



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**O floco de neve de Koch e suas propriedades: funções contínuas  
sem derivada em ponto algum**

**Vivian Maria dos Santos**

**Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente**

RECIFE

2024





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Vivian Maria dos Santos**

**O floco de neve de Koch e suas propriedades: funções contínuas  
sem derivada em ponto algum**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S237f Santos, Vivian Maria  
O floco de neve de Koch e suas propriedades: funções contínuas sem derivada em ponto algum / Vivian Maria Santos. - 2024.  
61 f. : il.

Orientador: Rodrigo Genuino Clemente.  
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, , Recife, 2024.

1. Curva de Koch. 2. Continuidade. 3. Diferenciabilidade. 4. Teorema de Baire. I. Clemente, Rodrigo Genuino, orient. II. Título

CDD

---

Vivian Maria dos Santos

## **O floco de neve de Koch e suas propriedades: funções contínuas sem derivada em ponto algum**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - Sede, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho aprovado. Recife, 31 de julho de 2024:

---

Rodrigo Genuino Clemente  
(Orientador)

---

Yane Lísley Ramos Araújo  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
(UFRPE)

---

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior  
Universidade Federal de Pernambuco  
(UFPE)

Recife  
2024



*À minha mãe, Elisangela; às minhas tias, Andreia, Andreza e Priscila; aos meus bebês,  
Enzo, José e Luiz; e a toda a minha família.*



# Agradecimentos

A Deus, por todo amor e cuidado ao longo da minha trajetória, e a Nossa Senhora, pela intercessão infalível em minha vida, iluminando e guiando meu caminho sempre que me senti perdida.

À minha mãe, Elisângela, que nunca mediu esforços para que eu conseguisse o melhor, especialmente na educação, e que é a pessoa que mais me apoia nesse mundo; às minhas tias, Andreza e Priscila, que considero como segundas mães, por abdicarem de sua juventude para ajudar na minha criação e do meu irmão, e especialmente à Andreza, por me inspirar à docência desde cedo. Às minhas primas-irmãs, Beatriz e Wilma, que sempre me ofereceram os melhores conselhos, conversas e até brigas. Aos meus “pirraias”, que são meu coração fora do peito, e a toda a minha família que sempre esteve ao meu lado nos melhores e piores momentos.

Ao meu orientador, Rodrigo Clemente, que, no início da minha graduação, viu minhas lágrimas pela primeira “nota baixa” (a nota era 6) e me incentivava, acreditando na minha capacidade. Depois que consegui passar eu acreditei que eu poderia aprender tudo. Agradeço por todos os ensinamentos, paciência, podcasts de mais de dois minutos, filosofias de vida e, principalmente, por me orientar nos últimos dois anos para finalizar o curso visando os objetivos que eu almejava alcançar e pelo incentivo à carreira acadêmica.

Às professoras Maité Kulesza, Michele Mendes, Lorena Brizza e Yane Lísley (musa inspiradora da análise), por serem mulheres matemáticas que serviram como referência e inspiração para mim. Agradeço pelos conselhos e ensinamentos que transformaram minha visão para melhor.

A todos os professores do curso com os quais tive a oportunidade de trocar experiências, pelos ensinamentos, apoio e contribuições valiosas na minha vida acadêmica e pessoal. Em especial, agradeço a Eudes Mendes e Fabiano Barbosa, que despertaram em mim a paixão pelo curso com suas aulas de funções e lógica; a Renato Teixeira, pelos momentos descontraídos e ensinamentos inspiradores; a Thiago Dias, pelo coração generoso que abraça o mundo, e por tornar a álgebra mais acessível; e a Gilson Carvalho, por reacender o meu amor pela matemática.

Aos amigos da matemática: Bruna Neipp, Dayene Vitória, Gemeson Gama, Lucas Kauan, Maria Eliza, Mateus Gomes, Suellen Santiago e Sillas Bernardo, meu sincero agradecimento por compartilharem momentos enriquecedores de aprendizado e por tornarem o processo mais leve com instantes de diversão e descontração. Em especial, agradeço à minha madrinha do curso, Yasmim Lopes, por me incentivar e ajudar a buscar melhores oportunidades, e às minhas Marias: Maria Júlia, por sua minuciosa leitura deste trabalho, e Tainá B. Maria, que, junto com Júlia, me fez aproveitar a greve da melhor forma. Agradeço também aos demais colegas do departamento, com quem trocamos conhecimentos, que contribuíram para os estudos em grupo, essenciais para minha aprovação nas disciplinas.

Aos demais amigos que a “Ruralinda” me deu, tanto da residência quanto de outros cursos, em especial Antônio Carlos, Felipe Amorim, Girlene Lopes, Pedro Henrique, Roberta Elaine e Ytalo Paulo, que sem dúvidas, se não fossem eles, eu não aguentaria uma semana morando na Rural.

À minha amiga, Maria Eduarda, que está comigo desde o ensino médio e é uma das pessoas que mais me dá apoio em tudo, principalmente pela paciência e por não ligar para a minha ausência e permanecer. E a Rauana Lima, que desde o início da minha graduação me falou dos caminhos que eu podia seguir, me apresentou Recife e a Rural.

À banca examinadora, Yane Araújo e José Carlos, por aceitarem o convite.

À FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco), pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a mim por ter suportado todas as lágrimas, inseguranças e desafios, e por escolher a matemática, pois não me vejo em outro caminho.

*"A beleza de ser um eterno aprendiz."  
Gonzaguinha, "O Que É, O Que É?", 1982.*



# Resumo

Neste trabalho, apresentaremos a existência de funções contínuas reais que não possuem derivada em ponto algum. Para isso, utilizaremos a função desenvolvida pelo matemático Helge von Koch como exemplo, demonstrando que essa função é contínua em todos os pontos, mas não diferenciável em ponto algum. Mostraremos como ocorre a construção dessa curva e discutiremos suas propriedades. Para evidenciar esses fatos, muitas construções dessas funções são baseadas em séries infinitas de funções. Portanto, introduziremos alguns conceitos e resultados fundamentais da Análise Matemática, especificamente, Sequências e Séries de funções que serão de grande ajuda na investigação das propriedades de continuidade e diferenciabilidade. Por fim, comentaremos um resultado interessante que revela que o conjunto dessas funções, constitui um conjunto denso e residual no espaço métrico completo, ou seja, essas funções existem em abundância. A demonstração dessa afirmação é fundamentada no Teorema de Baire que, de modo geral, afirma que qualquer união enumerável de conjuntos magros é tão pequena que seu complementar é denso.

Palavras-chaves: Curva de Koch. Continuidade. Diferenciabilidade. Teorema de Baire.



# Abstract

In this work, we present the existence of real continuous functions that have no derivative at any point. For this, we use the function developed by the mathematician Helge von Koch as an example, demonstrating that this function is continuous at all points but not differentiable at any point. We show how this curve is constructed and discuss its properties. To highlight these facts, many constructions of such functions are based on infinite series of functions. Therefore, we introduce some fundamental concepts and results from Mathematical Analysis, specifically, Sequences and Series of functions, which allow us to investigate the continuity and differentiability properties. Finally, we will comment on an interesting result that reveals that the set of these functions constitutes a dense and residual set in the complete metric space, meaning that these functions exist abundantly. The proof of this statement is based on Baire's Theorem, which generally states that any countable union of thin sets is so small that its complement is dense.

