º grau e levantam pontos sobre as limitações desse método. Um dos principais problemas levantados é o foco excessivo na manipulação algébrica e nas fórmulas prontas, como a fórmula de Bhaskara, sem que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda do conceito envolvido.

Por exemplo, os alunos frequentemente decoram procedimentos sem realmente entender o significado geométrico ou contextual da equação. A equação do 2º grau, vista apenas como uma sequência de passos mecânicos, pode impedir que o estudante compreenda aspectos como:

- A representação gráfica da função quadrática e o comportamento da parábola.
- A interpretação dos coeficientes a , b e c , especialmente no que se refere às raízes e à concavidade da parábola.
- A conexão da equação quadrática com problemas concretos da física, economia ou geometria.

Esses pontos levam à reflexão sobre a necessidade de um ensino mais contextualizado e exploratório. Em vez de focar apenas na resolução de equações através dos métodos padronizados, os professores são incentivados a adotar uma abordagem que permita aos alunos entender como as equações do 2º grau se relacionam com o mundo real e com situações-problema que eles possam de fato encontrar fora do ambiente escolar. De acordo Pereira e Proença (2024), ao analisar livros didáticos selecionados pelo PNLD para implementação no quadriênio 2023, constataram que os processos de ensino e aprendizagem das Equações de 2º Grau iniciam por discussões a partir de situações de contexto extra matemático, associados as leis da Física e de situações de matemática atreladas a conceitos da Geometria, como área de figuras retangulares. Entretanto, em seu decorrer os pesquisadores denunciam que há grande semelhança estrutural a obras do período do Movimento Matemática Moderna, fortemente enraizadas no fundamentalismo-estrutural baseado nas proposições de Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), Lins e Gimenez (1997) e Kieran (2004).¹

¹ Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57822>>

3 formas resolutivas de equações do segundo grau

A evolução da álgebra pode ser dividida em três etapas principais: álgebra retórica, álgebra sincopada e álgebra simbólica. Cada uma dessas fases representou um avanço na maneira de expressar e resolver problemas matemáticos, com ênfase na introdução e no desenvolvimento de novas notações e métodos.

- **Álgebra Retórica:** Explicações e soluções totalmente em palavras, com pouca ou nenhuma notação simbólica.
- **Álgebra Sincopada:** Introdução de abreviações e símbolos parciais, permitindo uma escrita mais compacta e manipulação mais eficiente.
- **Álgebra Simbólica:** Uso total de símbolos e notação matemática, permitindo uma abstração completa e o desenvolvimento da álgebra moderna.

3.1 Mesopotâmia

O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo o que hoje chamamos de equação do segundo grau data de aproximadamente 1700 a.C., feito numa tábua de argila através de palavras. A solução apresentava apenas uma solução positiva. Os problemas eram retirados do cotidiano assim como a seguir:

Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? (o que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). o algoritmo era:

Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma,

$$0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado:

$$870 + 0.25 = 870.25$$

Agora, extraímos a raiz quadrada de 870.25:

$$\sqrt{870.25} = 29.5.$$

Por fim, somamos 29.5 com 0,5, resultando em 30, que é o lado do quadrado procurado.

Justificativa: O método mesopotâmico para resolver equações quadráticas, como a que envolve um quadrado cuja área menos o lado resulta em um número, é baseado no completamento do quadrado, um método que ainda usamos hoje para resolver equações do segundo grau. Aqui está o raciocínio por trás de por que ele funciona:

- **Equação inicial e forma de completamento:** A equação dada é:

$$x^2 - x = 870$$

Reescrevendo-a, temos:

$$x^2 - x - 870 = 0$$

- **Isolamento e preparação para completar o quadrado:** Para facilitar o processo, o método mesopotâmico toma metade do coeficiente de x , que é -1 , resultando em:

$$\frac{-1}{2} = -0.5$$

Em seguida, o método eleva esse valor ao quadrado:

$$(-0.5)^2 = 0.25$$

- **Criação de um quadrado perfeito:** Ao somar 0.25 em ambos os lados da equação, transformamos o lado esquerdo em um quadrado perfeito:

$$x^2 - x + 0.25 = 870 + 0.25$$

Simplificando o lado direito, obtemos:

$$x^2 - x + 0.25 = 870.25$$

O lado esquerdo agora é um quadrado perfeito e pode ser escrito como:

$$(x - 0.5)^2 = 870.25$$

1

¹ LABMAT, "Uma Breve História da Equação do 2º Grau", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), <<https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf>>, acessado em 10 abril 2025.

- **Extração da raiz quadrada:** Agora, tiramos a raiz quadrada de ambos os lados:

$$x - 0.5 = \sqrt{870.25}$$

Sabendo que $\sqrt{870.25} = 29.5$, obtemos:

$$x - 0.5 = 29.5$$

- **Solução final:** Finalmente, somamos 0.5 a ambos os lados para resolver x :

$$x = 29.5 + 0.5 = 30$$

3.2 Grécia

por volta de 500 anos A.C, a matemática na Grécia se desenvolvia cada vez mais, tanto que esse período ficou chamado de "idade heroica da matemática", onde a geometria teve grande desenvolvimento. A dificuldade com os sistemas de numeração e o tratamento de números irracionais levou a descoberta de métodos de resolução de equações quadráticas com régua e compasso. o problema está registrado no livro "Os elementos" de Euclides.

Proposição 28 – Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada.

