



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Lucas Rodrigues Wanderley

Uma introdução aos espaços de Lebesgue: Completude, separabilidade e reflexibilidade

Recife-PE
Maio de 2022

Uma introdução aos espaços de Lebesgue: Completeness, separabilidade e reflexibilidade

por

Lucas Rodrigues Wanderley

Sob orientação de

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho (orientador)

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Licenciatura plena
em Matemática da Universidade Federal Ru-
ral de Pernambuco - Sede, como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de Licen-
ciado em Matemática.

Recife-PE
Maio de 2022

Lucas Rodrigues Wanderley

Uma introdução aos espaços de Lebesgue: Completeness, separability and reflexivity

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Licenciatura plena
em Matemática da Universidade Federal Ru-
ral de Pernambuco - Sede, como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de Licen-
ciado em Matemática.

Aprovado em: 09/06/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. Daniel Tomaz de Araújo
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Recife-PE
Maio de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- W245i Wanderley, Lucas Rodrigues Wanderley
Uma introdução aos espaços de Lebesgue: Completude, separabilidade e reflexibilidade / Lucas Rodrigues Wanderley Wanderley. - 2022.
58 f. : il.
- Orientador: Gilson Mamede de Carvalho.
Inclui referências.
- Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2024.
1. Completude. 2. Separabilidade. 3. Reflexividade. 4. Isomorfismo. 5. Espaços de Lebesgue. I. Carvalho, Gilson Mamede de, orient. II. Título

CDD 510



DEPARTAMENTO DE HISTÓRIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TERMO DE APROVAÇÃO DE TCC

LUCAS RODRIGUES WANDERLEY

Uma introdução aos espaços de Lebesgue:
Completude, separabilidade e reflexibilidade

Trabalho de conclusão de curso aprovado com nota _____ como requisito para conclusão da disciplina de TCC II (Cód. 04803), pela seguinte banca examinadora:

Orientador: _____ Nota: _____
Gilson Mamede de Carvalho
Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho
Departamento de Matemática UFPE.

Membro: _____ Nota: _____
Daniel Tomaz de Araújo
Prof. Dr. Daniel Tomaz de Araújo
Departamento de Matemática UFRPE.

Membro: _____
José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Prof. Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior
Departamento onde atua o professor

Membro: _____ Nota: _____

Média das notas	
-----------------	--

Recife, (dia mês e ano da aprovação).

Resumo

Por meio desse trabalho, objetivo estudar as propriedades de separabilidade, reflexividade, completude e dualidade dos espaços $L^p(X, \Sigma, \mu)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Para este estudo, no Capítulo 1, trataremos, sobre conceitos prévios, que servirão como base na demonstração de futuros resultados, destacando aqui o conceito de completude de um espaço métrico e algumas de suas características. Após isso, já no Capítulo 2, abordaremos o que vem a ser um espaço separável e também reflexivo, bem como serão apresentadas algumas de suas principais propriedades. Por último, e não menos importante, para a construção do presente trabalho, apresentaremos o estudo feito acerca dos espaços de Lebesgue, visando com isso, verificar ou não, as propriedades de completude, separabilidade e reflexividade.

Palavras-Chave: Completude, Separabilidade, Reflexividade, Isomorfismo, Espaços de Lebesgue.

Abstract

Through this work, I aim to study the properties of separability, reflexivity, completeness, and duality of the spaces $L_p(X, \Sigma, \mu)$ with $1 \leq p \leq \infty$. For this study, in Chapter 1, we will address preliminary concepts that will serve as a basis in demonstrating future results, highlighting the concept of completeness of a metric space and some of its characteristics. Following this, in Chapter 2, we will discuss what a separable and reflexive space entails, as well as present some of their main properties. Lastly, and not least importantly, for the construction of this work, we will present the study carried out on Lebesgue spaces, aiming to verify the properties of completeness, separability, and reflexivity.

KeyWords: Completeness, Separability, Reflexivity, Isomorphism, Lebesgue Spaces.

Sumário

Lista de Notações	7
Introdução	9
1 Conceitos e resultados preliminares	11
1.1 Espaços Métricos	11
1.2 Isometrias	14
1.3 Funções Contínuas	15
1.4 Topologia	18
1.5 Espaços Métricos Completos	22
1.6 O Teorema de Hanh-Banach	28
1.7 Noções de Medida e integração	32
2 Espaços Separáveis e Reflexivos	36
3 Espaços de Lebesgue	42
Referências Bibliográficas	57

Lista de Notações

- $\text{int } X$ denota o conjunto dos pontos interiores de X ;
- $\overline{X}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a X ;
- ∂X denota o conjunto dos pontos de fronteira de X ;
- $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ representa o gráfico da função $f : X \rightarrow Y$;
- $d(x, y)$ indica a distância de x para y ;
- $|\cdot|$ representa o valor absoluto em $\mathbb{R}$;
- $\|\cdot\|$ representa uma norma;
- d_X denota, a métrica do conjunto X ;
- $\|\cdot\|_X$ denota, a norma no conjunto X ;
- $\|\cdot\|_p$, denota a norma p no espaço $L^p(X, \Sigma, \mu)$;
- $\|\cdot\|_\infty$, denota a norma ∞ no espaço $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$;
- $B(a; r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r ;
- $B[a; r]$ denota a bola fechada de centro a e raio r ;
- $S[a; r]$ denota a esfera de centro a e raio r ;
- $\text{diam } X$ denota o diâmetro de X ;
- $\mathfrak{F}(X; M) = \{f : X \longrightarrow M : f \text{ é uma função}\}$;
- $\mathfrak{B}(X; M) = \{f : X \longrightarrow M : f \text{ é uma função limitada}\}$;
- $\mathfrak{C}(X; M) = \{f : X \longrightarrow M; f \text{ é uma função contínua}\}$;
- $\mathfrak{C}_0(X; M) = \{f : X \longrightarrow M; f \text{ é uma função contínua e limitada}\}$;
- ε e δ denotam constantes positivas;

- $x_n \longrightarrow x$ indica que a sequência (x_n) converge para o ponto x ;
- $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \longrightarrow F : f \text{ é linear e contínua}\}$;
- E' denota o dual de um espaço normado E ;
- E'' denota o bidual de um espaço normado E ;
- $\dim(E)$ denota a dimensão do espaço vetorial E ;

Introdução

Peano, em 1888, estabeleceu, pela primeira vez na história, os axiomas de espaço vetorial. Enquanto que, por sua vez, H. Weber apresentou, em 1893, a definição abstrata de corpo. Já no princípio do século XX, exatamente em 1901, S. Pincherle, com a colaboração do seu aluno U. Amaldi, escreveu o primeiro livro sobre os espaços vetoriais, onde já abordava sobre alguns espaços de funções. É importante considerar que seu livro tratava de funções definidas em conjunto de funções; diferenciando-se do Cálculo, que trata de funções definidas em conjuntos numéricos. Assim, Pincherle nomeou seu estudo por Cálculo Funcional. Um pouco mais adiante, já em 1903, tivemos a noção de funcional, nomeado por J. Hadamard, como transformação linear a valores no corpo de escalares. Anos após, P. Lévy, em 1922, apresentou em seu livro o nome que segue a disciplina até hoje: Análise Funcional.

A Análise Funcional é o ramo da matemática que estende as noções da Álgebra Linear a espaços de dimensão infinita e que está diretamente interessada nos estudos de transformações lineares contínuas nesses espaços. Na Álgebra Linear, naturalmente, temos que as transformações lineares entre os espaços vetoriais são contínuas, pois tais espaços possuem dimensão finita e como já sabemos, toda transformação linear entre espaços de dimensão finita é contínua. É natural que na Álgebra Linear os espaços possuam dimensão finita, pois o carro chefe dessa área são as matrizes, e o espaço das matrizes é isomorfo ao $\mathbb{R}^{m \times n}$. Com o avançar da matemática, surgiram problemas cujas soluções se encontravam em espaços de dimensão infinita, daí surge a necessidade de entender tais espaços e suas propriedades, bem como se comportam as aplicações lineares, pois nem todas eram contínuas nesses espaços.

N. Wiener, E. Helly, S. Banach e H. Hahn, entre os anos de 1920 a 1922, apresentaram os axiomas de norma em seus trabalhos. Algumas implicações surgiram até que chegássemos aos axiomas que conhecemos hoje em dia. Wiener apresentou axiomas confusos, Helly não preocupou-se com a definição da norma em todos os elementos do espaço e Hahn foi além e propôs várias exigências além do necessário, inclusive até a completude. Dessa forma, apenas Banach, após um excelente trabalho de abstração partindo dos problemas concretos estudados por Hadamard e Volterra, expôs, em sua tese defendida em 1920 e publicada em 1922, os axiomas da forma que são conhecidos até hoje. Os espaços normados completos foram referidos por Banach e seus colegas poloneses como espaços

de tipo B. Poucos anos depois, em 1928, o matemático francês M. Fréchet consolidou o termo espaço de Banach.

Em 1921, a partir da constatação de Helly que o mergulho canônico do espaço C das sequências convergentes com a norma $\|\cdot\|_\infty$ no seu bidual não é sobrejetor, surgiu a noção de reflexividade. A partir disso, Hahn observou que a separação entre a classe dos espaços para qual o mergulho canônico é sobrejetor era fundamental e assim fez em 1927. Dessa forma, Hahn chamou esses espaços de regulares. Infelizmente não foi um termo bem sucedido, visto que aparece em outros contextos. Mas, em 1939 E. Lorch, nomeou o termo como espaço reflexivo.

Com o avanço da matemática se fez necessário estender o conceito de integral, segundo Riemann, que nos é apresentada nos cursos de Cálculo. Por exemplo, alguns estudos em que se busca estabelecer a existência de soluções fracas para uma certa classe de Equações Diferenciais Parciais, o conceito de integral de Riemann é insuficiente, daí com base nos escritos de Henri Lebesgue (1875-1941), é definida a integral de Lebesgue, que apresenta algumas vantagens com respeito a integral de Riemann, sobretudo no que se refere ao processo de limite. Em consequência da integral de Lebesgue surgem os espaços de Lebesgue $L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Tendo em vista esse processo histórico, pretendemos estudar os espaços de Lebesgue $L^p(X, \Sigma, \mu)$, com $1 \leq p \leq \infty$, com respeito a completude, separabilidade, reflexibilidade e dualidade. Assim, dividimos este trabalho em três capítulos. No primeiro capítulo, fazemos um aparato de todas as definições e resultados preliminares que, de alguma forma, são importantes para tornar este trabalho independente. Bem como fazemos um estudo a respeito dos espaços métricos completos e do espaço dual de um espaço normado. No segundo capítulo há a definição de espaços separáveis e suas propriedades, assim como, os espaços reflexíveis e suas propriedades. E, por fim, no terceiro capítulo, faremos uma conexão de tudo que foi visto e aplicaremos tais conceitos e propriedades nos espaços de Lebesgue $L^p(X, \Sigma, \mu)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Com o objetivo de tornar a monografia autossuficiente, o primeiro capítulo será para dar base aos próximos capítulos. Ou seja, nesse capítulo estão presentes resultados e definições que são fundamentais para o entedimento de proposições e teoremas exibidos nos próximos capítulos. Sabendo disso, nem todos os resultados se encontram demonstrados aqui, mas o leitor interessado poderá encontrá-los em [6].

1.1 Espaços Métricos

Começaremos com uma abordagem a respeito dos espaços métricos.

Definição 1. Sejam M um conjunto não vazio e $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que d é uma métrica se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $d(x, x) = 0 \ \forall \ x, y \in M$;
- 2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0 \ \forall \ x, y \in M$;
- 3) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall \ x, y \in M$;
- 4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \ \forall \ x, y, z \in M$. (*desigualdade do triângulo*)

Definição 2. Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto não-vazio e d uma métrica em M .

Definição 3. Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado um espaço métrico, basta tomar a restrição $d|_{S \times S}$.

Exemplo 1. Considere a reta $\mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que d satisfaz as condições de métrica, dessa forma, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 2. Outro exemplo de espaço métrico, também bastante conhecido, é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, munido com qualquer uma das três normas abaixo:

$$\text{Dados } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, \dots, y_n)$$

- $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ (métrica euclidiana);
- $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ (métrica da soma);
- $d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (métrica do máximo).