Keywords: Koch curve. Continuity. Differentiability. Baire's Theorem.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Interpretação Geométrica . . . . .	25
Figura 2 – Bola aberta no plano $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana, do máximo e da soma, respectivamente. . . . .	30
Figura 3 – Elementos da sequência “Bolzano” com $[a, b] = [0, 20]$ e $[A, B] = [4, 16]$	37
Figura 4 – Gráfico da função $C(x)$ . . . . .	38
Figura 5 – Gráfico da função de Riemann para $x \in [-1, 5]$ . . . . .	38
Figura 6 – Construção da curva de Peano. . . . .	39
Figura 7 – Gráfico da função de Weierstrass . . . . .	40
Figura 8 – Niels Fabian Helge Von Koch . . . . .	43
Figura 9 – Primeiras etapas da construção da curva de von Koch . . . . .	44
Figura 10 – $K_0$ . . . . .	44
Figura 11 – $K_1$ . . . . .	44
Figura 12 – $K_2$ . . . . .	44
Figura 13 – $K_3$ . . . . .	44
Figura 14 – Vértices coincidentes das curvas . . . . .	48
Figura 15 – René-Louis Baire . . . . .	51
Figura 16 – Esboços das condições 1 e 2. . . . .	53
Figura 17 – Fonte: Autoria própria. . . . .	53
Figura 18 – Gráfico da função $f$ . . . . .	54
Figura 19 – Gráfico da função $g$ . . . . .	54



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS INICIAIS</b>	<b>21</b>
2.1	Sequências, Séries Numéricas e Convergência	21
2.1.1	Sequências e Séries Convergentes	21
2.1.2	Séries Convergentes	22
2.2	Sequências e Séries de Funções	24
2.3	Espaços Métricos	27
2.3.1	Bolas Abertas e Fechadas	29
2.3.2	Noções Topológicas	30
2.3.3	Espaços Métricos Completos	31
<b>3</b>	<b>HISTÓRIA</b>	<b>35</b>
3.1	Histórico Dessas Funções	36
3.1.1	A função de Bernard Bolzano	36
3.1.2	A função de Charles Cellérier e de Riemann	37
3.2	A função de Weierstrass	39
<b>4</b>	<b>A CURVA DE VON KOCH</b>	<b>43</b>
4.1	Construção e continuidade da curva de Koch	44
4.2	Hölder-continuidade da curva de Koch	45
4.3	A curva de Koch não é diferenciável	48
<b>5</b>	<b>TEOREMA DA CATEGORIA DE BAIRE E FUNÇÕES CONTÍNUAS SEM DERIVADA EM PONTO ALGUM</b>	<b>51</b>
5.1	Teorema da categoria de Baire	51
5.2	O conjunto das funções contínuas sem derivada em ponto algum	53
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>59</b>



# 1 Introdução

Em matemática, nem todos os conceitos que parecem intuitivos à primeira vista são necessariamente corretos. Por outro lado, os contraexemplos para uma ideia podem ser raros, o que dificulta a adaptação natural da intuição. Assim, compreender um contra-exemplo proporciona uma compreensão mais sutil das ideias envolvidas. É o que ocorre entre continuidade e diferenciabilidade de funções, os quais exploraremos destacando que enquanto uma função diferenciável também é contínua, o oposto nem sempre é verdadeiro, ou seja, nem toda função contínua é diferenciável.

Um exemplo fácil de entender é a função valor absoluto. Em  $x = 0$ , essa função, apesar de contínua, não é diferenciável. Isso se deve ao fato de que, à esquerda de  $x = 0$ , a função tem uma inclinação negativa, resultando em uma derivada igual a  $-1$ , enquanto à direita de  $x = 0$ , a inclinação é positiva, resultando em uma derivada igual a  $1$ . Como as derivadas são definidas em termos de limites, se esses limites não coincidem, a derivada como um todo não existe. Com esse exemplo, notamos que continuidade não implica em diferenciabilidade. A questão principal que nos leva ao tema desse trabalho é sobre a existência de funções contínuas sem derivadas em ponto algum.

No início do século XIX, a maioria dos matemáticos acreditava que não existiam funções contínuas que não possuíssem derivada em ponto algum e defendiam a ideia de que todas as funções contínuas eram diferenciáveis, a menos de um ou poucos pontos, como é o caso, por exemplo, da função valor absoluto, que vimos anteriormente. O matemático A.M. Ampère (1775-1836) tentou justificar teoricamente essa crença em um trabalho publicado em 1806. No entanto, em 1872, K. Weierstrass (1815-1897) surpreendeu a comunidade matemática ao demonstrar a existência de funções contínuas que não possuem derivada em ponto algum. Ele construiu um exemplo concreto dessa função, refutando assim a conjectura de Ampère.

A publicação do exemplo por K. Weierstrass foi um marco que incentivou vários matemáticos a explorarem e contribuírem para o desenvolvimento de novos exemplos dessas funções. Um desses matemáticos foi Helge von Koch (1870-1924), responsável pela criação da curva conhecida como floco de neve de Koch, documentada em seu artigo de 1904. Ele argumentava que o exemplo criado por Weierstrass não era satisfatório do ponto de vista

geométrico, pois a função era definida por uma expressão analítica que não deixava claro por que a curva não tinha tangente. Assim, criou sua própria função, cuja curva é construída em termos de geometria elementar, gerada pela divisão de um segmento de linha em três partes iguais, seguida pela substituição do segmento central por dois lados de um triângulo equilátero. Esse processo é repetido de forma indutiva, resultando em uma curva com um comprimento infinito e sem derivada em nenhum ponto.

O conteúdo deste trabalho é o seguinte: o Capítulo 2 está dividido em subseções que contêm conceitos importantes para o desenvolvimento do assunto, como sequências e séries de funções e a convergência dessas séries, visto que muitas construções dessas funções são baseadas nesses conceitos. Além disso, apresentamos alguns conceitos e resultados de espaços métricos. No Capítulo 3, apresentamos uma breve linha do tempo para o desenvolvimento no campo das funções contínuas em todos os pontos, mas não diferenciáveis. Forneceremos exemplos dessas funções graficamente, tal como a função construída por Weierstrass, mostraremos que ela de fato satisfaz as propriedades desejadas. No Capítulo 4, mostraremos como se dá a construção da curva de Van Koch e demonstraremos que ela é contínua em todos os pontos, mas não possui derivada em nenhum. No Capítulo 5, abordaremos um resultado interessante que revela que o conjunto das funções contínuas reais sem derivada em ponto algum do intervalo constitui um conjunto denso e residual no espaço métrico completo, ou seja, essas funções existem em abundância. Por fim, no Capítulo 6, traremos as considerações finais do trabalho.