Esse problema se refere a encontrar uma divisão de um segmento de reta tal que o produto entre as partes resultantes seja igual à área de um quadrado dado. O enunciado sugere uma relação geométrica que pode ser traduzida na linguagem da álgebra por uma equação quadrática.

Descrição do Segmento e das Partes Divididas: Suponha que você tenha um segmento de reta AB de comprimento p . Esse segmento será dividido em dois subsegmentos x e $p - x$. **Condição do Produto das Partes:** O problema afirma que o retângulo formado pelas duas partes divididas deve ter área igual à de um quadrado dado, de lado q . Em termos de áreas, isso significa que:

$$x \cdot (p - x) = q^2.$$

Essa expressão representa a condição desejada, onde o produto das partes x e $p - x$ é igual à área q^2 do quadrado. **Equação Quadrática:** Expansão da expressão acima nos leva à forma de uma equação quadrática:

$$x^2 - px + q^2 = 0.$$

Aqui, x representa uma das partes do segmento, enquanto p e q são os valores dados do comprimento do segmento AB e do lado do quadrado, respectivamente.

Exemplo: $x^2 - 3x + 1 = 0$. De acordo com as notações anteriores, tem-se $p = 3$ e $q = 1$.

1º passo trace o seguimento $AB = 3$, seja P o ponto médio de AB e trace um seguimento perpendicular a AB no ponto P , tal que o novo seguimento PE tenha o tamanho $q=1$

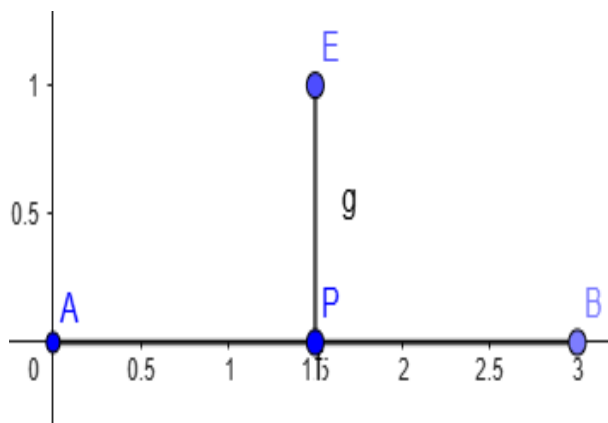
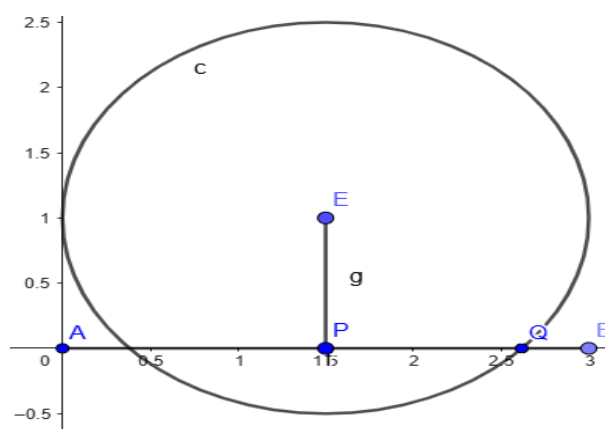


Figura 1 – Segmento \overline{AB} dividido com ponto P e Segmento \overline{PE} perpendicular no ponto P



2º passo

com auxílio de régua e compasso, trace um seguimento EQ como mesma medida PB . Por construção, $EQ = PB = \frac{3}{2}$ e $PE = q = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que $PQ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e, assim,

$$AQ = AP + PQ = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, $r = QB = AB - AQ = 3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ou seja,

$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Condição para a Existência de Soluções: Para que a divisão seja possível, devemos assegurar que o termo q^2 não exceda o quadrado de metade do segmento p . Isso significa que a área do quadrado q^2 deve ser menor ou igual a $(\frac{p}{2})^2$. Em termos algébricos, isso garante que as raízes da equação quadrática são reais e que a divisão é viável. Sejam AB e PE dois segmentos de reta, em que $AB = p$, $PE = q$ e $q < \frac{p}{2}$. Dividindo AB com o ponto Q tal que $AQ + QB = p$ e $AQ \cdot QB = q^2$, tem-se a solução procurada. Para isso, basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\frac{p}{2}$, que cortará o segmento AB no ponto Q . Logo:

$$q^2 = PB^2 - PQ^2 = (PB - PQ) \cdot (PB + PQ) = QB \cdot AQ.$$

Finalmente, denotando por $r = AQ$ e $s = BQ$ as raízes da equação dada, conclui-se que:

$$p = r + s \quad \text{e} \quad q^2 = r \cdot s.$$

3.3 Índia

Brahmagupta, matemático indiano do século VII, desenvolveu um método geométrico-algébrico para resolver equações do segundo grau. Ele foi um dos primeiros a propor uma fórmula para resolver essas equações e lidava com equações do segundo grau em formas específicas, especialmente aquelas do tipo:

$$ax^2 + bx = c$$

3.4 Método de Brahmagupta para Equações do Segundo Grau

Brahmagupta usava uma técnica que é uma forma inicial do que chamamos hoje de "completar o quadrado". Embora ele não usasse a fórmula padrão que conhecemos atualmente, sua abordagem envolvia reorganizar a equação para obter o valor de x .