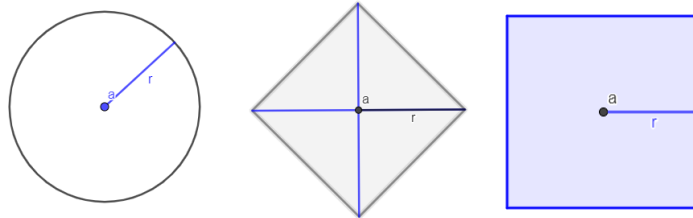
d , d' e d'' satisfazem as condições 1), 2) e 3) na Definição 1.

Partindo para o conceito de Bolas e Esferas, temos importantes definições e proposições que serão de grande utilidade mais à frente. Dessa forma, sejam $a \in M$ e $r > 0$, onde M é um espaço métrico. Os conjuntos $B(a, r) = \{x \in M; d(a, x) < r\}$, $B[a, r] = \{x \in M; d(a, x) \leq r\}$ e $S(a, r) = \{x \in M; d(a, x) = r\}$ são chamados de bola aberta, bola fechada e esfera de centro a e raio r , respectivamente.

Exemplo 3. No plano $\mathbb{R}^2$, utilizando d , d' e d'' como no Exemplo 2, temos que $B[a, r]$ com respeito a:

- 1 - d será um círculo de raio r e centro em a ;
- 2 - d' será um quadrilátero com suas diagonais paralelas aos eixos do plano;
- 3 - d'' será um quadrado com lados paralelos aos eixos do plano.

Vejamos na seguinte figura como ficam respectivamente as bolas d , d' e d'' no $\mathbb{R}^2$:



Denotaremos o espaço métrico (M, d) apenas por M .

Exemplo 4. Sejam (M_i, d_i) , com $i = 1, \dots, n$ espaços métricos. Então o produto cartesiano $M = M_1 \times \dots \times M_n$, tomando a métrica $d(x, y) = \max d(x_i, y_i)$ com $i = 1, \dots, n$ é um espaço métrico. Com essa métrica as bolas em M são produtos cartesianos de bolas nos fatores M_i :

$$B(a, r) = B(a_1, r) \times B(a_2, r) \times \dots \times B(a_n, r)$$

Definição 4. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se um ponto isolado de M quando existe $r > 0$, tal que $B(a, r) \cap M - \{a\} = \emptyset$.

Definição 5. Um espaço métrico M é dito discreto quando todos seus pontos são isolados.

Uma importante utilidade da noção de distância é a definição de limitação, que também veremos como irá funcionar em espaços gerais, como os espaços métricos.

Definição 6. Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, para quaisquer $x, y \in X$. O menor desses valores c será chamado de diâmetro de X ($diam(X)$). Uma vez que para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \leq c$. Temos que c é uma cota superior do conjunto das distâncias, assim:

$$diam(X) = \sup \{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Então, dada a definição, vejamos alguns exemplos e proposições.

Exemplo 5. Bolas abertas ou fechadas e esferas são conjuntos limitados.

Exemplo 6. Um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$ não pode ser limitado. Com efeito, para todo $c > 0$, dado $x \neq 0$ em E podemos tomar o vetor $x_c = 2c \cdot \frac{x}{\|x\|}$, dessa forma temos que $\|x_c\| = 2c$. ■

Proposição 1.1. Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, X estiver contido em alguma bola de M .

Demonstração. $\Leftarrow$) Seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Se $X \neq \emptyset$ está contido em $B[a, r] \subset M$, então X é um subconjunto de um conjunto limitado, logo X é limitado. $\Rightarrow$) Afirmação: Se X é limitado, então $X \subset B(a, 2c)$. Com efeito, se X é um subconjunto limitado do espaço métrico M , então fixado $a \in X$ arbitrário, tem-se que para todo $x \in X$ $d(a, x) \leq c$, dessa forma $x \in B[a, c] \subset B(a, 2c)$. Logo $X \subset B(a, 2c)$. □

Proposição 1.2. Se X e Y são limitados, então $X \cup Y$ é limitado.

Demonstração. Se X ou Y é vazio nada há para fazer. Suponha que $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$. Fixando $a \in X$ e $b \in Y$, existe $c > 0$ tal que $d(x, a) \leq c$ e $d(y, b) \leq c$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Logo se $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, b) + d(a, b)$, então $d(x, y) \leq 2c + d(a, b)$. Tome $k = 2c + d(a, b)$, assim $d(x, y) \leq k$. A desigualdade vale analogamente para os casos restantes, que são quando $x, y \in X$ e $x, y \in Y$. Assim fica provado que $X \cup Y$ é limitado. □

Da Proposição 1.2 concluímos que a união finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado.

Também podemos definir a noção de distância entre um ponto e um conjunto e entre dois conjuntos:

Definição 7. Seja $X \subset M$ não vazio, onde M é um espaço métrico e $a \in M$. Definiremos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real,

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x)$$

.

Observação 1.3. O conjunto $A = \{d(a, x); x \in X\}$ é não vazio e limitado inferiormente. Como sabemos, A pode possuir um menor elemento ou não;

Observação 1.4. Podemos obter $d(a, X) = 0$ sem que necessariamente $a \in X$. De fato, considere $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$, note que $d(0, X) = 0$, pois para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(0, 1/n) < \varepsilon$.

1.2 Isometrias

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$, chama-se uma imersão isométrica, quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para todo $x, y \in M$, ou seja, quando f preserva as distâncias.

Note que uma imersão isométrica é sempre injetora, pois dados se $x, y \in M$ são tais que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0 = d(x, y) \Rightarrow x = y.$$

Definição 8. Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.

Observação 1.5. A composta de duas isometrias é ainda uma isometria e a inversa também.

Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow M$ uma aplicação injetiva. Para qualquer $x, y \in X$, definimos $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isso define uma métrica d' em X , chamada a métrica induzida por f . Essa é a única métrica em X que torna f uma imersão isométrica. Um dos métodos mais frequentes de introduzir uma métrica num conjunto X é induzi-la através de uma aplicação injetiva $f : X \rightarrow M$.

Exemplo 7. Seja $\mathbb{R}^n$ com a métrica induzida por uma norma qualquer. Dados $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $\|u\| = 1$, a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = a + t.u$ é uma imersão isométrica. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$d(f(x), f(y)) = \|a + x.u - a - y.u\| = \|(x - y).u\| = d(x, y).$$

1.3 Funções Contínuas

Na matemática como um todo, temos algumas definições e noções que são de extrema importância para seus vários ramos, uma delas é a de continuidade. Dessa forma, um importante passo para quem estuda análise é se debruçar sobre as propriedades das funções contínuas.

Definição 9. Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que se $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diremos que f é contínua quando for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Definição 10. Equivalentemente, temos que f é contínua em a , quando para toda bola $B(f(a), \varepsilon)$, existe $B(a, \delta)$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Observação 1.6. Assim como na reta, a noção de continuidade é local, ou seja, depende do comportamento de f nas proximidades do ponto em questão.

Definição 11. Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita Lipschitziana quando existe $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.

A definição anterior, de Lipschitz, é de grande valor por facilitar o entendimento e a maneira de como solucionar problemas envolvendo aplicações em que podemos obter a propriedade de ser Lipschitziana. E uma consequência importante de uma aplicação ser de Lipschitz é a seguinte proposição:

Proposição 1.7. Se $f : M \rightarrow N$ é Lipschitziana, então f é contínua.

Demonstração. Se f é Lipschitziana, então existe $c > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$, $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) \leq \delta$ então $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Logo, f é contínua. $\square$

Exemplo 8. Se $a \in M$ é um ponto isolado, então $f : M \rightarrow N$ é contínua em a . Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in B(a, \delta)$ implica que $d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$. Logo f é contínua em a , dessa forma se M é um conjunto discreto, então toda $f : M \rightarrow N$ é uma função contínua.

Observação 1.8. Negar que uma função é contínua, ou seja, descontínua, em um ponto a , é dizer que existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ de forma que podemos obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ implica que, $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Proposição 1.9. A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Ou seja, se $f : M \rightarrow N$ é contínua em a e $g : N \rightarrow P$ é contínua em $f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua em a .

Demonstração. Dadas as hipóteses, temos que:

- i) para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que se $d(a, x) < \delta_1$, então $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$;
- ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$, tal que se $d(y, f(a)) < \delta_2$, então $d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$;

Tome $\delta_2 = \varepsilon$, e $y = f(x) \in N$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(x, a) < \delta_1$ implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ dessa forma, $d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon_2$. Logo, $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua em a . $\square$

Seja $\mathfrak{C}_0(M; N)$ o conjunto das funções contínuas limitadas de M em N , temos que $\mathfrak{C}_0(M; N) \subset \mathfrak{C}(M; N)$.

Em literaturas antigas, é comum, ao estudar topologia, encontrar o termo “Equivalência topológica”, o que hoje conhecemos por Homeomorfismo, seu antigo nome deve-se ao fato de que dois espaços homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista topológico.

Definição 12. Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \rightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ é também contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.

Vejamos um exemplo onde a aplicação bijetora é contínua, mas não é um homeomorfismo.

Exemplo 9. Sejam $f : M \rightarrow N$ com $M = [-1, 0] \cup (1, +\infty)$, e $N = [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Temos que f é uma bijeção contínua, cuja inversa $g : N \rightarrow M$ é dada por $g(y) = \sqrt{y}$, se $y > 1$ e $g(y) = -\sqrt{y}$, se $y \in [0, 1]$. Veremos que g é descontínua no ponto 1. Com efeito, seja $0 < \varepsilon < 2$, para cada $n \in \mathbb{N}$ o ponto $1 + \frac{1}{n}$ e $g(1 + \frac{1}{n}) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, onde $|g(1 + \frac{1}{n}) - g(1)| > 2 > \varepsilon$. Logo, g é descontínua no ponto 1.

Uma propriedade de um espaço métrico M é dita topológica quando todo espaço homeomorfo a ele também possui essa propriedade. Como toda isometria é um homeomorfismo, então toda propriedade topológica é métrica, mas não vale a recíproca, como veremos a seguir:

Exemplo 10. Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle x, x \rangle = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e $P = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ o seu polo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^n - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x) = p + \frac{x-p}{1-x_{n+1}}$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o polo norte e o plano euclidiano.

Definição 13. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f : E \rightarrow F$ chama-se transformação linear quando, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ e } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Definição 14. Uma transformação linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, onde E é um espaço vetorial real, é chamada de funcional linear.

Proposição 1.10. Se $\dim(E) = k$ e $f : E \longrightarrow F$ é uma transformação linear, então f é contínua.

Demonstração. Seja $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de E . Daí, se $x \in E$, então escrevemos $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_k \cdot e_k$. Dessa forma,

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_k \cdot f(e_k),$$

então,

$$|f(x)| \leq |x_1| \cdot |f(e_1)| + \dots + |x_k| \cdot |f(e_k)|$$

tomando $c = \max \{|f(e_i)|\}$, com $i = 1, \dots, k$, temos que

$$|f(x)| \leq c \cdot (|x_1| + \dots + |x_k|).$$

Agora, como todo espaço vetorial de $\dim(E) = k$ é homeomorfo ao $\mathbb{R}^k$, podemos tomar em E a norma $|x| = |x_1| + \dots + |x_k|$. Dessa forma, temos que

$$|f(x)| \leq c \cdot |x|,$$

para todo $x \in E$. Dado que f é uma transformação linear, temos

$$|f(x - y)| = |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|.$$

Logo, f é lipschitziana e consequentemente contínua. □

Mas não é verdade que toda transformação linear $f : E \longrightarrow F$ seja contínua. Um contra exemplo é o do funcional linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, onde E é o conjunto dos polinômios reais de uma variável. Definiremos a norma $\|P\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$. Dado $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(P) = P(2)$. Mostraremos que f é descontínua no ponto $0_E \in E$. Sendo assim, tomando $\frac{\varepsilon}{2}$ temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um polinômio $P_n(x) = (\frac{x}{2})^n$, tal que $\|P_n - 0\| = (1/2)^n < 1/n$, mas $|f(P_n) - f(0)| = 1 \geq \varepsilon$.

Definição 15. Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quaisquer $x, y \in M$, se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exemplo 11. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$, se $x > 0$. A função f é contínua, mas não é uniformemente contínua, pois temos pontos em M $x, -x$ tais que $|f(x) - f(-x)| = 2$.

1.4 Topologia

Assim como na reta real, os intervalos abertos e fechados exercem papel fundamental na teoria da análise real. Aqui abordaremos conjuntos com propriedades que generalizam essas já vistas e demais outras.

Definição 16. Seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Um ponto $a \in X$ é dito um ponto interior a X quando a é centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se “interior de X ” e escrevemos $\text{int}(X)$.