## 2 Conceitos Iniciais

Em virtude do nosso trabalho estar fortemente associado às ideias de continuidade e diferenciabilidade, torna-se necessário apresentar alguns conceitos e resultados prévios da análise real. Assim, dividimos este capítulo em subtópicos que servirão como base para a compreensão do tema central do trabalho.

### 2.1 Sequências, Séries Numéricas e Convergência

#### 2.1.1 Sequências e Séries Convergentes

**Definição 1.** *Uma sequência de números reais é uma função*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad n \mapsto f(n) = x_n,$$

com  $n$  sendo chamado de índice e  $x_n$  o  $n$ -ésimo termo da sequência. Usamos a notação  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $\{x_n\}$  para designar a sequência cujo  $n$ -ésimo termo é  $x_n$ .

**Definição 2.** *Seja  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  uma sequência qualquer. Então, definimos uma subsequência dessa sequência, como qualquer sequência  $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots$  onde  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  é uma sequência crescente de números naturais.*

**Definição 3.** *Uma sequência  $\{x_n\}$  é monótona se  $x_n \leq x_{n+1}$  ou  $x_n \geq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

**Definição 4.** *Dizemos que uma sequência  $\{x_n\}$  converge para o número real  $a$  quando,  $\forall \varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Usamos as seguintes notações para dizer que  $\{x_n\}$  converge para  $a$ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim x_n = a, \quad x_n \rightarrow a.$$

*Uma sequência que possui limite diz-se convergente. Caso contrário, ela diz-se divergente.*

**Exemplo 1.** *Considere a sequência  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  temos que  $|x_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Tome  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ , assim, se  $n \geq n_0$ , segue que  $|x_n - 0| < \varepsilon$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .*

**Teorema 1.** *Toda sequência contém uma subsequência monótona.*

**Demonstração.** *Primeiro, construímos uma subsequência não crescente, se possível. Chamamos o  $m$ -ésimo elemento  $x_m$  da sequência  $\{x_n\}$  de ponto de retorno se todos os elementos posteriores forem menores ou iguais a ele, ou seja, se  $x_m \geq x_n$  para todo  $n > m$ . Se houver uma subsequência infinita de pontos de retorno  $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, x_{m_4}, \dots$ , então encontramos uma subsequência não crescente, pois*

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \geq x_{m_4} \geq \dots$$

*Isso não seria possível se houvesse apenas um número finito de pontos de retorno. Suponhamos que  $x_M$  seja o último ponto de retorno, de modo que qualquer elemento  $x_n$  para  $n > M$  não seja um ponto de retorno. Assim, deve haver um elemento mais adiante na sequência que seja maior do que ele, ou seja,  $x_m > x_n$  para algum  $m > n$ . Logo, podemos escolher  $x_{m_1} > x_{M+1}$  com  $m_1 > M + 1$ , então  $x_{m_2} > x_{m_1}$  com  $m_2 > m_1$ , e então  $x_{m_3} > x_{m_2}$  com  $m_3 > m_2$ , e assim por diante, para obter uma subsequência crescente*

$$x_{M+1} < x_{m_1} < x_{m_2} < x_{m_3} < x_{m_4} < \dots$$

□

**Teorema 2** (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

**Demonstração.** *Segue diretamente pelo teorema anterior.* □

## 2.1.2 Séries Convergentes

**Definição 5.** *Dada uma sequência  $\{a_n\}$  de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência  $\{s_n\}$  onde  $s_1 = a_1$ ,  $s_2 = a_1 + a_2$ , ...,  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , etc. Os números  $s_n$  chamam-se as reduzidas ou somas parciais da série  $a_n$ . A parcela  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo ou termo geral da série.*

*Se existir o limite  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , diremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e  $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  será chamado a soma da série. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  não existir, diremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série divergente. Às vezes é conveniente considerar séries do tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , que começam com  $a_0$  em vez de  $a_1$ .*

**Exemplo 2.** *Toda sequência de números reais  $\{x_n\}$  pode ser considerada como a sequência das reduzidas de uma série, bastando considerar  $a_1 = x_1$  e  $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então,*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

A série  $x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$  assim obtida converge se, e somente se, a sequência  $\{x_n\}$  converge. E, neste caso, a soma desta série é  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

A primeira condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral tenda para zero.

**Teorema 3.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Demonstração.** Seja  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  a soma parcial da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Como a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, por definição temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existe, assim  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Evidentemente, temos também que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$ . Logo, note que

$$s_n - s_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0. \quad \square$$

É importante ressaltar que o resultado nos fornece uma condição necessária, porém não suficiente, para a convergência da série. Ou seja, existem séries cujos termos convergem para zero, mas são divergentes; portanto, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, como mostra o exemplo 3.

**Teorema 4** (Critério de comparação). Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  séries de termos não-negativos. Se existem  $c > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $a_n \leq cb_n$  para todo  $n > n_0$ , então a convergência de  $\sum b_n$  implica a de  $\sum a_n$ , enquanto a divergência de  $\sum a_n$  implica a de  $\sum b_n$ .

**Demonstração.** Seja  $(s_n)$  a sequência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , ou seja,  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$ . E  $(t_n)$  a sequência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , ou seja,  $t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_n$ . Para  $n > n_0$  temos que

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n \\ &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + c \cdot b_{n_0+1} + \dots + c \cdot b_n \\ &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + c \cdot b_1 + c \cdot b_2 + \dots + c \cdot b_{n_0} + c \cdot b_{n_0+1} + \dots + c \cdot b_n \\ &= c_1 + c \cdot t_n < c_1 + c \cdot t = c_1 + c_2 = c_3. \end{aligned}$$

Logo  $(s_n)$  é limitada. Desde que  $a_n \geq 0$  temos que  $(s_n)$  é monótona crescente. Assim,  $(s_n)$  converge e portanto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Ou seja, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também é convergente.  $\square$

**Exemplo 3.** A série harmônica  $\sum \frac{1}{n}$  é um exemplo clássico de uma série cujo termo geral tende a zero, mas a série diverge. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Segue-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = +\infty$  e, conseqüentemente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ . Resulta daí que, para  $0 < r < 1$ , a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

diverge, pois  $\frac{1}{n^r} > \frac{1}{n}$  para todo  $n > 1$ .

**Definição 6.** Uma série  $\sum a_n$  chama-se absolutamente convergente quando  $\sum |a_n|$  é uma série convergente.