Aqui está um passo a passo para o método de Brahmagupta:

1. **Transformar a Equação:** Brahmagupta lidava com equações quadráticas da forma $ax^2 + bx = c$, e ele tentava transformá-la para uma forma em que se pudesse determinar x mais facilmente.
2. **Dividir pelo Coeficiente do Quadrado:** Ele dividia ambos os lados da equação pelo coeficiente de x^2 (se fosse diferente de 1), para simplificar a resolução.
3. **Completar o Quadrado:** Brahmagupta manipulava a equação para formar um quadrado perfeito do lado esquerdo, permitindo que ele resolvesse a equação de forma simplificada.

3.5 Exemplo de Aplicação do Método de Brahmagupta

Vamos resolver a equação:

$$2x^2 + 8x = 24$$

1. **Dividir pelo Coeficiente do Quadrado:** Dividimos todos os termos por 2 para simplificar:

$$x^2 + 4x = 12$$

2. **Completar o Quadrado:** Para formar um quadrado perfeito no lado esquerdo, adicionamos $(\frac{4}{2})^2 = 4$ a ambos os lados:

$$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$

Isso nos dá:

$$(x + 2)^2 = 16$$

3. **Extrair a Raiz Quadrada:** Agora, tiramos a raiz quadrada de ambos os lados:

$$x + 2 = \pm 4$$

4. **Resolver para x:** Isolamos x:

$$x = -2 + 4 = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2 - 4 = -6$$

Portanto, as soluções para $2x^2 + 8x = 24$ são:

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x = -6$$

3.6 Contribuição e Importância do Método de Brahmagupta

Brahmagupta foi um dos pioneiros no uso de métodos quase-algébricos para resolver equações do segundo grau, principalmente com o uso de manipulações e completamento do quadrado. Embora seu método não fosse formalizado como a fórmula quadrática moderna, ele foi essencial para o desenvolvimento da álgebra e influenciou matemáticos posteriores, como Al-Khwarizmi.

3.7 Arábia

Por volta do século VIII a.C. foi construído em Bagdá a Casa da Sabedoria, lugar onde reuniu vários mentes estudiosos dos quais se destacam Al-Khowarizmi. Al-Khwarizmi foi um matemático, astrônomo e geógrafo persa que viveu durante a Era de Ouro Islâmica (cerca de 780-850 d.C.). Ele é amplamente reconhecido como um dos fundadores da álgebra, e seu trabalho teve uma influência profunda no desenvolvimento da matemática no mundo islâmico e na Europa. Seu livro *Kitab al-Jabr wa'l-Muqabala* introduziu métodos sistemáticos de resolução de equações lineares e quadráticas, dando origem ao termo "álgebra".

3.7.1 Método de resolução de equação quadrática de Al-khowarizmi

O método geométrico de resolução de equações quadráticas de Al-Khwarizmi é uma técnica baseada na geometria, especialmente útil para resolver equações quadráticas do tipo $x^2 + bx = c$. Ele usava um método de *completar o quadrado*, visualizando as variáveis e constantes como áreas para encontrar o valor de x . Vamos resolver uma equação do tipo $x^2 + 10x = 39$ como exemplo.

Exemplo: Resolva a equação $x^2 + 10x = 39$

$$\boxed{x^2} + \boxed{10x} = \boxed{39}$$

Figura 2 – Representação geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$

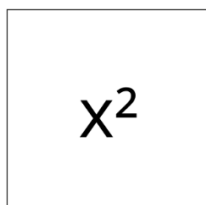
Note que temos no primeiro membro da igualdade um quadrado de lado X , um retângulo de altura X e base 10 , conseqüentemente uma área $10x$ e por fim um quadrado de área 39 no segundo membro.

1. **Divida o termo $10x$ em quatro partes iguais:** Pegue o coeficiente de x , divida por 4 e coloque o resultado junto aos lados do quadrado. Neste exemplo, temos $b = 10$,

$$\boxed{10x} = \overset{2,5}{\boxed{x}} + \overset{2,5}{\boxed{x}} + \overset{2,5}{\boxed{x}} + \overset{2,5}{\boxed{x}}$$

Figura 3 – Área $10x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $2,5$

2. **Construa o quadrado maior com o termo quadrático:** Pense em x^2 como um pequeno quadrado de lado x . Este é o quadrado inicial da área.



3. **Posicione os retângulos oriundos da divisão:** Em volta do quadrado x^2 , adicione quatro retângulos de lados x e 2,5 (quarta parte do coeficiente linear), então cada um tem área $2,5x$. Isso corresponde ao termo linear $10x$ da equação.

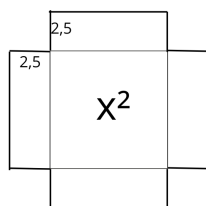
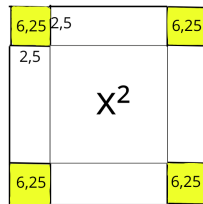


Figura 4 – Área $10x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base 2,5

4. **Complete o quadrado grande adicionando pequenos quadrados nas pontas** Agora, para completar o quadrado, adicione 4 pequenos quadrados de área $(\frac{b}{4})^2$. Neste caso:

$$\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 2,5^2 = 6,25$$



5. **Ajuste a equação com o novo quadrado:** A área do quadrado grande agora é composta de $x^2 + 10x + 25$. Como adicionamos 25 de um lado, precisamos adicioná-lo ao outro lado da equação para mantê-la balanceada:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$



6. **Encontre o lado do quadrado do segundo membro:** para encontrar o lado do quadrado usaremos a fórmula de área do quadrado que é $L^2 = A$, logo obtemos $L=8$, pois os números negativos não eram aceitos na época. por fim note que o tamanho do lado do quadrado do primeiro membro é $2,5 + x + 2,5$ que deve ser igual a 8 pela igualdade, portanto $x=3$

3.8 Europa

Por volta de 1540, surge o francês François Viète, o método de Viète para resolver equações do segundo grau é um procedimento algébrico e geométrico que envolve uma mudança de variáveis. Esse método transforma a equação em uma forma mais simples, o que permite resolver certos tipos de equações quadráticas sem o uso direto da fórmula quadrática.