Motivados pela definição de interior de um conjunto, também definimos:

Definição 17. A fronteira de $X \subseteq M$ é o conjunto ∂X formado pelos pontos $b \in M$, tais que toda bola aberta $B(b, r)$ contém pontos de X e de seu complementar $M \setminus X$.

Exemplo 12. Em $\mathbb{R}$, o interior de $\mathbb{Q}$ é vazio, pois nenhum intervalo possui apenas números racionais. Por outro lado sua fronteira é toda a reta $\mathbb{R}$, pois todo intervalo possui números racionais e irracionais.

Definição 18. Seja $A \subset M$. Diremos que A é um conjunto aberto em M quando todos pontos de A forem pontos interiores, ou seja, $\text{int}(A) = A$. Dessa forma, A é aberto se, e somente se, $\partial A \cap A = \emptyset$.

A definição de aberto é extremamente importante, principalmente ao utilizarmos como caracterização das aplicações contínuas. Então, vejamos alguns exemplos e resultados a respeito destes conjuntos.

Exemplo 13. Em qualquer espaço métrico M , uma bola aberta é um conjunto aberto. Seja $x \in B(a, r)$, então $d(a, x) < r$, assim o número real $s = r - d(a, x) > 0$. Tome $y \in B(x, s)$, logo $d(y, x) < s = r - d(x, a)$ implica que $d(x, y) + d(x, a) < r$. Assim, pela desigualdade triangular $d(a, y) < r$. Logo $y \in B(a, r)$, então $B(x, s) \subset B(a, r)$. Portanto $B(a, r)$ é um conjunto aberto.

Proposição 1.11. *Seja $\mathfrak{A}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M , então:*

$$1 \ M \in \mathfrak{A} \text{ e } \emptyset \in \mathfrak{A};$$

$$2 \ \text{Se } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A} \text{ então } A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{A};$$

$$3 \ \text{Se } A_\lambda \in \mathfrak{A} \text{ para todo } \lambda \in L, \text{ então } A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{A}.$$

Demonstração. 1): Temos que o vazio é aberto por vacuidade. Para mostrar que M é aberto em si mesmo, basta observar que $M \cap \partial M = \emptyset$.

2): Suponha que $a \in A_1, \dots, a \in A_n$. Como esses conjuntos são abertos, então existem $r_1, \dots, r_n$ todos positivos, tais que $B(a, r_1) \subset A_1, \dots, B(a, r_n) \subset A_n$. Tome $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, temos assim que $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset A_1, \dots, B(a, r) \subset B(a, r_n) \subset A_n$, logo $B(a, r) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$, assim temos que $A_1 \cap \dots \cap A_n$ é aberto.

3): Seja $a \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como esse conjunto é aberto, há uma bola $B(a, r)$ contida em A_λ . Logo, $B(a, r) \subset A$, assim A é aberto. $\square$

Como visto na proposição anterior, a interseção finita de abertos é aberto. Mas e a interseção infinita? veremos agora um exemplo em que não obtemos um conjunto aberto na interseção infinita:

Exemplo 14. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$ só se for isolado, mas todo ponto a é a interseção de uma família enumerável de intervalos abertos, a saber $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Seja $x \neq a$ então $d(x, a) > 0$, logo existe $n_i \in \mathbb{N}$, tal que $d(x, a) \geq 1/n_i$, logo $x \notin \left(a - \frac{1}{n_i}, a + \frac{1}{n_i}\right)$. Assim, a é o único ponto que pertence a todos intervalos abertos $(a - 1/n, a + 1/n)$.

A importância da noção de conjunto aberto na topologia dos espaços métricos se deve principalmente ao resultado seguinte:

Proposição 1.12. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um aberto de M .*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que f seja contínua, tomemos $A' \subset N$ aberto e mostraremos que $f^{-1}(A')$ é aberto em M . De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos $f(a) \in A'$. Pela definição de conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a , ao ε corresponde um $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset A'$. Isto quer dizer que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto.

$(\Leftarrow)$ Suponha que a imagem inversa de cada aberto em N seja aberto em M por f . Seja $a \in M$ e dado $\varepsilon > 0$, a bola $A' = B(f(a), \varepsilon)$ é um aberto em N , contendo $f(a)$. Logo, sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é um conjunto aberto em M contendo a . Assim, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$, ou seja, $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. $\square$

Corolário 1. O produto cartesiano $A_1 \times \dots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times \dots \times M_n$.

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, n$ a projeção $p_i : M \rightarrow M_i$ é contínua logo, sendo A' aberto em M_i , temos que $p_i^{-1}(A')$ é aberto em M , logo $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n)$. E, como visto anteriormente, a interseção finita de abertos é um aberto. $\square$

Uma pergunta que pode surgir naturalmente é: Se $f : M \rightarrow N$ é contínua e A um aberto de M , então $f(A)$ é um aberto de N ? Considere

$$f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f(x) = x^2$, é fácil ver que a imagem $[0, a^2)$ não é um aberto em $\mathbb{R}$.

Definição 19. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se aberta quando para cada $A \subset M$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N .

Assim como em conjuntos abertos, os fechados tiveram papel fundamental nos meus estudos subsequentes a essa sessão. Sendo assim, iremos definir e apresentar algumas de suas propriedades que tanto me foram úteis.

Definição 20. Um ponto a é dito aderente a um conjunto $X \subset M$, com M um espaço métrico, quando para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Definição 21. O fecho de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X .

Observação 1.13. i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

ii) $\overline{M} = M$ onde M é um espaço métrico;

iii) $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$.

Além disso se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Para que $a \notin \overline{X}$ é necessário que exista bola aberta de centro em a e raio r , onde $B(a, r) \cap X = \emptyset$, ou seja, $a \in \text{int}(M - X)$.

Definição 22. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$.

Exemplo 15. Se $X \subset M, Y \subset N$ são subconjuntos densos, então $X \times Y$ é denso em $M \times N$. Com efeito, seja $A \subset M \times N$ aberto não vazio, tem-se que A contém um aberto da forma $U \times V$, sendo U aberto em M e V aberto em N . Sendo $\overline{X} = M, \overline{Y} = N$, assim existem pontos $x \in X \cap U$ e $y \in Y \cap V$. Então $z = (x, y) \in (U \times V) \cap (X \times Y)$ e portanto $z \in A \cap (X \times Y)$. Assim, provando que $X \times Y$ é denso em $M \times N$.

Proposição 1.14. Para todo ponto a e todo subconjunto não vazio X num espaço métrico M , tem-se $d(a, X) = d(a, \overline{X})$.

Demonstração. Como $X \subset \overline{X}$, temos que $d(a, \overline{X}) \leq d(a, X)$ por definição de ínfimo. Vamos mostrar que não vale o sinal $<$, para tal veremos que não existe c tal que $d(a, \overline{X}) < c$ e $c < d(a, X)$. Dessa forma, se $d(a, \overline{X}) < c$, então existe $\bar{x} \in \overline{X}$ tal que $d(a, \bar{x}) < c$. Seja $x \in X$, tal que $d(x, \bar{x}) < c - d(a, \bar{x})$. Pela desigualdade triangular temos:

$$d(a, X) \leq d(a, x) \leq d(a, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < d(a, \bar{x}) + c - d(a, \bar{x}) = c,$$

logo $d(a, X) < c$. □

Corolário 2. Para qualquer $X \subset M$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração. Seja

$$a \in \overline{\overline{X}} \Rightarrow d(a, \overline{X}) = 0 \Rightarrow d(a, X) = 0.$$

Assim $a \in \overline{X}$. □

Definição 23. Diz-se que um conjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M , quando seu complementar $M - F$ é aberto em M .

Proposição 1.15. Dado $F \subset M$, tem-se que $\overline{F} = F$ se, e somente se, F é fechado.

Demonstração. $F = \overline{F}$ se, e só se, os pontos que não pertencem a F não são aderentes a F , ou seja, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset M - F$ para todo $a \in M - F$, logo $M - F$ é aberto. □

Negar que um subconjunto X de M seja fechado, significa que existe um ponto que não está em X , mas pertence ao seu fecho. Ou seja, esse ponto está na fronteira de X . Logo, X é fechado se, e somente se, $\partial X \subset X$.

Vale observar que a definição de “aberto” não é contrária a noção de “fechado”, por exemplo, temos conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo, como no caso do conjunto vazio e da reta $\mathbb{R}$ em si mesma. Também temos conjuntos que não são nem abertos e nem fechados, exemplo $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Assim, é importante se manter atento no espaço métrico ao qual o conjunto está inserido.

Exemplo 16. A fronteira ∂X de qualquer subconjunto de M é um subconjunto fechado de M . Basta observar que o complementar de ∂X é a união $\text{int}(X) \cup \text{int}(M - x)$, que são abertos.

Proposição 1.16. Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M , satisfazem as seguintes propriedades:

- 1) A reunião de $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$, de fechados é um fechado;
- 2) A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família arbitrária de fechados é um fechado.

Demonstração. Decorre diretamente das propriedades de união e interseção de abertos. □

Proposição 1.17. Sejam M, N espaços métricos. Para que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset N$, seja fechada.

Demonstração. Segue da Proposição 1.12. □

Exemplo 17. A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Para isso, nota-se que todo conjunto é a reunião de seus pontos, que são conjuntos fechados. Logo basta tomar um conjunto que não é fechado como contra exemplo.

Exemplo 18. O conjunto $\mathfrak{C}_0(M; N)$ das aplicações contínuas limitadas $f : M \rightarrow N$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathfrak{B}(M; N)$. Mais geralmente, dada qualquer função $f : M \rightarrow N$ o conjunto $\mathfrak{C}_f(M; N)$ das funções contínuas de M em N que estão a uma distância finita de f , é um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}_f(M; N)$.

1.5 Espaços Métricos Completos

Definição 24. Uma sequência num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ tal que $x(n) = x_n$.

Usaremos a notação (x_n) para representar uma sequência.

Definição 25. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M . Diz-se que o ponto $a \in M$ é o limite da sequência quando para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica que $d(x_n, a) < \varepsilon$. Equivalentemente, nessas condições $x_n \in B(a, \varepsilon)$, para todo $n > n_0$.

Definição 26. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$, temos $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Onde d é a métrica do espaço M .

Em outras palavras, uma sequência é dita de Cauchy quando seus pontos estão tão próximos quanto se queira para n suficientemente grande.

Proposição 1.18. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M , então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ nos dá $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Notemos que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Por exemplo: tome a sequência de números racionais $x_1 = 1; x_2 = 1,4; x_3 = 1,41; \dots$ convergindo para $\sqrt{2}$ que é irracional. Assim, a sequência (x_n) é convergente na reta e consequentemente é de Cauchy, mas ela não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Definição 27. Uma sequência (x_n) em M é dita limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$, tal que $d(x_m, x_n) \leq c$, para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.19. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, então dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ temos que $d(x_m, x_n) < 1$. Logo $\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Segue que $\{x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$ é limitado por poder ser escrito como união de conjuntos limitados $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_0-1}\} \cup \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$. $\square$

Note também que a recíproca não é válida, isto é, nem toda sequência limitada é de Cauchy. Com efeito, tome $(x_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ perceba que essa sequência é limitada, mas não é de Cauchy, já que $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 28. Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$. Usaremos a notação (x_{n_k}) para subsequências.

Proposição 1.20. *Se uma sequência (x_n) de Cauchy possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente e ambas convergem para o mesmo limite.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy em (M, d) e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para $a \in M$. Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p$, temos que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. E para o mesmo ε existe $q \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > q$, temos que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora tomando $n_0 = \max\{p, q\}$ para todo $n > n_0$, existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim $\lim x_n = a$. $\square$

Proposição 1.21. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $f : M \rightarrow N$ uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$ implica em $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Assim, dado $\delta > 0$ (dependendo apenas de ε), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \delta$ para todo $m, n > n_0$ nos dá que $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Logo $f(x_n)$ é de Cauchy. $\square$

Observação 1.22. Note que, se a nossa aplicação for apenas contínua, o resultado não será válido sempre. Tome como exemplo a aplicação contínua $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ e considere a sequência de Cauchy $x_n = \frac{1}{n}$. Temos que f é contínua e (x_n) é de Cauchy, mas $f(x_n) = n$ não é de Cauchy.

Corolário 3. Seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo uniforme. Uma sequência (x_n) em M é de Cauchy se, e só se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N .

Exemplo 19. Levar sequência de Cauchy em sequência de Cauchy não garante a continuidade uniforme, apenas a continuidade.