**Teorema 5.** Toda série absolutamente convergente é convergente.

**Demonstração.** Seja  $\sum |a_n|$  convergente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos os números  $p_n$  e  $q_n$ , pondo  $p_n = a_n$  se  $a_n \geq 0$  e  $p_n = 0$  se  $a_n < 0$ ; analogamente,  $q_n = -a_n$  se  $a_n \leq 0$  e  $q_n = 0$  se  $a_n > 0$ . Os números  $p_n$  e  $q_n$  chamam-se, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa de  $a_n$ . Então  $p_n \geq 0$ ,  $q_n \geq 0$ ,  $p_n + q_n = |a_n|$  (em particular,  $p_n \leq |a_n|$  e  $q_n \leq |a_n|$ ) e  $p_n - q_n = a_n$ . (Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pelo menos um dos números  $p_n$ ,  $q_n$  é zero.) Pelo Teorema 4, as séries  $\sum p_n$  e  $\sum q_n$  são convergentes. Logo a série  $\sum a_n = \sum (p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$  também converge.  $\square$

## 2.2 Sequências e Séries de Funções

Muitos problemas em Matemática e suas aplicações envolvem determinar funções que atendam a certas condições específicas. Uma abordagem comum para resolver esses problemas é encontrar funções que satisfaçam essas condições de forma aproximada, reduzindo progressivamente o erro, até que, ao “passar ao limite”, se obtenha a função desejada. Esse processo frequentemente resulta em uma sequência de funções  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ . A compreensão do limite de uma sequência de funções é, portanto, de grande interesse.

Um caso particular importante ocorre quando cada função na sequência é obtida somando-se à anterior uma função conhecida. Isso nos leva ao conceito de uma série de funções. Ao somar sucessivamente termos adicionais, podemos aproximar a função desejada com uma precisão arbitrária. Muitas construções de funções contínuas que não são diferenciáveis em ponto algum se baseiam em séries infinitas de funções. Portanto, é essencial considerar alguns teoremas gerais sobre séries e sequências de funções.

**Definição 7.** Seja  $X$  um conjunto de números reais. Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma correspondência que associa a cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $X$  e tomando valores reais.

**Definição 8.** Diz-se que a sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge simplesmente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $x \in X$ , a sequência de números

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$$

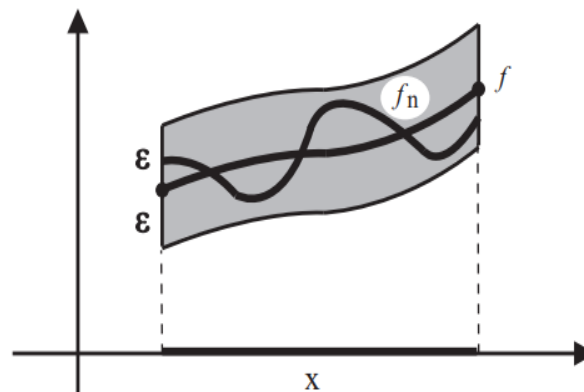
converge para o número  $f(x)$ . Ou seja, para todo  $x \in X$  fixado, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Uma sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo apenas de  $\varepsilon$ ) tal que  $n > n_0$  implica que  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ .

Geometricamente, dizer que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_0$ , o gráfico de  $f_n$  está contido na faixa de raio  $\varepsilon$  em torno do gráfico de  $f$ .

Figura 1 – Interpretação Geométrica



Fonte: LIMA, E.L. (Projeto Euclides, p.365).

Chamamos de faixa de raio  $\varepsilon$  (e amplitude  $2\varepsilon$ ) em torno do gráfico de  $f$  ao conjunto dos pontos  $(x, y)$  do plano tais que  $x \in X$  e  $|y - f(x)| < \varepsilon$ , ou seja,  $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon$  um número real positivo.

Assim, dizer que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  significa afirmar que, para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado, pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todas as funções  $f_n$ , com  $n > n_0$ , têm seus gráficos contidos na faixa de raio  $\varepsilon$  em torno do gráfico de  $f$ .

**Exemplo 4.** A sequência de funções contínuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$ , converge uniformemente em todo intervalo da forma  $[0, 1 - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ , mas não é uniforme em  $[0, 1]$ .

Com efeito, escrevendo  $a = 1 - \delta$ , temos  $0 < a < 1$  logo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$ . Então  $n > n_0 \Rightarrow 0 < f_n(x) \leq a^n < \varepsilon$  para todo  $x \in [0, a]$ . Portanto,  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente no intervalo  $[0, 1 - \delta]$ . Por outro lado, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , afirmamos que, seja qual for  $n_0 \in \mathbb{N}$ , existem pontos  $x \in [0, 1)$  tais que  $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$ , ou seja,  $x^{n_0} \geq \frac{1}{2}$ .

Basta observar que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{n_0} = 1$ . Logo, existe  $\delta > 0$  tal que  $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > \frac{1}{2}$ . Isto mostra que  $f_n$  não converge uniformemente para  $f$  no intervalo  $[0, 1]$ .

**Exemplo 5.** Dado o conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , sejam  $(a_n)$  uma sequência de números reais com  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Podemos considerar a sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$  e a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = a \cdot g(x)$ . No caso trivial em que, a partir de um certo  $n_0$ , todos os termos  $a_n$  são iguais a  $a$ , esta convergência é uniforme, pois todas as funções  $f_n$  coincidirão com  $f$  para  $n \geq n_0$ . Por outro lado, se  $a_n \neq a$  para uma infinidade de valores de  $n$  então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  se, e somente se,  $g$  for limitada. De fato, seja  $g$  uma função limitada, assim dado  $K \in \mathbb{R}$  temos que  $|g(x)| < K$ . Daí, para todo  $x \in X$ , dado qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{k}$ . Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |a_n - a| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon,$$

para todo  $x \in X$ , o que prova a uniformidade da convergência. Reciprocamente, se  $g$  não é limitada em  $X$ , a convergência  $f_n \rightarrow f$  não é uniforme. De fato, seja  $\varepsilon = 1$  e como  $a_n \rightarrow a$ , dado  $n_0$ , existe  $n > n_0$  tal que  $a_n \neq a$ . Sendo  $g$  ilimitada em  $X$ , podemos encontrar  $x \in X$  tal que  $|g(x)| \geq \frac{1}{|a_n - a|}$ . Para tais  $n$  e  $x$  temos

$$|a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| = |a_n - a| \cdot |g(x)| \geq |a_n - a| \cdot \frac{1}{|a_n - a|} = 1.$$

**Teorema 6.** Se uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e cada  $f_n$  é contínua no ponto  $a \in X$ , então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  para todo  $x \in X$ . Fixemos um número natural  $n > n_0$ . Como  $f_n$  é contínua no ponto  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ , donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

**Definição 9.** A soma  $f = \sum f_n$  de uma série é um caso particular de um limite de sequência:  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , onde  $s_n = f_1 + \dots + f_n$ . (Estamos admitindo tacitamente que  $f$  e

todas as funções  $f_n$  são definidas no mesmo conjunto  $X$ .) Tem sentido, portanto, dizer que a série  $\sum f_n$  converge simplesmente ou uniformemente no conjunto  $X$ . Reciprocamente, todo limite  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  de uma sequência de funções  $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  também pode ser obtido como soma de uma série. Basta pôr  $f_1 = \varphi_1$ ,  $f_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $f_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ , ..., tem-se, então,  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = \varphi_n$ , de modo que  $\varphi = \sum f_n$ .

**Definição 10.** A série  $\sum f_n$  converge uniformemente num conjunto  $X$  se, e somente se, a sequência de suas reduzidas  $s_n = f_1 + \dots + f_n$  é uniformemente convergente em  $X$ .