Exemplo: Resolva a equação $x^2 - 8x - 9 = 0$

1. **Fazer a mudança de variável $x=u + v$:** substituindo a expressão na equação teremos

$$(u + v)^2 - 8(u + v) - 9 = 0$$

2. **Desenvolver o binômio:** usando as propriedades de produtos notáveis temos a seguinte equação

$$u^2 + 2uv + v^2 - 8(u + v) - 9 = 0$$

$$u^2 + 2uv + v^2 - 8u - 8v - 9 = 0$$

3. **Isolar um variável:** Agora, coloque em evidência a variável u ou v , neste exemplo será isolando a variável v , logo temos:

$$u^2 + v(2u - 8) + v^2 - 8u - 9 = 0$$

4. **Igualar a zero o fator que está multiplicando a variável que foi isolada:** Fazendo $2u - 8 = 0$ temos que $u = 4$. Substituindo na equação temos:

$$4^2 + v \cdot 0 + v^2 - 8 \cdot 4 - 9 = 0$$

$$16 + v^2 - 32 - 9 = 0$$

$$v^2 = 25$$

$$v = \pm 5$$

5. Substituindo os valores de u e v para achar os valores de x :

Note que como $u = 4$ e $v = \pm 5$, temos:

$$\text{Se } v = 5, \text{ então } x = 4 + 5 = 9$$

$$\text{Se } v = -5, \text{ então } x = 4 - 5 = -1$$

$$\text{Portanto, } x = -1 \text{ e } x = 9$$

Demonstração Para uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, o método de Viète seria:

Seja $x = u + z$.

Substituindo em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

$$a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0,$$

ou seja:

$$au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0.$$

Se $2az + b = 0$, tem-se $z = \frac{-b}{2a}$.

Substituindo $z = \frac{-b}{2a}$ em $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$, tem-se:

$$au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) = 0,$$

ou seja:

$$au^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

ou ainda:

$$u = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}.$$

Finalmente, substituindo os valores $z = \frac{-b}{2a}$ e $u = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$ em $x = u + z$, tem-se:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ou seja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

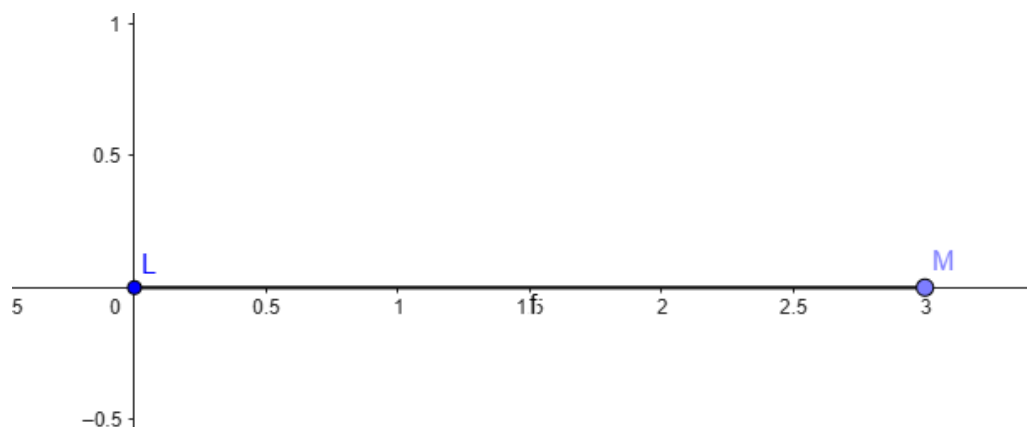
3.9 René Descartes

Em 1637, René Descartes (1596-1650) apresentou uma notação quase idêntica à atual, diferenciando-se apenas pelo símbolo de igualdade. Ele também desenvolveu um método geométrico para determinar a raiz positiva de certas equações. No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O Discurso do Método*, Descartes abordou equações como $x^2 = bx + c^2$, sempre considerando b e c como valores positivos.