Seja $x_n \rightarrow a$, construíremos uma sequência de Cauchy da seguinte forma, $(x_1, a, x_2, a, \dots)$. Assim, sendo f uma função que leva sequência de Cauchy em sequência de Cauchy, temos que $(f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$ é de Cauchy. Logo, pela Proposição 1.21 $\lim f(x_n) = f(a)$. Dessa forma, f é contínua, mas, por outro lado temos que a função contínua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ não é uniformemente contínua. Mas se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, como $f|_{[-c,c]}$ é Lipschitziana, temos então que $(g(x_n))$ é de Cauchy.

Exemplo 20. Uma sequência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ é de Cauchy se, e só se, as sequências $(x_n) \in M$ e $(y_n) \in N$ são de Cauchy. Isto resulta do exemplo anterior e do fato de que a aplicação $f : P \rightarrow M \times N$, dada por $f(\frac{1}{n}) = (x_n, y_n)$ ser uniformemente contínua se, e somente se, suas coordenadas $p_1 \circ f : P \rightarrow M$ e $p_2 \circ f : P \rightarrow N$ são uniformemente contínuas.

Agora que conhecemos o que são sequências de Cauchy e algumas de suas propriedades, vamos abordar o que temos por completude de um espaço métrico. Aqui iremos ver conceitos e Teoremas de grande importância na área.

Definição 29. Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M .

Após definido o que vem a ser um espaço métrico completo, veremos adiante proposições que dão condições de completude e exemplos importantes de espaços métricos que são completos.

Exemplo 21. O conjunto dos números racionais, quando munido da métrica provinda do módulo, não é completo, como vimos após a Proposição 1.18. Todo espaço métrico com a métrica zero-um é completo, pois qualquer sequência de Cauchy nele será constante para valores de $n, m > n_0$.

Proposição 1.23. A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Tome para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, temos $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ com esses conjuntos limitados. Seja $a_n = \inf X_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$. Como (a_n) é monótona e limitada, então existe $a = \lim a_n$. Vamos mostrar que $a = \lim x_n$.

Dessa forma, sendo $a = \lim a_n$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ onde para todo $m > n_1$, temos que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m$ tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$ (definição

de ínfimo), isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Assim provamos que dada uma sequência de Cauchy arbitrária em $\mathbb{R}$, ela é convergente. Logo, $\mathbb{R}$ é completo. $\square$

Proposição 1.24. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F , existe $a = \lim x_n$, com $a \in M$ pois M é completo, assim por F ser fechado $a \in F$, logo F é completo.

($\Leftarrow$) Se $N \subset M$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in N$, com $\lim x_n = a \in M$, a sequência (x_n) é de Cauchy pela Proposição 1.18. Logo, existe $b \in N$ tal que $\lim x_n = b$, pela unicidade do limite, tem-se $a = b$ e portanto N é fechado em M . $\square$

A respeito da completude dos espaços da forma $M \times N$ munido com uma das métricas vistas no exemplo 2

Proposição 1.25. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy em M e N , respectivamente. Considere a sequência $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$, temos que z_n é uma sequência de Cauchy, pois suas coordenadas são de Cauchy, e por $M \times N$ ser completo, temos que existe $c = \lim z_n$, com $c = (a, b) \in M \times N$. Logo, temos que $z_n \rightarrow c$ se, e só se, $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$. Consequentemente, M e N são completos.

($\Leftarrow$) Sejam M e N completos. Dada uma sequência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, seja $z_n = (x_n, y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Com as projeções $p_1 : M \times N \rightarrow M$ e $p_2 : M \times N \rightarrow N$ são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N , respectivamente. Logo existem $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$, com $a \in M$ e $b \in N$, vemos que pondo $c = (a, b) \in M \times N$, temos $\lim z_n = c$. $\square$

Note que a Proposição anterior vale para $\prod_{i=1}^n M_i$. Visto antes na Proposição 1.25 que o $\mathbb{R}^n$ é completo.

Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \rightarrow M$ uma aplicação. A notação $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \rightarrow M$, tais que $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 1.26. *Se o espaço métrico M é completo, então $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \rightarrow M$.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$, queremos mostrar que existe $f \in \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Assim, temos que (f_n) é limitada,

e existe $c > 0$ tal que $d(f_n(x), \alpha(x)) < d(f_n, \alpha) \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Se fixarmos $x \in X$, obtemos que a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy em M , pois dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_m, f_n) < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$. Como M é completo, então existe $\lim f_n(x) = f(x)$ (perceba que aqui o $n_0(x, \varepsilon)$, logo $(f_n(x))$ converge simplesmente para $f(x)$). Note que $f \in \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$, pois como $d(f_n(x), \alpha(x)) < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, então tomando $n \rightarrow +\infty$ temos $d(f(x), \alpha(x)) \leq c$. Agora falta provar que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas do ε) tal que $d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$. Tome $m \rightarrow +\infty$, assim $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ e $n > n_0$. Provando que (f_n) converge uniformemente para $f(x) \in \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$, logo $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ é completo. $\square$

Corolário 4. (Critério de Cauchy para convergência uniforme) Seja M um espaço métrico completo. A fim de que uma sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$ convirja uniformemente em X , é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implique $d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X , então $f_n \in \mathfrak{B}_f(X; M)$ para todo n suficientemente grande e $\lim f_n = f$ nesse espaço. Logo (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}_f(X; M)$.

($\Leftarrow$) Tome $\varepsilon = 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $\alpha = f_{n_0+1}$, vale $d(f_n, \alpha) \leq 1$, ou seja, $f_n \in \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ se $n > n_0$. Além disso, a condição admitida diz que $(f_n)_{n > n_0}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$. Segue que (f_n) converge uniformemente em X . $\square$

Corolário 5. Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo, então para toda aplicação $\alpha : M \rightarrow N$, o espaço métrico $\mathfrak{C}_\alpha(M; N)$ (O espaço métrico das funções contínuas $f : M \rightarrow N$ tal que $d(f, \alpha) < \infty$) é completo.

Demonstração. Como $\mathfrak{C}_\alpha(M; N) \subset \mathfrak{B}_\alpha(M; N)$ formado pelas aplicações contínuas que estão a uma distância finita de α é um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}_\alpha$, segue que $\mathfrak{C}_\alpha(M; N)$ é completo. $\square$

Uma bola fechada $B[a, r]$ e a esfera $S(a, r)$ são completos em $\mathbb{R}^n$, pois são subconjuntos fechados do $\mathbb{R}^n$. Se M é completo, as bolas fechadas e esferas de M são espaços completos. Nenhuma bola aberta num espaço vetorial normado é um espaço completo com a métrica induzida, pois não é um subconjunto fechado. Considerando $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$, temos um exemplo de espaços homeomorfos, um completo e outro não.

No século XX, grandes matemáticos se destacaram por contribuições a diversas áreas, mas dois deles se destacaram por suas contribuições a análise funcional, teoria essa que teve seu desenvolvimento durante esse período. São eles: o polonês Stefan Banach (1892-1945) e o alemão David Hilbert (1862-1943), que deram origem aos espaços que hoje levam os seus nomes, além de outras contribuições. Nessa subseção trataremos de entender a definição e as propriedades dos espaços de Banach e de Hilbert.

Definição 30. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.

Exemplo 22. O $\mathbb{R}^n, B(X, F), \mathfrak{C}_0(M; F)$ são espaços de Banach onde X é um conjunto qualquer, M um espaço métrico e F um espaço de Banach.

Mas nem todo espaço vetorial normado é completo, como podemos ver tomando nosso espaço como sendo $\mathbb{P}[0, 1]$ o conjunto das funções polinomiais $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Onde podemos considerar sua norma como $\|p\| = \sup_{t \in [0, 1]} |p(t)|$.

Com efeito, como visto no curso de análise na reta, sabemos que $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em $[0, 1]$ para a função contínua e^x , que não é um polinômio. Logo (p_n) é uma sequência de Cauchy, pois é convergente, que não converge no conjunto $\mathbb{P}[0, 1]$.

1.6 O Teorema de Hanh-Banach

Nesta seção vamos tratar de um dos mais importantes teoremas da análise funcional, o Teorema de Hanh-Banach, em sua forma analítica. Tal Teorema desempenhará um papel importante no estudo dos espaços reflexivos, tema este abordado no próximo capítulo. Para tanto vamos precisar de algumas definições a fim de estabelecer este teorema bem como algumas de suas consequências.

Sejam E e F espaços vetoriais normados quaisquer. O conjunto $\mathfrak{L}(E, F)$ denota o espaço das transformações lineares e contínuas de E em F . Isto é,

$$\mathfrak{L}(E, F) = \{T : E \rightarrow F; T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Uma pergunta natural pode surgir: Mas toda transformação linear não é contínua? Se tivermos trabalhando apenas com espaços de dimensão finita, sim. Mas, isto não é verdade, caso $\dim(E) = \infty$. Com efeito, seja $E = \mathbb{P}[0, 1]$, $F = \mathbb{R}$ e defina

$$T : E \rightarrow F$$

$$p(x) \mapsto T(p(x)) = \sum_{j=0}^n j a_j$$

sempre que $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Não é difícil ver que T está bem definida e é linear. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$ considere $p_k(x) = (1/k)x^k$ e observe que $p_k(x) \rightarrow 0$ (zero aqui denota o polinômio nulo), no entanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(p_k(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k} = 1 \neq T(0).$$

Portanto, T não é contínua.

Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então, podemos definir uma norma em $\mathfrak{L}(E, F)$ dada por

$$\|f\|_{\mathfrak{L}(E, F)} = \sup_{x \in B_E} \{\|f(x)\|_F\},$$

em que B_E representa a bola fechada unitária em E .

Quando $F = \mathbb{R}$, denotaremos $\mathfrak{L}(E, F)$ por E' e o mesmo será chamado de espaço dual do espaço vetorial normado E .

Proposição 1.27. *Se F é completo então $\mathfrak{L}(E, F)$ é completo.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{L}(E, F)$. Assim, dado $x \in E$ não nulo, temos

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \|x\|_E \|f_n - f_m\|_{\mathfrak{L}(E, F)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em F . Como F é completo, para cada $x \in E$ não nulo existe $f(x) \in F$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Daí, defina

$$g : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Agora observe que

$$g(x + \lambda y) = f(x + \lambda y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + \lambda y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = g(x) + \lambda g(y).$$

Ou seja, g é linear. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \|x\|_E \|f_n - f_m\|_{\mathfrak{L}(E, F)} \leq \varepsilon \|x\|_E$$

Tomando $n = n_0$ e fazendo $m \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|[f_{n_0} - f](x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

De onde concluímos que $[f_{n_0} - f] \in \mathfrak{L}(E, F)$ e assim, como $f = f_{n_0} - [f_{n_0} - f]$ segue que $f \in \mathfrak{L}(E, F)$. Portanto, $\mathfrak{L}(E, F)$ é completo. $\square$

Definição 31. Seja F um subespaço do espaço vetorial E . Diremos que um funcional $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ estende $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$, quando $\varphi'(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in F$.