Assim, dizer que  $\sum f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $X$  significa que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o “resto”  $r_n(x)$ , definido por,

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) + r_n(x),$$

cumpra a condição  $|r_n(x)| < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$  e todo  $x \in X$ .

O teorema básico sobre convergência uniforme de séries de funções, demonstrado a seguir, não tem análogo para sequências e é um resultado importante para verificar a convergência uniforme de uma série.

**Teorema 7** (Teste M. de Weierstrass). Dada a sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $\sum a_n$  uma série convergente de números reais  $a_n \geq 0$  tais que  $|f_n(x)| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in X$ . Nessas condições, as séries  $\sum |f_n|$  e  $\sum f_n$  são uniformemente convergentes.

**Demonstração.** Como  $\sum a_n$  converge e  $|f_n(x)| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pelo critério de comparação, para todo  $x \in X$  a série  $\sum |f_n(x)|$  (e, portanto a série  $\sum f_n(x)$ ) é convergente. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n > n_0} a_n < \varepsilon$ . Pondo

$$R_n(x) = \sum_{k > n} |f_k(x)| \quad e \quad r_n(x) = \sum_{k > n} f_k(x),$$

tem-se imediatamente  $|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k > n} a_k < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ . Logo  $\sum |f_n|$  e  $\sum f_n$  são uniformemente convergentes.  $\square$

**Proposição 1.** Suponhamos que as funções  $f_n(x)$  sejam contínuas e a série  $\sum f_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma da série  $f(x) = \sum f_n(x)$  é também uma função contínua.

**Demonstração.** Se cada  $f_n$  é contínua, então cada  $f_1 + \dots + f_n$  também é contínua e  $f$  é o limite uniforme da sequência  $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ , logo  $f$  é contínua, pelo Teorema 6.  $\square$

## 2.3 Espaços Métricos

Nesta seção, exploraremos conceitos e resultados topológicos, introduzindo a ideia de métrica, que nos oferece a noção de distância. Os resultados relacionados aos Espaços

Métricos desempenham um papel crucial no estudo da Análise, inclusive no contexto do conjunto de funções sem derivada em ponto algum, conforme referido pelo Teorema da Categoria de Baire no capítulo 6.

**Definição 11.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. A função  $d : X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de métrica se para quaisquer  $x, y \in X$  são satisfeitas as seguintes condições:*

$$d1) \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$d2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$d4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

*Definimos um espaço métrico como sendo um par ordenado  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $d$  é uma métrica em  $X$ .*

**Observação.** *A propriedade (d4) na definição acima é chamada de desigualdade triangular, pois exprime que cada lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois lados.*

**Exemplo 6.** *A distância entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}$  é dada por  $d(x, y) = |x - y|$  e é um espaço métrico, pois:*

$$d1) \quad \text{Se } x \neq y, \text{ então } d(x, y) \geq 0;$$

$$d2) \quad \text{Se } x = y, \text{ então } d(x, y) = |x - y| = |x - x| = |0| = 0;$$

$$d3) \quad d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x);$$

$$d4) \quad d(x, y) = |x - y| \leq |x - z + z - y| \leq |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

*Esta é a chamada “métrica usual” da reta. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referiremos sempre que considerarmos  $\mathbb{R}$  como espaço métrico.*

**Exemplo 7 (Espaço Discreto).** *Sejam  $X$  qualquer conjunto não vazio e  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Para os pontos  $x$  e  $y$  em  $X$ , o conjunto  $d$  definido por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

*é uma métrica em  $X$ , pois:*

- d1) Por definição,  $d(x, y) = 0$  se  $x = y$ . Logo,  $d(x, x) = 0$ ;
- d2) Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = 1 > 0$ ;
- d3) Observe que se  $x = y$ ,  $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ; e se  $x \neq y$ ,  $d(x, y) = d(y, x) = 1$ . Deste modo,  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todo  $x, y \in M$ ;
- d4) Para todo  $x, y, z \in M$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . De fato, consideremos os seguintes casos:
1. Se  $x = z$ , então  $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
  2. Se  $x \neq z$  e  $y = x$ , então  $y \neq z$ . Neste caso,  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 0$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
  3. Se  $x \neq z$  e  $y = z$  então  $y \neq x$ . Neste caso  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 0$ , então  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
  4. Se  $x \neq z$ ,  $y \neq x$  e  $y \neq z$  então  $d(x, z) = 1$ ,  $d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ , então  $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$ . Assim,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in X$ .

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $X$ . Isso nos mostra que qualquer conjunto não vazio pode se tornar um espaço métrico.

### 2.3.1 Bolas Abertas e Fechadas

**Definição 12.** Dado um número real  $r > 0$  e  $a$  um ponto no espaço métrico  $X$ , dizemos que:

1. A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a, r)$  dos pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor que  $r$ , ou seja,

$$B(a, r) = \{x \in X; d(x, a) < r\};$$

2. A bola fechada de raio  $a$  e centro  $r$  é o conjunto  $B[a, r]$  dos pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que ou igual a  $r$ , ou seja,

$$B[a, r] = \{x \in X; d(x, a) \leq r\};$$

3. A esfera de centro  $a$  e raio  $r$  como sendo o conjunto  $S(a; r)$  formado pelos pontos  $x \in X$  tais que  $d(x, a) = r$ . Assim:

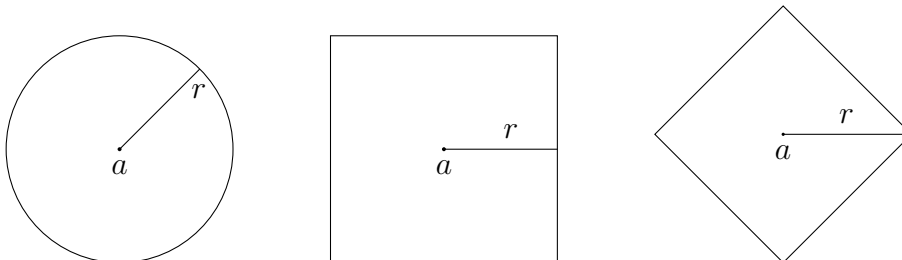
$$S(a; r) = \{x \in X; d(x, a) = r\}.$$

**Exemplo 8.** Se  $X$  está munido da métrica zero-um (Exemplo 7) então, para todo  $a \in X$ , tem-se  $B(a; r) = B[a; r] = X$  se  $r > 1$  e  $B(a; r) = B[a; r] = \{a\}$  se  $r < 1$ . Por outro lado,  $B(a; 1) = \{a\}$  e  $B[a; 1] = X$ . Consequentemente,  $S(a; r) = \emptyset$  se  $r \neq 1$ , enquanto  $S(a; 1) = X - \{a\}$ .

**Exemplo 9.** No plano  $\mathbb{R}^2$ , a bola aberta  $B(a; r)$  é o interior de um círculo de centro  $a$  e raio  $r$ , ou o interior de um quadrado de centro  $a$  e lados de comprimento  $2r$ , paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro  $a$  e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento  $2r$ . A esfera  $S(a; r)$  é o bordo da figura correspondente e  $B[a; r]$  é igual a  $B(a; r) \cup S(a; r)$ .