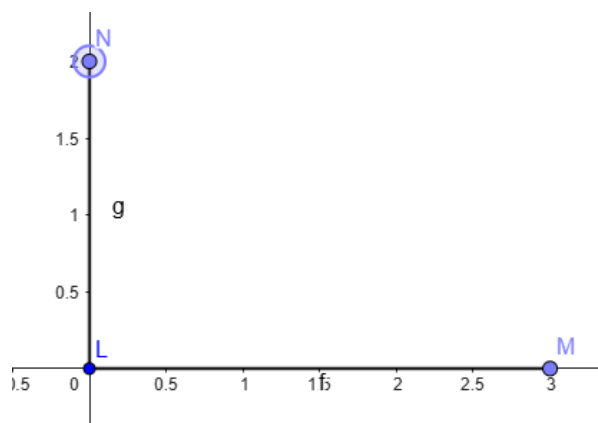
Exemplo: Resolver a equação $x^2 = 4x + 9$

primeiramente note que $b = 4$ e $c = 3$

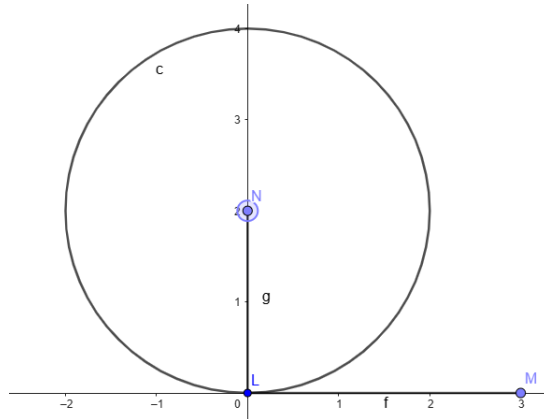
1. Trace um segmento LM de tamanho c :



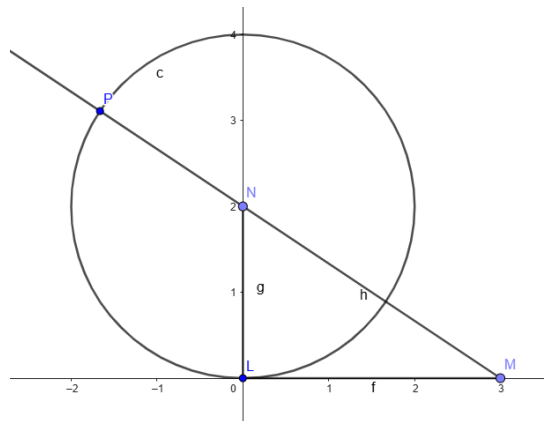
2. Trace um segmento de reta perpendicular a LM no ponto L com tamanho $\frac{b}{2}$:



3. Faça um círculo de raio $\frac{b}{2}$ com o centro em N :



4. Faça uma reta MP que passe por N :



Portanto, o segmento MP corresponde à solução da equação dada. No exemplo acima, o tamanho do segmento MP é 5,61.

Demonstração

Note que como o raio da circunferência é $\frac{b}{2}$, sabendo que $PM = x$, podemos escrever o segmento NM como

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

usando o teorema de pitágoras no triângulo MNL temos a seguinte igualdade

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

logo:

$$x^2 - 2x\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c^2$$

Com efeito, temos:

$$x^2 = xb + c^2$$

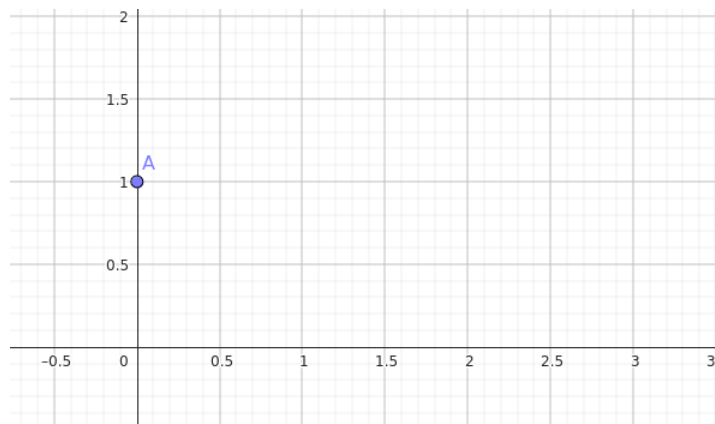
3.10 Sir John Leslie

No século XVIII, o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, apresenta o seguinte procedimento utilizando geometria analítica para resolver a equação do segundo grau da forma

$$x^2 - bx + c = 0.$$

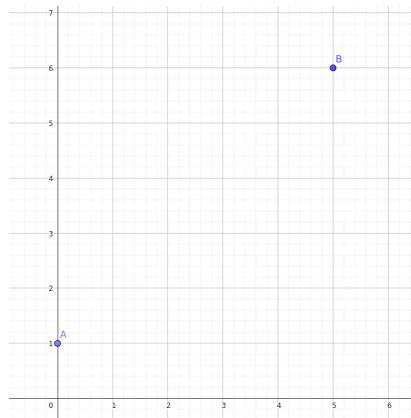
Exemplo: Resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$

1. Marque o ponto $A=(0,1)$ no plano cartesiano

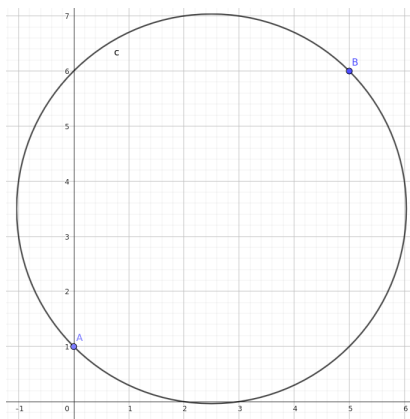


2. Marque o ponto $B=(b,c)$

Observação: note que na equação os coeficientes b é negativo, mas nesse método utilizamos o módulo dele, logo de acordo com o exemplo o dado, o ponto B é dado por (5,6)