Teorema 1.28. (*Teorema de Hahn-Banach.*) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $p(ax) = ap(x)$ para todo $a > 0$ e todo $x \in E$, e $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in E$. Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ e que satisfaz $\varphi'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$P = \left\{ \phi : D(\phi) \subset E \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} \phi \text{ é linear, } D(\phi) \text{ é um subespaço de } E, \\ G \subset D(\phi) \text{ e } \phi(x) \leq p(x) \forall x \in D(\phi) \end{array} \right\}.$$

Vamos definir uma relação de ordem parcial no conjunto P , diremos que

$$\phi_1 \leq \phi_2 \iff D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1.$$

Note que P é não vazio, pois $\varphi \in P$. Vamos verificar que todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior. Dessa forma, dado $Q \subseteq P$ totalmente ordenado, defina $D(\phi) = \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta)$ e

$$\begin{aligned} \phi : D(\phi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x) = \theta(x), \quad \text{sempre que } x \in D(\theta). \end{aligned}$$

Uma vez que Q é totalmente ordenado temos que ϕ está bem definida, além disso, não é difícil ver que $\phi \in P$ e que ϕ é cota superior de Q , pois para todo $\theta_1 \in Q$, $D(\theta_1) \subset \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta)$, e $\phi(x) = \theta_1(x)$ com $x \in D(\theta_1)$. Logo $\theta_1 \leq \phi$, para todo $\theta_1 \in Q$. Assim, podemos utilizar o Lema de Zorn e concluímos que P admite um elemento maximal, que denotaremos por φ' . Assim, para concluirmos a demonstração falta provar que $D(\varphi') = E$. Suponha por absurdo, que $D(\varphi') \neq E$. Logo, tome $x_0 \in E - D(\varphi')$ e defina $\phi' : D(\phi') \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $D(\phi') = D(\varphi') + [x_0]$ e $\phi'(x + tx_0) = \varphi'(x) + t\alpha$, onde α é uma constante, tal que

$$\sup_{x \in D(\varphi')} \{\varphi'(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\varphi')} \{p(x + x_0) - \varphi'(x)\},$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \alpha &= \phi'(x + x_0) \leq p(x + x_0) \quad \forall x \in D(\varphi') \\ &\text{e} \\ \varphi'(x) - \alpha &= \phi'(x - x_0) \leq p(x - x_0) \quad \forall x \in D(\varphi'). \end{aligned}$$

Tal escolha de α é possível, pois

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \varphi'(y) &= \varphi'(x + y) \leq p(x + y) \\ &= p(x + x_0 + y - x_0) \\ &\leq p(x + x_0) + p(y - x_0). \end{aligned}$$

De onde obtemos que

$$\varphi'(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \varphi'(x), \quad \forall x, y \in D(\varphi').$$

Assim, concluímos que:

1) Para $t > 0$, temos

$$\phi'(x + tx_0) = \phi'(t(x/t + x_0)) = t\phi'(x/t + x_0) = t(\varphi'(x/t) + \alpha) \leq tp(x/t + x_0) = p(x + tx_0).$$

2) Para $t < 0$, temos

$$\begin{aligned}\phi'(x + tx_0) &= \phi'(-t(-x/t - x_0)) = -t\phi'(-x/t - x_0) = -t(\phi'(-x/t) - \alpha) \\ &\leq -tp(-x/t - x_0) = p(x + tx_0).\end{aligned}$$

3) Para $t = 0$, temos

$$\phi'(x + tx_0) = \phi'(x) = \varphi'(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Logo ϕ' é majorada por $p(x)$ e como ϕ estende φ , segue que $\phi' \in P$. Note que $D(\varphi') \subseteq D(\phi') = D(\varphi') + [x_0]$ com $x_0 \in E - D(\varphi')$ e ϕ' estende φ' , logo $\varphi' \leq \phi'$ com $\phi' \in P$ contrariando a maximalidade de φ' . Logo, $D(\varphi') = E$. $\square$

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach temos alguns resultados abaixo, o qual destacamos alguns que fazem uma relação entre elementos do espaço vetorial E e elementos do seu dual E' .

Corolário 6. Sejam G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{R}$ e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.

Demonstração. Basta escolher $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ e aplicar o Teorema 1.28. $\square$

Corolário 7. Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 6 com $G = [x_0]$ e $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$. $\square$

Corolário 8. Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então,

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| / \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Dado o funcional $\varphi \in E'$, cuja norma seja menor ou igual a 1, temos que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|x\|$, como já vimos anteriormente. Assim, conseguimos mostrar que $\sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|x\|$. E o fato do supremo ser atingido em um funcional de norma 1, segue diretamente do corolário anterior. $\square$

Proposição 1.29. Sejam E um espaço normado, M subespaço fechado, $x_0 \in E - M$ e $d_0 = d(x_0, M)$. Então existe $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que,

a) $\phi(x) = 0$, para todo $x \in M$;

b) $\|\phi\| = 1$;

$$c) \phi(x_0) = d_0.$$

Demonstração. Defina $\varphi : M \oplus \langle x_0 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x + \lambda x_0) = \lambda d_0$. Note que φ é linear e $\varphi(M) = \{0\}$ e $\varphi(x_0) = d_0$. Vamos verificar que $\|\varphi\| = 1$.

$$|\lambda|d_0 = \|\varphi(x + \lambda x_0)\| = |\lambda| \left\| \varphi\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) \right\|$$

como $\left\| \frac{x}{\lambda} + x_0 \right\| \geq \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| = d_0$, por definição segue a última igualdade. Isso implica que, $\|\varphi(x + \lambda x_0)\| = |\lambda|d_0 \leq |\lambda| \left\| \frac{x}{\lambda} + x_0 \right\| = \|x + \lambda x_0\|$, para todo $x \in M$, logo $\|\varphi\| \leq 1$.

Por definição de ínfimo, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in M$ tal que $\|x_0 - \frac{x}{\lambda}\| < d_0 + \varepsilon$ e isso implica que

$$\frac{\|\varphi(x + \lambda x_0)\|}{\|x + \lambda x_0\|} > \frac{|\lambda|d_0}{|\lambda|(d_0 + \varepsilon)} > \frac{d_0}{d_0 + \varepsilon}.$$

Dessa forma, $\sup_{y \neq 0} \frac{\|\varphi(y)\|}{\|y\|} > d_0/(d_0 + \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$. Considerando $z = \frac{y}{\|y\|}$, temos que $\sup \|\varphi(z)\| > \frac{d_0}{d_0 + \varepsilon}$ e como ε é arbitrário $\|\varphi\| \geq 1$. Logo $\|\varphi\| = 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe a extensão linear $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\|\phi\| = 1$. $\square$

1.7 Noções de Medida e integração

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados que não serão demonstrados, uma vez que Medida e Integração não é o foco deste estudo de trabalho. Tal seção está nesta monografia apenas para deixar a mesma autossuficiente. Ao leitor interessado em mais detalhes sugerimos a leitura de [6].

Definição 32. Uma σ -álgebra no conjunto X é uma família Σ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\emptyset, X \in \Sigma$;
- 2) Se $A \in \Sigma$, então $A^c \in \Sigma$;
- 3) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Neste caso o par (X, Σ) é chamado de espaço mensurável, e cada elemento da σ -álgebra é chamado de conjunto mensurável.

Observação 1.30. Dada uma coleção F de subconjuntos de X , a interseção de todas as σ -álgebras que contêm F é ainda uma σ -álgebra, chamada de σ -álgebra gerada por F e denotada por $\Sigma(F)$.

Definição 33. Quando (X, τ) é um espaço topológico, a σ -álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de σ -álgebra de Borel. E seus elementos de conjuntos de Borel ou borelianos.

Definição 34. Chamamos de a reta estendida o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, também denotado por $[-\infty, \infty]$.

Definição 35. A topologia usual de $\mathbb{R}$ induz uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ considerando como abertos os subconjuntos $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ da forma:

- 1) $A \subset \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$, ou
- 2) $A = [-\infty, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
- 3) $A = (a, \infty]$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
- 4) A é uma união de conjuntos como os de 1), 2) ou 3).

Consideraremos $\overline{\mathbb{R}}$ como espaço mensurável com a σ -álgebra de Borel $B(\overline{\mathbb{R}})$ com esta topologia.

Definição 36. Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : (X, \Sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo boreliano $A \in B(\overline{\mathbb{R}})$.

O conjunto formado por tais funções será denotado por $M(X, \Sigma)$. Consideraremos também o conjunto $M^+(X, \Sigma)$ formado pelas $f \in M(X, \Sigma)$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X$.

Definição 37. Definição de Medida. Uma medida no espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes condições:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) Se $(A_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$, e é dita σ -finita se existirem conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n . O termo (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Definição 38. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f, g, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que:

- a) f é igual a g μ -quase sempre se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f = g$ μ -quase sempre;
- b) (f_n) converge para f μ -quase sempre se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre.

Definição 39. Dados um espaço mensurável (X, Σ) e $A \subset X$, a função característica de A é definida por $\mathcal{X}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (1.1)$$

$\mathcal{X}_A$ é mensurável se, e somente se, $A \in \Sigma$. Uma combinação linear de funções características mensuráveis é chamada de função simples mensurável. Toda função simples mensurável é representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ são números reais não-nulos e distintos, e $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos mensuráveis não-vazios e disjuntos dois a dois.

Definição 40. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

- a) A integral da função simples $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$, cuja representação canônica é $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \mathcal{X}_{A_j}$, em relação à medida μ , é definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j)$$

- b) A integral da função $f \in M^+(X, \Sigma)$ em relação à medida μ é definida por

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu; \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

- c) Para $f \in M^+(X, \Sigma)$ e $A \in \Sigma$, define-se

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathcal{X}_A d\mu.$$

Teorema 1.31. (*Teorema da Convergência Monótona*) Seja (f_n) uma sequência em $M^+(X, \Sigma)$ tal que $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ para todo $x \in X$.

- a) Se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, então $f \in M^+(X, \Sigma)$ e $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

b) Se $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre e $f \in M^+(X, \Sigma)$, então $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Teorema 1.32. (Lema de Fatou) Se (f_n) é uma sequência em $M^+(X, \Sigma)$, então

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_X f_n d\mu$$

Teorema 1.33. (Teorema da Convergência Dominada) Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$ que converge μ -quase sempre para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe $g \in \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo n , então $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \Sigma, \mu)$ e $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Teorema 1.34. Para $1 \leq p < \infty$, $C[a, b]$ é denso em $L^p[a, b]$.

Capítulo 2

Espaços Separáveis e Reflexivos

Neste capítulo vamos definir separabilidade e reflexibilidade, bem como estabelecer os principais resultados envolvendo estas definições, para que possamos estudar tais conceitos dentro dos espaços $L^p(X, \Sigma, \mu)$, no Capítulo 3 deste trabalho.

Assim como na reta real, o conjunto dos racionais é denso na própria reta e por isso ganhamos diversas propriedades, fazendo com que os racionais exerça um papel importantíssimo na análise real, aqui iremos dar destaque aos espaços normados que possuem um subconjunto enumerável e denso, esses espaços são chamados de Espaços separáveis.

Definição 41. Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso E é dito separável.

Sejam E um espaço vetorial normado e $A \subseteq E$. Denotamos por $[A]$ o subespaço de E gerado por A .

Lema 2.1. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um conjunto enumerável $A \subset E$ tal que $[A]$ é denso em E .*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como E é separável, existe A enumerável e denso em E , assim temos que $\overline{A} = E$, mas $\overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq E$, logo $\overline{[A]} = E$.

($\Leftarrow$) Considere $B = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n; x_1, \dots, x_n \in A \text{ e } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$. Note que B é enumerável, resta provar que $\overline{B} = E$. Seja $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, como $\overline{[A]} = E$, existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $y_0 \in [A]$, então $y_0 = b_1x_1 + \dots + b_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in A$, $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, além disso, uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existem $a_1, \dots, a_j \in \mathbb{Q}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2 \left(1 + \sum_{j=1}^k \|x_j\| \right)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 - y\| \\
&\leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|(b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_k - a_k)x_k\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max |b_j - a_j|(\|x_1\| + \dots + \|x_k\|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1 + \sum \|x_i\|)} \sum \|x_i\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

O que prova que $\overline{B} = E$. □

Exemplo 23. Todo espaço normado de dimensão finita é separável. Com efeito, basta considerar a base do espaço que por sua vez é finita, logo enumerável, que gera todo o espaço.

Proposição 2.2. *Se E' é separável, então E também é separável.*

Demonstração. Como E' é separável, temos que

$$S' = \{\varphi \in E'; \|\varphi\| = 1\}$$

também é separável. Seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$ um subconjunto enumerável denso de S' . Como $\|\varphi_n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\|\varphi_n(x_n)\| > \frac{1}{2}$. Seja M o fecho do subespaço vetorial gerado por $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. M é separável, pois

$$X = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n; n \geq 1 \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{Q}\}$$

é um subconjunto enumerável e denso. Queremos mostrar que $M = E$, para tal suponha por absurdo que exista $x_0 \in E - M$, isso implica que $d_0 = d(x_0, M) > 0$, dessa forma pela Proposição 1.29 existe $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $\phi(M) = \{0\}$ e $\phi(x_0) = d_0 > 0$, logo $\phi \in S'$ e

$$\|\phi - \varphi_n\| \geq \frac{\|\phi(x_n) - \varphi_n(x_n)\|}{\|x_n\|} = \|\varphi_n(x_n)\| > \frac{1}{2}.$$

O que é um absurdo, pois $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S' , logo $M = E$. □

Teorema 2.3. *(Teorema da aproximação de Weierstrass.) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [a, b]$.*

Nesse caso omitiremos a demonstração do Teorema de Weierstrass por não ser o foco do nosso trabalho. Mas, para o leitor interessado, a demonstração pode ser encontrada em livros de análise real.