**Exemplo 10.** A depender da métrica considerada, as bolas assumem características geométricas distintas. Por exemplo, considere  $x = (x_1, y_1)$  e  $y = (x_2, y_2)$  pontos em  $\mathbb{R}^2$  e o conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido com as métricas euclidiana  $d_1(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , do máximo:  $d_\infty(x, y) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$  e da soma:  $d_2(x, y) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ , respectivamente. Então a bola aberta  $B(a; r)$  são conjuntos distintos a depender da distância considerada em  $\mathbb{R}^2$ , como mostra na figura abaixo.

Figura 2 – Bola aberta no plano  $\mathbb{R}^2$  com a métrica euclidiana, do máximo e da soma, respectivamente.



Fonte: Autoria própria.

### 2.3.2 Noções Topológicas

Um subconjunto  $Y$  de um espaço métrico  $X$  chama-se limitado quando existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(x, y) \leq c$  para quaisquer  $x, y \in Y$ . O menor desses números  $c$  será chamado o diâmetro de  $X$ . Ora, dizer que  $x, y \in Y \Rightarrow d(x, y) \leq c$  significa afirmar que  $c$  é uma cota superior para o conjunto das distâncias  $d(x, y)$  entre pontos de  $Y$ . A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Logo, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado  $Y \subset X$  como o número real

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in Y\}.$$

Dizer que um conjunto não é limitado, significa afirmar que para todo  $c \in \mathbb{R}$ , existem pontos  $x, y \in Y$  tais que  $d(x, y) > c$ .

**Exemplo 11.** Toda bola  $B(a; r)$  é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede  $2r$ . Com efeito, dados  $x, y \in B(a; r)$  temos  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$ . O mesmo se aplica à bola fechada  $B[a; r]$  e, conseqüentemente, à esfera  $S(a; r)$ . Pode ocorrer que o diâmetro de  $B[a; r]$  (e, portanto da bola aberta e da esfera) seja menor do que  $2r$ . Basta considerar  $X$  reduzido a um único ponto  $a$ . Então  $B[a; r] = \{a\}$ , tem diâmetro 0 para todo  $r > 0$ .

**Definição 13.** Um ponto  $a$  diz-se aderente a um subconjunto  $Y$  de um espaço métrico  $X$  quando  $d(a, Y) = 0$ . Isto significa que existem pontos de  $Y$  arbitrariamente próximos de  $a$ , ou seja, para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $x \in Y$  tal que  $d(a, x) < \varepsilon$ . Chamaremos fecho do conjunto  $Y$  o conjunto formado por todos os pontos aderentes a  $Y$  denotado por  $\bar{Y}$ . Dizemos então que o conjunto  $F$  é fechado quando  $F = \bar{F}$ .

**Definição 14.** Um subconjunto  $Y \subset X$  diz-se denso em  $X$  quando toda bola aberta em  $X$  contém algum ponto de  $Y$ , ou seja, dado  $a \in X$ , para todo  $\varepsilon > 0$  temos  $B(a; \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$ . O conjunto  $Y$  é dito denso em nenhum lugar (em  $X$ ) se cada bola aberta  $B(x, \varepsilon)$  contém outra bola aberta  $B(y, \delta)$  tal que  $B(y, \delta) \cap Y = \emptyset$ . Quando isso acontece, dizemos que o conjunto é magro.

**Definição 15.** Seja  $Y$  um conjunto fechado, então para que  $Y$  seja magro é necessário e suficiente que seu complementar, seja denso.

### 2.3.3 Espaços Métricos Completos

**Definição 16.** Uma seqüência  $\{x_n\}$  em um espaço métrico  $X$  é chamada de seqüência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implica  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

Intuitivamente, os termos de uma seqüência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice  $n$ . Comparando com a definição de limite, na qual se exige que os termos da seqüência se tornem cada vez mais próximos de um ponto fixado.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da seqüência depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Quando os termos de uma seqüência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

**Proposição 2.** Toda seqüência convergente é de Cauchy.

**Demonstração.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  no espaço métrico  $X$ , então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$ . Se tomarmos  $m, n > n_0$ , teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy.  $\square$

No entanto, a recíproca desse resultado nem sempre é válida, para ver isso, vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 12.** Considere uma sequência de números racionais  $x_n$  convergindo para um número irracional  $a$ . (Por exemplo,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,4$ ,  $x_3 = 1,41$ ,  $x_4 = 1,414$ , ..., com  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .) Sendo convergente em  $\mathbb{R}$ , segue-se do resultado anterior que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Mas evidentemente  $\{x_n\}$  não é convergente em  $\mathbb{Q}$ .

**Proposição 3.** Toda sequência de Cauchy é limitada.

**Demonstração.** Seja  $\{x_n\}$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $X$ . Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$ . Logo o conjunto  $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado e tem diâmetro  $\leq 1$ . Segue-se que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado.  $\square$

**Definição 17.** Diz-se que o espaço métrico  $X$  é completo quando toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.

**Exemplo 13.** A reta é um espaço métrico completo. De fato, seja  $\{x_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Pondo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , temos

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots$$

e os conjuntos  $X_n$  são limitados. Seja  $a_n = \inf X_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Então  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$ . Como toda sequência limitada de números reais é convergente, existe o número  $a = \lim a_n$ . Afirmamos que  $a = \lim x_n$ . Para provar isso, basta mostrar que  $a$  é limite de uma subsequência de  $\{x_n\}$ , ou seja, que dados arbitrariamente  $\varepsilon > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ , podemos obter  $n > n_1$  tal que  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Sendo  $a = \lim a_n$ , existe  $m > n_1$  tal que  $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$ . Como  $a_m = \inf X_m$ , existe  $n \geq m$  (e, portanto  $n > n_1$ ) tal que  $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$ , isto é,  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

**Definição 18.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico.

1. Um conjunto  $A \subset X$  é chamado de conjunto de primeira categoria se  $A$  é uma união enumerável de conjuntos magros.
2. Um conjunto que não é da primeira categoria é chamado de conjunto da segunda categoria.
3. O complementar de um conjunto de primeira categoria é chamado de conjunto residual.

**Exemplo 14.** O conjunto de números racionais  $\mathbb{Q}$  considerado como um subconjunto de  $\mathbb{R}$  é denso. É também de primeira categoria, uma vez que cada conjunto com  $q \in \mathbb{Q}$  é um subconjunto denso de  $\mathbb{R}$  e

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

expressa  $\mathbb{Q}$  como uma união contável de conjuntos densos em nenhum lugar. Note que isso também significa que o conjunto de números irracionais é residual.

**Observação.** Para espaços métricos completos, os conjuntos de primeira categoria são os conjuntos "pequenos" e conjuntos residuais são os conjuntos "grandes", porque são densos e qualquer interseção de uma sequência de conjuntos residuais ainda é densa.