3. Trace um círculo de diâmetro AB



4. Os pontos que o círculo toca o eixo x representa as raízes da equação

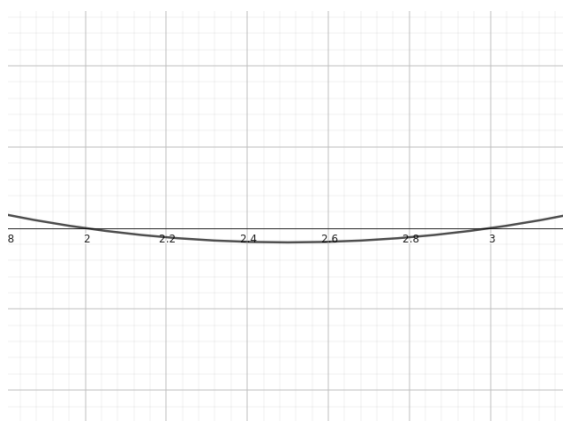


Figura 5 – Intersecção entre o círculo e o eixo x

Demonstração

Com efeito, a equação da circunferência traçada é:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2.$$

E, quando $y = 0$, tem-se:

$$x^2 - bx - c = 0$$

Percebemos uma grande diversidade de procedimentos elaborados e evidenciados por povos e personalidades que sinalizam para uma forte presença de uma matemática descentralizada, mas que não permaneceu tão diverso no ensino desse tópico. É quase que hegemônico no ensino de equações do 2º grau, o uso de procedimentos algébricos simplificados e desprovidos de justificativas, o que leva a um empobrecimento das contribuições deixadas pela HdM.

Dos sete procedimentos apresentados, é possível agrupá-los em quatro categorias: aritmético, algébrico, geométrico e algébrico-geométrico.

- **O método aritmético** envolve o uso de cálculos diretos e operações matemáticas simples, como soma, subtração, multiplicação e divisão, para encontrar as raízes de uma equação. Em geral, ele não utiliza álgebra avançada nem geometria, mas sim propriedades e operações numéricas.
- **O método algébrico** utiliza manipulações algébricas, como a fatoração ou o uso da fórmula quadrática, para encontrar as raízes de uma equação. Esse método é mais formal e se baseia em técnicas como a soma e produto das raízes de uma equação quadrática, ou a aplicação direta da fórmula de Bhaskara.
- **O método geométrico** usa representações gráficas para resolver equações, geralmente utilizando a geometria para entender visualmente as soluções. A equação quadrática pode ser representada graficamente por uma parábola, e as raízes podem ser encontradas através da interseção dessa parábola com o eixo das abcissas
- **O método algébrico-geométrico** combina técnicas algébricas e geométricas. Ele utiliza as ferramentas da álgebra para manipulação das equações e as ferramentas da geometria para dar uma interpretação visual, além de ilustrar conceitos de maneira gráfica.

Localidade/Personalidade	Aritmético	Algébrico	Geométrico	Algébrico-Geométrico
Mesopotâmia	X	X		
Grécia			X	X
Índia	X			
Arábia				X
Europa	X	X		

Tabela 1 – Classificação de métodos resolutivos

Notamos que essa diversidade de métodos resolutivos não se limitou aos aspectos algébricos, mas incluíram métodos geométricos com uso de régua e compasso, procedimentos aritméticos e a combinação desses, o que revela que várias formas de pensar matematicamente o mesmo tópico, foram usadas. Na nossa tabela, por mais que tenha havido uma prevalência do método aritmético, é inegável que tais técnicas estiveram implícitas nos procedimentos algébricos.

4 Metodologia

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de natureza qualitativa, com enfoque na pesquisa bibliográfica. Conforme Lakatos (2010), esse tipo de investigação baseia-se na análise de materiais já elaborados, sendo, portanto, fundamentada em fontes secundárias, como livros didáticos, artigos científicos e documentos oficiais.

A investigação concentra-se na análise do método resolutivo das equações do segundo grau, tendo como principais referências a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o capítulo 7 do livro didático *Matemática Bianchini*, destinado ao 9º ano do ensino fundamental. A escolha desse livro justifica-se por sua ampla utilização na educação básica e pela sua disponibilidade no site da editora, o que facilita o acesso e a análise do conteúdo.

Além disso, trata-se de uma pesquisa de caráter explicativo, cujo objetivo é evidenciar a relação entre o ensino das equações do segundo grau e a história da matemática. Busca-se compreender as influências dessa abordagem no contexto da educação básica, analisando possíveis causas e efeitos no processo de aprendizagem dos estudantes.

Os dados analisados foram obtidos exclusivamente por meio da BNCC, de livros didáticos e de publicações científicas especializadas, permitindo uma leitura crítica e detalhada acerca da forma como o ensino das equações do segundo grau é estruturado. A metodologia adotada também oferece subsídios para a reflexão sobre as práticas pedagógicas desenvolvidas pelos professores da educação básica, contribuindo para seu aprimoramento.