Usando o Teorema 2.3 conseguimos obter que o espaço dos polinômios, definidos em um intervalo $[a, b]$, é denso no espaço das funções contínuas de mesmo domínio. Em outras palavras, vamos concluir que $\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ é separável. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 24. Denotaremos $\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas definidas em $[a, b]$. Considere a sequência de funções $(f_n) \subset \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ em que $f_n(t) = t^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e o conjunto $A = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, note que $A \subset \mathfrak{C}[a, b]$ e $[A]$ é o conjunto dos polinômios. Pelo Teorema de Weierstrass $\overline{[A]} = \mathfrak{C}[a, b]$ e pelo Lema 2.1 $\mathfrak{C}[a, b]$ é separável. Isto é, provamos que o conjunto dos polinômios reais é denso no conjunto das funções contínuas.

Agora vamos estudar um pouco os espaços reflexivos, para isto, dado um espaço vetorial E e o seu bidual E'' definimos o mergulho canônico de E em E'' por:

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\mapsto J(x) = J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto J_x(\varphi) = \varphi(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposição 2.4. Para todo espaço normado E , o operador J definido em (2.1) é uma isometria linear.

Demonstração. Note que dado $\varphi \in E'$ temos

$$J(x + \lambda y)(\varphi) = \varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda \varphi(y) = J_x(\varphi) + \lambda J_y(\varphi),$$

assim J é linear. Além disso, J é injetiva, pois se $x \in E$ é tal que $J_x = 0$ temos que $J_x(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in E'$ e por definição do funcional J segue que $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in E'$. Então, pelo Corolário 7, $x = 0$. Ou seja, J é injetiva. Além disso, usando a definição de norma no dual e o Corolário 8, para cada $x \in E$ temos

$$\|J_x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |J_x(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|.$$

Portanto, J é uma isometria linear injetiva. □

Definição 42. Dizemos que E é um espaço reflexivo, se J definido em (2.1) é sobrejetiva.

Em outras palavras, dizer que um espaço E é reflexivo significa que podemos enxergar E'' como sendo o espaço E através da ótica de uma isometria linear injetiva.

Exemplo 25. Se $\dim E < \infty$ então E é reflexivo.

De fato, se $\dim E = n$ então $\dim E' = \dim E'' = n$. Então, como já sabemos que J é injetiva, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que J é sobrejetiva. Logo, E é reflexivo.

Um fato interessante é que temos uma relação entre completude e reflexibilidade, como vemos na proposição abaixo.

Proposição 2.5. *Todo espaço reflexivo é um espaço de Banach.*

Demonstração. Sejam E um espaço reflexivo e (x_n) uma sequência de Cauchy em E . Assim, (J_{x_n}) é uma sequência de Cauchy em E'' . Logo, pela Proposição 1.27 temos que E'' é completo. Assim, existe $\Phi_0 \in E''$ de modo que $J_{x_n} \rightarrow \Phi_0$ e, por J ser uma isometria bijetiva, existe um único $x_0 \in E$ de modo que $J_{x_0} = \Phi_0$. Portanto, $x_n \rightarrow x_0$ em E . $\square$

Proposição 2.6. *Para todo espaço normado E existe um espaço de Banach $\widehat{E}$ que contém uma cópia isométrica de E que é densa em $\widehat{E}$.*

Demonstração. Dado E , basta tomar $\widehat{E} = \overline{J_E(E)} \subseteq E''$. $\overline{J_E(E)}$ é um subespaço vetorial fechado de E'' (que é de Banach), logo também é Banach. $\square$

Proposição 2.7. *Se E é separável e reflexivo, então E' é separável.*

Demonstração. Como E é isomorfo isometricamente a E'' , temos que E'' também é separável, logo pela Proposição 2.2 segue que E' é separável. $\square$

Com o objetivo de estabelecer um resultado que relacione a reflexibilidade entre um espaço de Banach E e o seu dual E' vamos introduzir o conceito de adjunto de um operador linear contínuo.

Definição 43. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T' : F' \rightarrow E'$ por $T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x))$ para todo $x \in E$ e $\varphi \in F'$. O operador T' é chamado adjunto de T .

Proposição 2.8. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Primeiro, note que dados $f, g \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$T'(f + \lambda g)(x) = f(T(x)) + \lambda g(T(x)).$$

Logo, T' é linear, vamos agora verificar que T' é contínua. Assim, observe que,

$$\|T'(f)\|_{E'} = \sup_{x \in B_E} \{|T'(f)(x)|\} = \sup_{x \in B_E} \{|f(T(x))|\} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|f\|_{F'}.$$

Ou seja, $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ e, em particular, temos que $\|T'(\varphi)\|_{E'} = \sup_{x \in B_E} \|T'(\varphi)(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(T(x))\| \leq \|\varphi\| \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|\varphi\| \|T\|$. Assim, $\|T'\| \leq \|T\|$.

Seja agora, $x \in E$ então

$$\|T(x)\|_F = \sup_{\varphi \in F'} \|\varphi(T(x))\| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|T'(\varphi)(x)\| \leq \|x\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|T'(\varphi)\| = \|x\| \|T'\|,$$

onde a primeira igualdade decorre do Teorema de Hahn-Banach, e assim, temos que $\|T\| = \|T'\|$.

Por fim, se T é um isomorfismo, seja $\varphi \in E'$. Considere $\phi \in F'$ dado por $\phi(z) = \varphi(T^{-1}(T(z)))$, isso implica que ao aplicarmos T' obtemos

$$T'(\phi(z)) = \phi(T(z)) = \varphi(T^{-1}(T(z))) = \varphi(z).$$

Ou seja, para todo $\varphi \in E' \supseteq \text{img}(T')$, existe $\phi \in F'$ tal que $T'(\phi) = \varphi$. Logo T' é sobrejetora. Vamos provar que T' é injetora. Seja $\psi \in \ker(T')$, então $T'(\psi(x)) = \psi(T(x)) = 0$ para todo $x \in E$, ora como T é sobrejetora, segue que $\psi = 0$. Logo T' é injetor, consequentemente um isomorfismo. Resta apenas provar que T é isométrico. Supondo que T é um isomorfismo isométrico, $x \in B_E$ se, e somente se, $T(x) \in B_F$ e assim,

$$\|T'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi)(x)| = \sup_{t(x) \in B_F} |\varphi(T(x))| = \sup_{z \in B_F} |\varphi(z)| = \|\varphi\|.$$

□

Proposição 2.9. *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, seu dual E' também é reflexivo.*

Demonstração. Se E é reflexivo, $J_E : E \rightarrow E''$ é sobrejetiva. A pergunta é, $J_{E'} : E' \rightarrow E'''$ é sobrejetiva? Assim, dado $x''' \in E'''$, sabemos que o operador adjunto $(J_E)' : E''' \rightarrow E'$ é um isomorfismo. Definiremos $x' = (J_E)'(x''') \in E'$. Queremos que $J_{E'}(x') = x'''$. Para todo $x \in E$, temos que

$$J_{E'}(x')(J_E(x)) = J_E(x)(x') = (x')(x) = (J_E)'(x''')(x) = x'''(J_E(x))$$

logo $J_{E'} : E' \rightarrow E'''$ é sobrejetiva e E' reflexivo.

Se E' é reflexivo, então $J_{E'} : E' \rightarrow E'''$ é sobrejetiva. Suponha por absurdo que E não seja reflexiva, assim $J_E : E \rightarrow E''$ não é sobrejetiva. Como $J_E : E \rightarrow J_E(E) \subsetneq E''$ é uma isometria linear, temos que $J_E(E)$ é fechado em E'' . Logo, existe $\varphi \neq 0$ em $E'' = J_{E'}(E')$, com $\varphi(J_E(E)) = \{0\}$. Por E' ser reflexivo, segue que $\varphi = J_{E'}(\phi)$ para alguma $\phi \in E'$. Logo, para todo $x \in E$

$$0 = \varphi(J_E(x)) = (J_{E'}(\phi))(J_E(x)) = J_E(x)(\phi) = \phi(x)$$

o que gera um absurdo, pois $\varphi \neq 0$.

□

Em meados do século XX, R. C. James concebeu o conhecido espaço de James, que é isomorfo isométricamente ao seu bidual, mas não é reflexivo. É preciso considerar que se um espaço E é reflexivo, então ele é isomorfo isométricamente ao seu bidual E'' por meio do mergulho canônico J_E . Mas, um questionamento pertinente pode ser interessante

para a compreensão do que foi dito: Se E for isomorfo isometricamente a E'' por meio de outro isomorfismo isométrico, então E será reflexivo? Essa indagação acaba sendo negada diante da construção de James.

Aqui está presente um estudo feito da reflexividade. No entanto, é importante salientar que não houve, por motivo de tempo durante a produção escrita conciliada a graduação em processo de finalização, aprofundamento em outras propriedades dos espaços reflexivos que dependiam de novos conceitos; a título de exemplo: o fato de que todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é também reflexivo. Ao leitor mais interessado neste aprofundamento, indicamos a leitura de [6] e [1].

Capítulo 3

Espaços de Lebesgue

Neste capítulo usaremos conceitos e propriedades da Teoria da Medida, apresentados no Capítulo 1.

Definição 44. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 3.1. (*Desigualdade de Hölder para integrais*) Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração. **Afirmção:** Dados $a, b \in \mathbb{R}^*$ vale a seguinte desigualdade

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Para provar a desigualdade acima, inicialmente considere a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$, com $\alpha \in (0, 1)$. Note que, f assume seu valor máximo em $t = 1$, logo

$$f(t) = t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha.$$

Somando αt de ambos os lados, obtemos que

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha) \text{ para todo } t > 0.$$

Note que $q = \frac{p}{p-1}$. De $t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha$, segue que ao tomarmos $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \frac{a}{b} &\leq 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \Rightarrow \\
\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{q} + \frac{a}{pb} \Rightarrow \\
a^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{b^{\frac{1}{p}}}{q} + \frac{a}{p} \frac{b^{\frac{1}{p}}}{b} \Rightarrow \\
b^{\frac{1}{q}} a^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{b}{q} + \frac{a}{p},
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Agora, tome $a = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}$ e $b = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$, temos então que

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Daí,

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right)$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\int |f(x)| |g(x)| dx &= \int a^{1/p} \|f\|_p b^{1/q} \|g\|_q dx = \|f\|_p \|g\|_q \int a^{1/p} b^{1/q} dx \\
&\leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\int \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right) dx \right) \\
&= \|f\|_p \|g\|_q \left(\int \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} dx + \int \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} dx \right) \\
&= \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. (*Desigualdade de Minkowski para integrais*) Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Se $\|f + g\|_p = 0$, então a desigualdade é válida. Se $p = 1$ segue da desigualdade triangular do módulo. Suponha então $\|f + g\|_p \neq 0$ e $p > 1$. Para todo $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
|f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\
&\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).
\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Agora, vamos provar a desigualdade do enunciado,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \end{aligned}$$

o que vale para todo $x \in X$. Agora, ao tomarmos $q > 1$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, temos que $(p-1)q = p$, o que nos leva a $|f + g|^{p-1} = |f + g|^{\frac{p}{q}} \in \mathcal{L}^q$. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ao somar as duas desigualdades, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &= \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Temos que em geral $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, pois podemos ter $\|f\|_p = 0$ para funções não nulas. Para contornar esse fato, se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, são equivalentes se $f = g$ μ -quase sempre, ou seja, quando existe um conjunto $A \in \Sigma$ com medida nula ($\mu(A) = 0$) e $f(x) = g(x)$ no complementar de A .

Vamos denotar tal classe de equivalência por $[f]$, e no **conjunto quociente** $L^p(X, \Sigma, \mu)$ a soma $[f] + [g] = [f + g]$ e $c[f] = [cf]$ estão bem definidas e tornam o conjunto L^p um espaço vetorial. Por fim, ao definirmos $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ conseguimos a condição que faltava para tornar $\|\cdot\|$ uma norma.

Logo $(L^p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado. Dado que L^p é um espaço vetorial normado, é interessante saber se o mesmo será um espaço de Banach.

Ao tratarmos do conjunto quociente $L^p(X, \Sigma, \mu)$ vamos omitir a notação das classes de equivalência $[f]$ por apenas f , desde que $f \in L^p$.

Teorema 3.3. *Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Já temos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $L^p(\mu)$. Falta mostrar que $\|\cdot\|_p$ é completa.

Seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \geq 1$ tal que $\|\varphi_m - \varphi_n\|_p \leq \varepsilon$, para quaisquer $m, n \geq k$. Queremos mostrar que $(\varphi_n)_n$ é convergente, para isso basta mostrar que $(\varphi_n)_n$ admite subsequência convergente. Vamos considerar a subsequência $\psi_k = \varphi_{n_k}$, tal que

$$\|\psi_k - \psi_{k+1}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Defina, $\psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\psi(x) = |\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_{k+1} - \psi_k)(x)|.$$

Note que por $|\psi_{k+1} - \psi_k| \geq 0$, temos que ψ converge ou vai para infinito, mas não oscila (está bem definida).

Afirmção: $\psi \in L^p(\mu)$.

De fato, se

$$|\psi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)| \right).$$

Elevando a p e integrando ambos os lados da equação acima, obtemos que:

$$\int |\psi|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)| \right)^p d\mu.$$

Podemos retirar o limite da integral pelo Teorema da Convergência Monótona, já que $(\psi_n(x))$ é monótona por ser dada por uma soma de fatores maiores ou iguais a zero. Isto implica, que:

$$\int |\psi(x)|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (|\psi(x)| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1}(x) - \psi(x)|)^p d\mu.$$

Ao elevarmos ambos os lados da igualdade acima por $\frac{1}{p}$ obtemos

$$\|\psi\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int \left(|\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right)^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dessa forma, pela desigualdade de Minkowski temos que

$$\|\psi\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(|\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right) \right\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p.$$

Logo, temos que

$$\|\psi\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

e, assim, $\psi \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Observação 3.4. Se $\int |\psi|^p d\mu$ é finita, então o conjunto $\{x \in X; \psi(x) = \infty\}$ possui medida nula. Caso contrário, teríamos que $\int |\psi|^p d\mu$ seria infinita. Portanto, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)|$$

converge em $\mathbb{R}$ para μ -quase todo ponto x .

Definimos então,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)), & \text{se } \psi(x) < \infty \\ 0, & \text{se } \psi(x) = \infty. \end{cases}$$

Note que,

a) $\varphi(x)$ está bem definida para todo x . Isto é, não assume valores infinitos, pois se $\psi(x) < \infty$, então $\psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x))$ converge absolutamente, logo também é convergente.

b)

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n+1}(x).$$

A série do primeiro limite é uma série telescópica. Assim, provamos que $\psi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ para todo x , isto é ψ_k que é uma subsequência de φ_n é convergente pontualmente.

Dessa forma, nos resta verificar que

i) $\varphi \in L^p$;

ii) $\|\varphi_{n_k} - \varphi\|_p \longrightarrow 0$.

Vamos verificar i):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x) \\ \int |\varphi(x)|^p d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x) \right|^p d\mu.\end{aligned}$$

Queremos retirar o limite da integral, mas não podemos usar o Teorema da Convergência Monótona. Porém, note que

$$\left| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right| \leq |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \leq \psi.$$

E, dessa forma, para todo n ,

$$\left| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right|^p \leq |\psi|^p.$$

Como $\int |\psi|^p d\mu < \infty$ (isto é, ψ é integrável), pelo Teorema da Convergência Dominada, podemos retirar o limite da integral e obtemos:

$$\int |\varphi(x)|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right|^p d\mu$$

$$\|\varphi\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p^p.$$

Portanto,

$$\|\varphi\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p.$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski, temos que

$$\|\varphi\|_p \leq \|\psi_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Portanto, $\varphi \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Por fim, vamos mostrar ii),

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) \\
 &= \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) \\
 &= \psi_m(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x), \forall m \\
 \varphi(x) - \psi_m(x) &= \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\|\varphi - \psi_m\|_p = \left\| \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=m}^{\infty} \|(\psi_{k+1} - \psi_k)\|_p \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Logo quando $m \rightarrow \infty$, $\|\varphi - \varphi_{n_m}\|_p \rightarrow 0$. Note que a desigualdade $(*)$ não segue da desigualdade de Minkowski, mas tem argumento análogo ao usado anteriormente com o Teorema da Convergência Dominada. Logo, provamos que $L^p(X, \Sigma, \mu)$ é de Banach. $\square$

Exemplo 26. c_0 o conjunto de todas seqüências que convergem para zero e l^p , com $1 \leq p < \infty$, são separáveis. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

a seqüência formada por 1 na n -ésima coordenada e 0 nas demais coordenadas. Os vetores $e_1, e_2, \dots$ são chamados de vetores unitários canônicos dos espaços de seqüências. Dado $x = (a_j) \in c_0$, temos

$$\lim_k \|x - \sum_{j=1}^k a_j e_j\|_{\infty} = \lim_k \|(0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_{\infty} = \lim_k \sup_{j>k} |a_j| = 0,$$

pois, quando $j \rightarrow \infty$, $a_j \rightarrow 0$, e segue que $\sum_{j=1}^k a_j e_j \rightarrow x$ com $k \rightarrow \infty$ em c_0 . Como

$\sum_{j=1}^k a_j e_j \in [e_1, e_2, \dots]$ para todo k , do Lema 2.1 segue que c_0 é separável.

Dado $x = (a_j) \in l^p$, como

$$\lim_k \|x - \sum_{j=1}^k a_j e_j\|_{\infty} = \lim_k \|(0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_{\infty} = \lim_k \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j|^p = 0,$$

pois a série $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$ é convergente, e o mesmo argumento utilizado para c_0 mostra que l^p é separável.

Exemplo 27. Analogamente ao que foi feito no Exemplo 24 vemos que $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ é separável. Dado $f \in L^p[a, b]$ e $\varepsilon > 0$, como já sabemos que $\mathfrak{C}[a, b]$ é denso em $L^p[a, b]$ devido ao Teorema 1.34 então existe $g \in \mathfrak{C}[a, b]$ tal que

$$\|f - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Teorema de Weierstrass existe um polinômio p tal que

$$\|g - p\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Assim,

$$\|f - p\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - p\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + (b-a)\|g - p\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Provando que o conjunto de todos os polinômios é denso em $L^p[a, b]$. Agora basta definir novamente a função $[a, b] \mapsto f_n(t) = t^n$ e o conjunto $A = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável. E como $\overline{A} = L^p[a, b]$, pelo Lema 2.1 segue que $L^p[a, b]$ é separável.

Denotaremos por $\mathcal{L}^{\infty}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis limitadas μ -quase sempre, isto é, existe um conjunto $N \in \Sigma$ e $K \in \mathbb{R}$ tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \notin N$.

Seja $f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ e $N \in \Sigma$ possui medida nula, definimos $S_f(N) = \sup\{|f(x)|; x \notin N\}$ e $\|f\|_{\infty} = \inf\{S_f(N); N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}$.

Mais uma vez temos que $\|f\|_{\infty} = 0$ sem que necessariamente f seja identicamente nula. E novamente utilizaremos classes de equivalências, como no conjunto L^p . Assim definimos o conjunto de todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que são limitadas μ -quase sempre. E temos que L^{∞} é um espaço vetorial. Vamos mostrar que $\|\cdot\|_{\infty}$ é de fato uma norma em L^{∞} ;

- 1) $\|f\|_{\infty} = 0$ se, e somente se, $\inf\{S_f(N); N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = 0$, o que ocorre quando $|f(x)| = 0$ com $x \notin N$;
- 2) $\|f\|_{\infty} > 0$ para toda $f \in L^{\infty}$;
- 3) $\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \geq \|f + g\|_{\infty}$ (segue das propriedades de ínfimo e supremo);
- 4) $\|\lambda f\|_{\infty} = \inf\{\lambda S_f(N); N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = \lambda \inf\{S_f(N); N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = \lambda \|f\|_{\infty}$.

Lema 3.5. Se $f \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$, então $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$ μ -quase sempre.

Demonstração. Pela definição de $\|f\|_\infty$ existe uma sequência $(N_n)_n$ de conjuntos de medida nula, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(N_n) = \|f\|_\infty$$

e

$$|f(x)| \leq S_f(N_n)$$

para todo $x \notin N_n$. Seja $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, união enumerável, resulta que

$$\mu(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(N_i) = 0 \text{ e } |f(x)| \leq S_f(N_n) \text{ para todo } x \notin N.$$

Dessa forma,

$$|f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(N_n) = \|f\|_\infty.$$

□

Proposição 3.6. *Seja $\varphi \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ com $\mu(X) < \infty$. Então $L^\infty \subseteq L^p$, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Dada $\varphi \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$,

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_X |\varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_X 1^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ pois } \mu(X) < \infty$$

A primeira desigualdade decorre do lema anterior. Logo $\varphi \in L^p$.

□

Teorema 3.7. *$L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vamos mostrar que L^∞ é completo. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^∞ . Dado $k \geq 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), temos o inteiro N_k tal que

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

para todo $m, n \geq N_k$. Logo, por definição de $\|\cdot\|_\infty$ existe E_k um conjunto de medida nula, tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{3.1}$$

para todo $x \notin E_k$ e $m, n \geq N_k$. Tomemos $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $\mu(E) = 0$, e para todo $x \notin E$ a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo $f_n \rightarrow f(x)$ para todo $x \notin E$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.1), temos que

$$|f(x)| - |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } n \geq N_k$$

logo $f \in L^\infty$ e $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{k}$, para todo $n \geq N_k$. Dessa forma, $f_n \rightarrow f$ em L^∞ . Assim, concluímos que L^∞ é Banach. $\square$

Observação 3.8. Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$l^p = \{(a_j); a_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\}$$

Considerando o conjunto das partes $P(\mathbb{N})$ e a medida de contagem μ , temos que $l^p = l^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$.

Note que l^p munido da norma $\|(a_j)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é de Banach com as operações usuais de seqüências.

Exemplo 28. l^∞ não é separável. Com efeito, suponha por absurdo que l^∞ contenha uma seqüência (x_n) densa. Denotaremos por $x_n = (a_j^n)_{j=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $y = (b_j)_{j=1}^\infty$ dada por,

$$\begin{cases} b_j = 0 & , \text{ se } |a_j^n| \geq 1 \\ b_j = a_j^n + 1 & , \text{ se } |a_j^n| < 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Note que, $|b_j| < 2$, para todo j logo $y \in l^\infty$. Por (x_n) ser densa, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - x_{n_0}\| < 1$. Porém,

$$\begin{aligned} \|y - x_{n_0}\|_\infty &= \sup\{|b_1 - a_1^{n_0}|, |b_2 - a_2^{n_0}|, \dots, |b_n - a_n^{n_0}|, \dots\} \geq |b_n - a_n^{n_0}| \text{ e} \\ |b_n - a_n^{n_0}| &= \begin{cases} |0 - a_n^{n_0}| & , \text{ se } |a_n^{n_0}| \geq 1 \\ |a_n^{n_0} + 1 - a_n^{n_0}| & , \text{ se } |a_n^{n_0}| < 1 \end{cases} = \begin{cases} |a_n^{n_0}| & , \text{ se } |a_n^{n_0}| \geq 1 \\ 1 & , \text{ se } |a_n^{n_0}| < 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim, temos que $|b_n - a_n^{n_0}| \geq 1$ o que gera uma contradição e segue que l^∞ não é separável.

Dado $1 < p < \infty$, denotaremos por p^* o único número maior que 1, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Para $p = 1$, tomaremos $p^* = \infty$ e diremos que p^* é o conjugado de p .

Exemplo 29. Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dada uma função $g \in L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$. Dado $f \in L^p(\mu)$, considere o funcional linear

$$\begin{aligned} \varphi_g : L^p(\mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_X f g d\mu. \end{aligned}$$

φ_g é contínuo, pois

$$\frac{|\varphi_g(f)|}{\|f\|_p} = \frac{|\int f g d\mu|}{\|f\|_p} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f\|_p} = \|g\|_q, \quad \forall f \neq 0.$$

Logo o supremo está limitado, assim, $|\varphi_g| \leq \|g\|_q < \infty$.

Afirmção: $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$, para todo $g \in L^q(\mu)$, ou seja, $g \mapsto \varphi_g$ é uma isometria.

Vamos dividir a demonstração em casos:

1º caso: $1 < p < \infty$, defina $f = \frac{g}{|g|^{2-q}}$. Dessa forma,

$$\frac{|\int f g d\mu|}{[\int |f|^p d\mu]^{\frac{1}{p}}} = \frac{|\int \frac{|g|^2}{|g|^{2-q}} d\mu|}{\left[\int \left(\frac{|g|^2}{|g|^{2-q}}\right) d\mu\right]^{\frac{1}{p}}} \left(\int |g|^q\right)^{1-1/p} = \|g\|_q,$$

logo $\|\varphi_g\| \geq \|g\|$.