### 3 Contextualização

A conexão entre a continuidade e a diferenciabilidade de uma função tem relação, ao menos intuitivamente, com a ideia de suavidade. Antes que os alunos se aprofundem em matérias como Análise Real e aprendam a definição formal de continuidade, muitas vezes são ensinados que, se for possível desenhar uma função sem levantar o lápis, ela é contínua. Formalmente, definimos uma função contínua e diferenciável em um determinado ponto da seguinte forma:

**Definição 19.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é contínua num ponto  $a \in X$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .*

*Além disso, a noção de diferenciabilidade estende a noção de continuidade, sendo a derivada de uma função em um ponto  $a$  dada por:*

**Definição 20.**

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

*quando esse limite existir. Ou ainda,*

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}$$

*para toda sequência  $\{h_n\}$  de números reais diferentes de zero tal que  $h_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Deste modo, uma função é diferenciável (derivável) em  $a$  se ela possuir uma derivada  $f'(a)$ . E, quando isso acontece, o valor da derivada  $f'(a)$  é igual à inclinação da reta tangente que passa por  $a$  na curva associada à função  $f$ .*

No caso mais geral, as funções mais estudadas são aquelas que são diferenciáveis ou que não possuem derivadas em um número finito de pontos. Esses exemplos são mais claros e fazem parte de um conjunto menor. O conjunto maior consiste em funções que não satisfazem essa propriedade, ou seja, são funções contínuas sem derivadas em ponto algum.

## 3.1 Histórico Dessas Funções

Eu me afasto com medo e horror da lamentável praga das funções contínuas que não possuem derivadas...

— Hermite, em carta a Stieltjes datada de 20 de maio de 1893

A julgar por esse trecho da carta, observamos que alguns matemáticos não gostaram da ideia da existência dessas funções. Eles não estavam interessados na existência da derivada de uma função, mas apenas em calcular a derivada como uma expressão explícita. Isso geralmente era bem-sucedido, exceto em alguns pontos no domínio onde a diferenciação falhava, o que reforçava a crença inicialmente mencionada. A prova da existência dessas funções causou uma reconsideração relutante do conceito e motivou maior rigor na análise matemática.

Nessa seção, vamos ver as funções com essa característica desenvolvidas por alguns matemáticos e visualizar seus gráficos.

### 3.1.1 A função de Bernard Bolzano

Embora a função de Weierstrass tenha sido o primeiro exemplo publicado desse tipo de função, ele não foi o mais antigo. Esse título pertence ao exemplo do matemático tcheco Bernard Bolzano (1781-1849), que, com o manuscrito intitulado “Functionenlehre”, escrito por volta de 1830, apresentou um exemplo dessas funções. Infelizmente, esse manuscrito só foi publicado um século depois, em 1930. Com 183 páginas, Bolzano provou que o conjunto de pontos onde a função não é diferenciável é denso no intervalo onde é definido. Ao contrário de muitas outras construções de funções não diferenciáveis em ponto algum, a função de Bolzano é baseada numa construção geométrica em vez de uma série.

- i)  $B_1(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x - a)$ ;
- ii)  $B_2(x)$  definida nos intervalos:

$$I_1 = \left[ a, a + \frac{3}{8}(b - a) \right], \quad I_2 = \left[ a + \frac{3}{8}(b - a), \frac{1}{2}(a + b) \right],$$

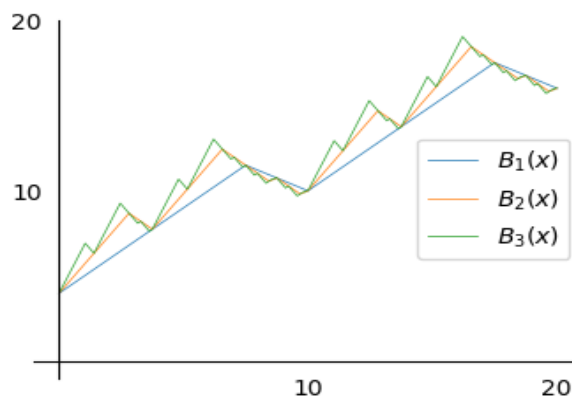
$$I_3 = \left[ \frac{1}{2}(a + b), a + \frac{7}{8}(b - a) \right], \quad I_4 = \left[ a + \frac{7}{8}(b - a), b \right],$$

como a função linear por partes com os valores:

$$\begin{aligned} B_2(a) &= A, \\ B_2\left(a + \frac{3}{8}(b-a)\right) &= A + \frac{5}{8}(B-A), \\ B_2\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) &= A + \frac{1}{2}(B-A), \\ B_2\left(a + \frac{7}{8}(b-a)\right) &= B + \frac{1}{8}(B-A), \\ B_2(b) &= B. \end{aligned}$$

- iii)  $B_3(x)$  é construída pelo mesmo procedimento descrito em ii) em cada um dos quatro subintervalos  $I_i$  (com os valores correspondentes para  $a$ ,  $b$ ,  $A$  e  $B$ ). Isso continua para  $k = 4, 5, 6, \dots$  e o limite de  $B_k(x)$  conforme  $k \rightarrow \infty$  é a função de Bolzano  $B(x)$ .

Figura 3 – Elementos da sequência “Bolzano” com  $[a, b] = [0, 20]$  e  $[A, B] = [4, 16]$



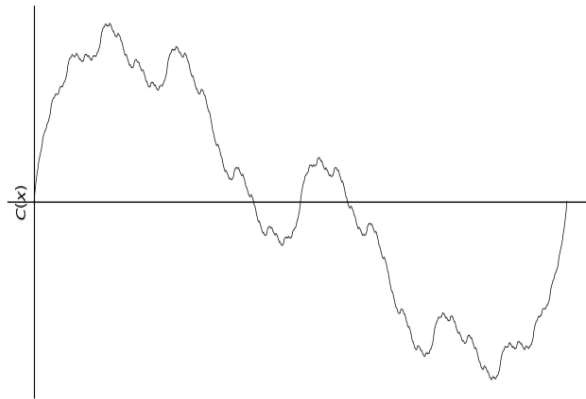
Fonte: Autoria própria.

### 3.1.2 A função de Charles Cellérier e de Riemann

O matemático suíço Charles Cellérier (1818-1883) propôs, por volta de 1860, a função  $C$  dada por

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k x),$$

onde  $a > 1000$ . A publicação desse exemplo em 1890, surgiu apenas como uma curiosidade e surpreendentemente, essa função era semelhante à função de Weierstrass 8.

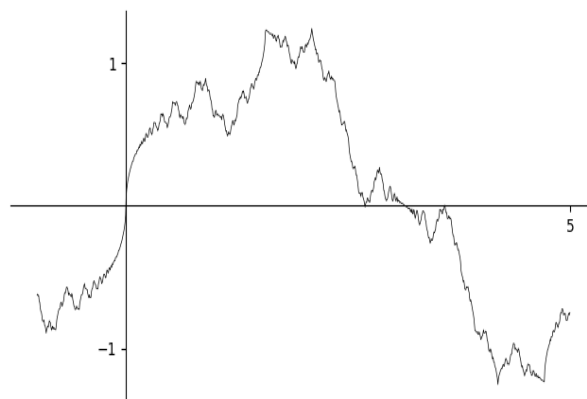
Figura 4 – Gráfico da função  $C(x)$ 

Fonte: Autoria própria.