5 O livro didático e as equações do segundo grau

5.1 Análise do livro didático

Primeiro, isolamos os termos algébricos no 1º membro da equação:

$$x^2 + 4x - 21 + 21 = 0 + 21$$

$$x^2 + 4x = 21$$

Em seguida, representamos os termos algébricos como figuras geométricas. Podemos, por exemplo, considerar três figuras:

- um quadrado com lado de medida x , que tem medida da área igual a x^2 ;
- dois retângulos com um lado de medida x e o outro de medida 2. Cada retângulo tem medida da área igual a $2x$;

Disponemos os retângulos de modo que um dos lados de medida x de cada retângulo coincida com um dos lados do quadrado (figura 1). Depois, completamos a figura com um quadrado cuja medida do lado é 2. Assim, obtemos um quadrado maior (figura 2), formado pelas quatro figuras geométricas.

Dessa forma, para representar algebricamente a medida da área do quadrado da figura 2, devemos adicionar 2^2 a ambos os membros da equação:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$

Observe que a expressão do 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito. Fatorando esse trinômio, obtemos:

$$x^2 + 4x + 2^2 = (x + 2)^2$$

Assim, obtemos a seguinte equação do 2º grau:

$$(x + 2)^2 = 25$$

Consideramos $x + 2$ positivo porque é a medida do lado de um quadrado. Assim:

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Logo, uma raiz da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ é 3.

Observe qual a quarta raiz da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$.

Figura 6 – Capítulo 7 do livro Bianchinni, p. 155

Com o objetivo de analisar a abordagem do ensino de equações do segundo grau, foi escolhido o capítulo 7 do livro Matemática: 9º ano, de Edwaldo Bianchini, amplamente utilizado no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Este material possui uma abordagem tradicional, iniciando pela resolução de equações do segundo grau incompletas e passando a utilizar a fórmula de "baskhara" para resolver as equações completas. Além disso o livro traz uma breve referência a técnica babilônica de completar quadrados, utilizando figuras explicativas para mostrar como o processo ocorre geometricamente, mas sem fazer uso da HdM. Além disso, O livro também traz uma demonstração da fórmula de equação do segundo grau, as implicações do valor do discriminante na quantidade raízes. Por fim o livro mostra a aplicação nos retângulos aureos e foca nos exercícios contextualizados. A história da matemática, que poderia enriquecer o contexto teórico e despertar maior interesse dos estudantes, é negligenciada. Outra lacuna notável é a ausência de técnicas geométricas de resolução de equações, como o uso de régua e compasso. Tais métodos poderiam diversificar as estratégias de ensino e proporcionar uma experiência de aprendizado mais rica e interdisciplinar.

No Brasil, segundo Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), o ensino da Álgebra por um determi-

nado período foi marcado pelo anseio reformista desse movimento(MMM). Esse período foi caracterizado pelo rigor exacerbado ao uso de termos e expressões Matemáticas, que reduziam o ensino ao estudo estruturalista de definições antes que elas pudessem ser construídas a partir da exploração de problemas. As Equações de 2º grau por fixarem-se no bloco de conteúdos da Álgebra também sofreram as implicações do movimento. De acordo com Pereira, Doneze e Proença (2023), ao analisar livros didáticos selecionados pelo PNLD para implementação no quadriênio 2023, constataram que os processos de ensino e aprendizagem das Equações de 2º grau iniciam por discussões a partir de situações de contexto extra matemático, associados as leis da Física e de situações de matemática atreladas a conceitos da Geometria, como área de figuras retangulares caracterizando um avanço. Entretanto, em decorrer os pesquisadores apontam que há grande semelhança estrutural a obras do período do Movimento Matemática Moderna, fortemente enraizadas no fundamentalismo-estrutural baseado nas proposições de Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), Lins e Gimenez (1997) e Kieran (2004).

5.2 Resolução do exercício proposto no livro didático

41 A base de um retângulo mede 5 m a mais que sua altura. A área do retângulo mede 300 m². Calcule no caderno a medida do perímetro desse retângulo. **41.70 m**

Figura 7 – Capítulo 7 do livro Bianchini, p. 162

como a base do retângulo mede 5 m a mais que a sua altura, podemos representar matematicamente por $(X + 5)$, logo a área desse retângulo será dada por $(X + 5).X = 300$

Resolva a equação $x^2 + 5x = 300$

Note que temos no primeiro membro da igualdade um quadrado de lado X , um retângulo de altura X e base 5, consequentemente uma área $5x$ e por fim um quadrado de área 300 no segundo membro.

1. **Divida o termo linear em quatro partes iguais:** Pegue o coeficiente de x , divida por 4 e coloque o resultado junto aos lados do quadrado. Neste exemplo, temos $b = 5$,

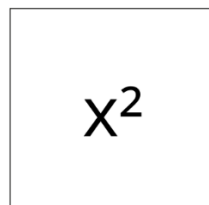
$$\boxed{x^2} + \boxed{5x} = \boxed{300}$$

Figura 8 – Representação geométrica da equação $x^2 + 5x = 300$

$$\boxed{5x} = \begin{array}{c} 1,25 \\ \boxed{x} \end{array} + \begin{array}{c} 1,25 \\ \boxed{x} \end{array} + \begin{array}{c} 1,25 \\ \boxed{x} \end{array} + \begin{array}{c} 1,25 \\ \boxed{x} \end{array}$$

Figura 9 – Área $5x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base $1,25$

- **Construa o quadrado maior com o termo quadrático no canto:** Pense em x^2 como um pequeno quadrado de lado x . Este é o quadrado inicial da área.



- **Posicione os retângulos do termo linear:** Em volta do quadrado x^2 , adicione quatro retângulos de lados x e $1,25$ (quarta parte do coeficiente linear), então cada um tem área $1,25x$. Isso corresponde ao termo linear $5x$ da equação.