Note que $f \in L^p$, pois

$$\int |f|^p d\mu = \int \left(\frac{|g|}{|g|^{2-q}}\right)^p d\mu = \int |g|^{(q-1)p} d\mu = \int |g|^q d\mu < \infty.$$

2º caso: $p = 1$. Seja $g \in L^\infty(\mu)$, $\varphi_g : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que,

$$\|g\|_\infty = \inf\{c > 0; |g(x)| \leq c \text{ } \forall \mu - \text{quase todo } x\}.$$

Fixe qualquer $c < \|g\|_\infty$, assim $X_c = \{x; |g(x)| > c\}$ tem medida positiva. Tome,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & , \text{ se } x \in X_c \\ 0 & , \text{ se } x \in X_c^c \end{cases} \quad (3.4)$$

note que $f \in L^1(\mu)$, pois

$$\int |f| d\mu = \int_{X_c} d\mu = \mu(X_c) < \infty.$$

Agora, seja

$$\frac{\|\varphi_g(f)\|}{\|f\|_1} = \frac{|\int f g d\mu|}{\mu(X_c)} = \frac{|\int_{X_c} |g| d\mu|}{\mu(X_c)} \geq \frac{c\mu(X_c)}{\mu(X_c) = c},$$

pois $|g(x)| > c$ em X_c . Dessa forma, mostramos que $\|\varphi_g\| \geq c$, para todo $c < \|g\|_\infty$. Logo $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_\infty$.

3º caso: $p = \infty$, agora com $g \in L^1(\mu)$, $\varphi_g : L^\infty(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$. Tome $f(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}$, com $|g(x)| \neq 0$, assim temos que $\|f\|_\infty = 1$. Logo,

$$\frac{\|\varphi_g(f)\|}{\|f\|_\infty} = \left| \int \left(\frac{g^2}{|g|}\right) d\mu \right| = \|g\|_1.$$

Dessa forma, $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_1$.

Ou seja, construímos uma isometria linear (o outro lado da desigualdade $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_{p^*}$

segue da desigualdade de Holder)

$$\begin{aligned}\Phi : L^q(\mu) &\longrightarrow (L^p(\mu))' \\ g &\longmapsto \varphi_g\end{aligned}$$

que por ser uma isometria linear, é injetora!

Logo, concluímos que o dual de $L^p(\mu)$ contém uma cópia isométrica de $L^q(\mu)$ ($q = p^*$).

Para que os espaços $L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ e $(L^p(X, \Sigma, \mu))'$ sejam isometricamente isomorfos falta verificar que essa correspondência é sobrejetora, ou seja, todo funcional linear em L^p provém de uma função de L^{p^*} . Para tal, veremos a seguir uma das muitas formas do Teorema da Representação de Riesz.

Teorema 3.9. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. No caso $p = 1$ supomos que μ seja uma medida σ -finita. Então a correspondência $g \mapsto \varphi_g$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ e $(L^p(X, \Sigma, \mu))'$ em que a relação de dualidade é dada por*

$$\begin{aligned}\Phi : L^q(\mu) &\longrightarrow (L^p(\mu))' \\ g &\longmapsto \varphi_g = \int_X fg d\mu,\end{aligned}$$

com $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Demonstração. Inicialmente vamos definir,

$$\begin{aligned}\eta : B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \varphi(\mathcal{X}_A)\end{aligned}$$

onde η é uma medida e B é a família dos conjuntos mensuráveis. A respeito de η temos o seguinte:

- i) $\eta(\emptyset) = 0$;
- ii) $\eta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta(A_j)$ com os A_j dois a dois disjuntos.

A respeito da segunda afirmação, temos que quando a união for finita não temos problema, mas quando passamos o limite $n \rightarrow \infty$ temos que tomar cuidado.

$$\eta\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \varphi\left(\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{X}_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(\mathcal{X}_{A_j}) = \sum_{j=1}^n \eta(A_j).$$

Se tomarmos $n \rightarrow \infty$ na última igualdade, obtemos o que $\sum_{j=1}^n \eta(A_j) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \eta(A_j)$,

mas o problema está em verificar se $\varphi\left(\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\right) \longrightarrow \varphi\left(\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}\right)$, ou seja, $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \longrightarrow \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}$.

Afirmção: $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \longrightarrow \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}$.

De fato, perceba que $\eta = \phi \circ \mathcal{X}_A$ com $\phi \in (L^p)'$. Como σ é finita, temos que $\mathcal{X}_A \in L^p$, pois

$$\int_X |\mathcal{X}_A|^p d\mu = \mu(A) \leq \mu(X) < \infty,$$

para todo $A \in \Sigma$. Note que, se $A \cap B = \emptyset$, então $\mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$. Assim, se $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$,

temos que $\mathcal{X}_A = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{X}_{A_j}$ o que implica em

$$\varphi(\mathcal{X}_A) = \varphi\left(\sum_{j=1}^\infty \mathcal{X}_{A_j}\right).$$

Além disso, note que dado $x_0 \in D(\mathcal{X}_A)$ temos que $x_0 \in A$ ou $x_0 \notin A$. Se $x_0 \notin A$, então $x_0 \notin A_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e logo $\mathcal{X}_A(x_0) = \mathcal{X}_{A_j}(x_0) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, quando $x_0 \notin A$ $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j}(x_0) \longrightarrow \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}(x_0)$. Resta verificar quando $x_0 \in A$. Se $x_0 \in A$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in A_{n_0}$. Assim, se $n \geq n_0$ temos que $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j}(x_0) - \mathcal{X}_A(x_0) = 1 - 1 = 0$. Ou seja, $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \longrightarrow \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j}$, para todo $x \in D(\mathcal{X}_A)$. Além disso, $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \leq \mathcal{X}_X \in L^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que, quando $n \longrightarrow \infty$, temos $\mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^n A_j} \longrightarrow \mathcal{X}_A$ em L^p , o que prova a nossa afirmação.

Além disso, se $\mu(A) = 0$, então $\mathcal{X}_A = 0$ em $L^p(\mu)$, logo $\eta(\emptyset) = 0$. Pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe g tal que

$$\eta(A) = \int_A g d\mu$$

Para todo $A \in B$, o que implica em

$$\varphi(\mathcal{X}_A) = \int \mathcal{X}_A g d\mu \Rightarrow$$

$$\varphi(f) = \int f g d\mu$$

para toda função simples f , pois f é combinação linear de $\mathcal{X}_{A_i}$. Precisamos mostrar duas coisas, que $g \in L^q(\mu)$ e f é qualquer. Perceba que $fg \in L^1(\mu)$, logo pela recíproca da

desigualdade de Holder $g \in L^q(\mu)$. Agora, considere o seguinte operador:

$$\begin{aligned}\varphi_g : L^p(\mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_X fg \, d\mu.\end{aligned}$$

A respeito desse operador temos o seguinte:

- $\varphi(f) = \varphi_g(f)$, para toda f simples;
- φ, φ_g são contínuas;
- O conjunto das funções simples é denso em L^p , para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Logo, temos dois operadores lineares contínuos que coincidem num subconjunto denso, ou seja, $\varphi = \varphi_g$. Note que não precisamos mostrar a injetividade, pois a mesma decorre do exemplo anterior. $\square$

Note que, o teorema acima fornece informação para $1 \leq p < \infty$, a seguir veremos um resultado que irá nos auxiliar no caso em que $1 < p < \infty$.

Proposição 3.10. *Para $1 < p < \infty$, os espaços $L^p(X, \Sigma, \mu)$ (em particular l^p) são reflexivos.*

Demonstração. Considere $T : L^{p*} \longrightarrow (L^p)'$ e $S : L^p \longrightarrow (L^{p*})'$ da mesma forma que definidos no Teorema 3.9, isomorfismos isométricos tais que

$$S_g(f) = \int_X fg \, d\mu$$

para todo $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$. Logo T^{-1} também é um isomorfismo isométrico e pela proposição anterior $(T^{-1})' : (L^{p*})' \longrightarrow (L^p)''$ é um isomorfismo isométrico também. Logo, $(T^{-1})' \circ S : L^p(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow (L^p(X, \Sigma, \mu))''$ é um isomorfismo isométrico, por ser uma composição de isomorfismos isométricos. Vamos provar que, $(T^{-1})' \circ S = J_{L^p}$. Sejam $f \in L^p$, $\varphi \in (L^p)'$ e $g = T^{-1}(\varphi) \in L^{p*}$. Então,

$$\begin{aligned}((T^{-1})' \circ S)(f)(\varphi) &= (T^{-1})'(S(f))(\varphi) = S(f)((T^{-1})(\varphi)) = S(f)(g) = \int_X fg \, d\mu = T(g)(f) \\ &= \varphi(f) = J_{L^p}(f)(\varphi)\end{aligned}$$

Logo L^p é reflexivo. $\square$

Teorema 3.11. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então a correspondência $g \longmapsto \varphi_g$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $L^{p*}(X, \Sigma, \mu)$ e $(L^p(X, \Sigma, \mu))'$*

em que a relação de dualidade é dada por

$$\begin{aligned}\Phi : L^q(\mu) &\longrightarrow (L^p(\mu))' \\ g &\longmapsto \varphi g = \int_X f g d\mu,\end{aligned}$$

com $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Demonstração. Devido ao exemplo 29 não precisaremos mostrar a injetividade do operador Φ , apenas a sobrejetividade. Dessa forma, como a imagem de Φ é isometricamente isomorfa ao espaço de Banach $L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$, temos que a mesma é fechada em $(L^p(X, \Sigma, \mu))'$. Assim, basta mostrar que $\Phi(L^{p^*}(X, \Sigma, \mu))$ é denso em $(L^p(X, \Sigma, \mu))'$. Suponha por absurdo que não temos tal densidade. Neste caso, existe $\varphi \in (L^p(X, \Sigma, \mu))' - \overline{\Phi(L^{p^*}(X, \Sigma, \mu))}$, pela Proposição "3.4.10" existe $\psi \in L^p(X, \Sigma, \mu)''$ tal que, $\|\psi\| = 1$ e $\psi(h) = 0$ para toda $h \in \overline{\Phi(L^{p^*}(X, \Sigma, \mu))}$. Note que, $\psi(\Phi(g)) = 0$ para toda $g \in L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$. Como $L^p(X, \Sigma, \mu)$ é reflexivo, existe $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ tal que $\psi = J_{L^p(X, \Sigma, \mu)}(f)$. Logo,

$$\int_X f g d\mu = \Phi(g)(f) = J_{L^p(X, \Sigma, \mu)}(f)(\Phi(g)) = \psi(\Phi(g)) = 0, \quad \forall g \in L^{p^*}(X, \Sigma, \mu).$$

Fazendo $g = |f|^{p-2} \cdot f \in L^{p^*}(X, \Sigma, \mu)$, temos que

$$0 = \left(\int_X f \cdot |f|^{p-2} \cdot f d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p^* = \|J_{L^p(X, \Sigma, \mu)}(f)\| = \|\psi\| = 1.$$

A igualdade (*) segue do fato de J ser uma isometria. Logo, encontramos uma contradição em que $0 = 1$, o que conclui a nossa demonstração. $\square$

Exemplo 30. O espaço l_1 **não é reflexivo**. De fato, pois l_1 é separável e seu dual l^∞ não é separável. Logo, L^1 pela Proposição 2.7 não é reflexivo.

Exemplo 31. O espaço l^∞ não é reflexivo, pois é dual do l^1 $(l^1)' = l^\infty$ que por sua vez não é reflexivo. Logo, em geral L^∞ não é reflexivo.

A luz dos resultados vistos anteriormente nesse texto, podemos dizer a respeito da Separabilidade, Dualidade, Reflexividade e completude dos espaços $L^p(X, \Sigma, \mu)$ com $1 \leq p \leq \infty$, o seguinte:

- $L^1(\mu)$ É separável 27, não é reflexivo, pois l^1 não é reflexivo 30, seu dual é dado por $L^\infty(\mu)$ e é completo por 3.3;
- O espaço $L^p(\mu)[a, b]$ ($1 < p < \infty$) é separável, vide 27, Reflexivo 3.10, seu dual é dado por $L^{p^*}(\mu)$ e é completo por 3.3;
- O espaço $L^\infty(\mu)$ não é separável, por 28, não é reflexivo 31 e é completo por 3.7.

Referências Bibliográficas

- [1] Brezis, H.; **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.
- [2] de Oliveira, César R.; **Introdução à Análise Funcional**, IMPA, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 2010.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**: 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [4] G. F. Simmons, **Introduction to Topology and Modern Analysis**, Londres, McGraw-Hill.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [6] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de análise funcional**. SBM, 2012.