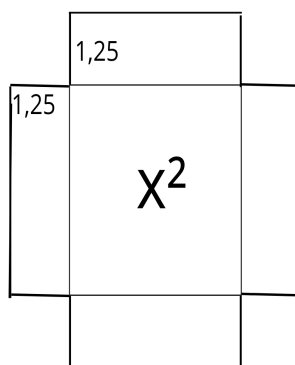
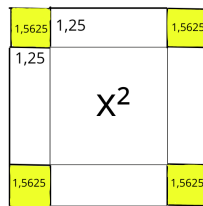


Figura 10 – Área $5x$ dividida em quatro retângulos de altura x e base 1,25.

2. **Complete o quadrado grande adicionando pequenos quadrados nas pontas** Agora, para completar o quadrado, adicione 4 pequenos quadrados de área $\left(\frac{b}{4}\right)^2$. Neste caso:

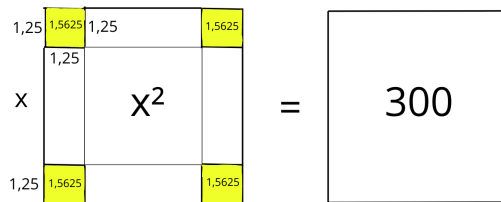
$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,25^2 = 1,5625$$



3. **Ajuste a equação com o novo quadrado:** A área do quadrado grande agora é composta de $x^2 + 5x + 6,25$. Como adicionamos 6,25 de um lado, precisamos adicioná-lo ao outro lado da equação para mantê-la balanceada:

$$x^2 + 5x + 6,25 = 300 + 6,25$$

$$x^2 + 5x + 6,25 = 306,25$$



4. **Encontre o lado do quadrado do segundo membro:** para encontrar o lado do quadrado usaremos a fórmula de área do quadrado que é $L^2 = A$, logo obtemos $L=17,5$. por fim note que o tamanho do lado do quadrado do primeiro membro é $1,25 + x + 1,25$ que deve ser igual a 17,5 pela igualdade, portanto $x=15$. portanto o perímetro do retângulo será 70.

1

¹ <<https://pnld.moderna.com.br/colecao/fundamental-2/matematica/matematica-bianchini-2/>>

6 Considerações finais

Os processos resolutivos das equações oferecem uma alternativa poderosa para promover uma aprendizagem mais significativa, possibilitando uma compreensão mais ampla dos elementos algébricos e geométricos que compõem as equações. Ao explorar os problemas históricos em que as equações quadráticas foram aplicadas, os alunos podem entender a matemática de forma profunda e abrangente. Esse contexto histórico permite que os estudantes compreendam onde, como e por que esses conceitos foram desenvolvidos ao longo dos séculos, conectando o conteúdo à realidade de forma mais significativa. Além disso, a história da matemática pode atuar como uma ponte entre os conteúdos tradicionais e as tecnologias educacionais, promovendo uma integração enriquecedora no processo de ensino e aprendizagem.

Constatamos que, no ensino básico, muitos métodos históricos e alternativos de resolução são negligenciados devido a fatores como a falta de tempo em relação ao carga horária de matemática ou o desconhecimento da perspectiva histórica. Essa omissão dificulta a conexão entre o conteúdo de equações do segundo grau e situações práticas do cotidiano, tornando o aprendizado mais distante da realidade dos alunos.

Compreender a história da matemática ajuda os estudantes a enxergar fórmulas e regras como produtos de uma evolução histórica, elaborados por diversas pessoas ao longo do tempo. Isso desmistifica a visão da matemática como um sistema fixo e imutável, incentivando uma abordagem mais exploratória e aberta da disciplina. Métodos como a resolução com régua e compasso, por exemplo, podem despertar o interesse dos alunos, não apenas pela ludicidade e criatividade envolvidas, mas também por fomentar o estudo das demonstrações e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Assim, integrar a história das equações quadráticas ao ensino cria um ambiente de aprendizagem mais rico e engajador. Essa abordagem não apenas cobre o conteúdo técnico exigido, mas também conecta os alunos à matemática como uma construção humana, dinâmica e culturalmente relevante. Dessa forma, o estudo das equações do segundo grau se transforma em uma experiência educativa mais interessante, significativa e alinhada aos princípios da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

7 Referências

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. 488 p.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 15 nov. 2024.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. 123 p.
- MENDES, I. A. A investigação histórica na formação de professores de matemática. *Revista Cocar*, [S. l.], v. 4, n. 7, p. 37–48, 2011. Disponível em: <<https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/37>>. Acesso em: 6 mar. 2025.
- PEREIRA, F. F.; PROENÇA, M. C. de. Resolução de problemas e o ensino de equações do 2º grau: meta-análise de duas pesquisas de mestrado profissional. *Educação Matemática Pesquisa - Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, v. 26, n. 1, p. 668–690, 2024.
- GIL, A. C.; VERGARA, S. C. Tipo de pesquisa. Universidade Federal de Pelotas. Rio Grande do Sul, v. 31, 2015.
- MIORIM, M. Ângela. O ensino de matemática: evolução e modernização. 1995. Tese de doutorado. [s. n.].
- LABMAT. "Uma Breve História da Equação do 2º Grau". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), <https://www.ibilce.unesp.br/H/breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf>, acessado em 10 abril 2025.