A função de Riemann é dada por:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x)$$

e de acordo com Weierstrass, Riemann usou essa função como exemplo de função “indiferenciada” em suas palestras já em 1861. Não ficou claro se ele quis dizer que a função era diferenciável em nenhum lugar ou algo semelhante. Bernhard Riemann afirmou ter uma prova, mas ela nunca foi apresentada nem encontrada em nenhuma parte de suas anotações. Motivado por essa função, Weierstrass introduziu um famoso exemplo que permitiu o surgimento de diversas outras funções desse tipo, sobre as quais falaremos na Seção 3.2. As funções citadas foram os primeiros exemplos registrados na história. Após sua publicação, surgiram vários outros exemplos semelhantes.

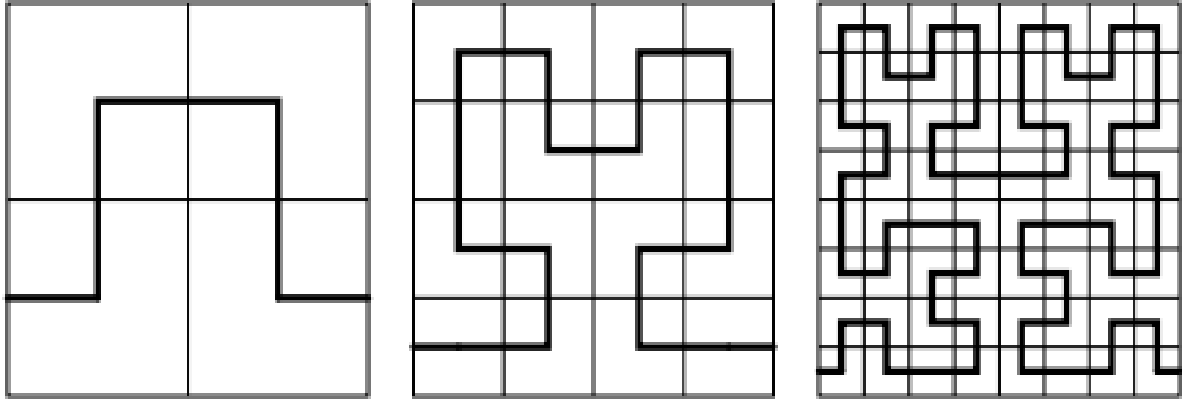
Figura 5 – Gráfico da função de Riemann para  $x \in [-1, 5]$ 

Fonte: Autoria própria.

Peano (1858-1932) construiu a primeira curva de preenchimento de espaço, publicada em 1890. Essa curva é contínua, mas não diferenciável em ponto algum. Após

sua publicação, matemáticos propuseram novos exemplos, incluindo a função de Hilbert (publicada em 1891) e a curva de Schoenberg (proposta em 1938), que também não são diferenciáveis.

Figura 6 – Construção da curva de Peano.



Fonte: STEIN, Elias M. (2005, p.350).

A função

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\}$$

proposta pelo matemático Bartel Leendert van der Waerden também é uma função contínua e não possui derivada em ponto algum. A demonstração e as interações do gráfico desta função podem ser vistas em [3], enquanto as das outras funções mencionadas podem ser encontradas na [8].

## 3.2 A função de Weierstrass

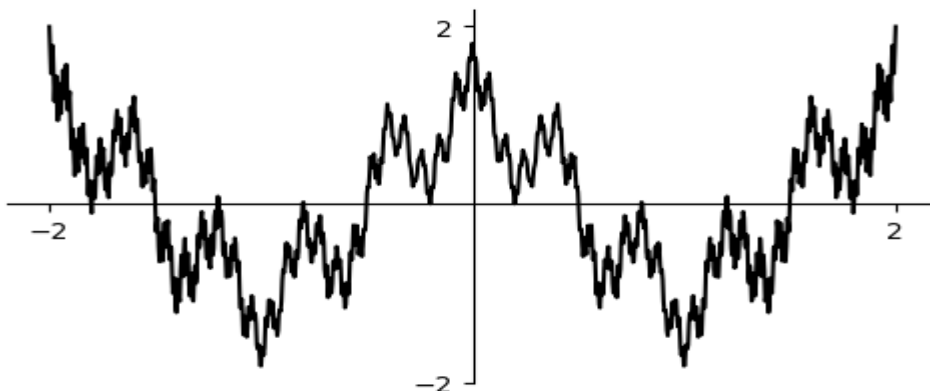
A função desenvolvida por Weierstrass representou um marco significativo na matemática, fornecendo uma base para o estudo e aprofundamento de funções contínuas sem derivadas em ponto algum. Dada a sua relevância, apresentaremos a demonstração nesta seção.

**Teorema 8.** *A função de Weierstrass:*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

se  $0 < a < 1$ ,  $ab \leq 1$  e  $b > 1$  é contínua em todos os pontos do seu domínio e não é diferenciável em nenhum.

Figura 7 – Gráfico da função de Weierstrass



Fonte: Autoria própria.

**Demonstração.** Provaremos, primeiramente, a continuidade da função. Observe que  $0 < a < 1$  implica  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$  converge, pois é uma série geométrica. Como  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$ , então, usando o teste M. de Weierstrass 7, concluímos que  $W(x)$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Assim, a continuidade segue diretamente do fato da convergência uniforme dessa série. Para a não diferenciabilidade seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  arbitrário porém fixo e seja  $m \in \mathbb{N}$  arbitrário. Escolha  $\alpha_m \in \mathbb{Z}$  tal que  $b^m x_0 - \alpha_m \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$  e defina  $x_{m+1} = b^m x_0 - \alpha_m$ . Pondo  $y_m = \frac{\alpha_m - 1}{b^m}$  e  $z_m = \frac{\alpha_m + 1}{b^m}$ . Isso nos dá a desigualdade

$$y_m - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} = z_m - x_0$$

e, portanto  $y_m < x_0 < z_m$ . Como  $m \rightarrow \infty$ ,  $y_m \rightarrow x_0$  pela esquerda e  $z_m \rightarrow x_0$  pela direita. Primeiro considere o quociente da diferença pela esquerda,

$$\begin{aligned} \frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n [\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)]}{y_m - x_0} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left( \frac{(ab)^n [\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)]}{b^n (y_m - x_0)} \right) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^{m+n} [\cos(b^{m+n} \pi y_m) - \cos(b^{m+n} \pi x_0)]}{y_m - x_0} \right) = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Trataremos essas somas separadamente, começando por  $S_1$ .

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n (-\pi) \sin \left( \frac{b^n \pi (y_m + x_0)}{2} \right) \frac{\sin \left( \frac{b^n \pi (y_m - x_0)}{2} \right)}{b^n \pi \frac{y_m - x_0}{2}} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Considerando a soma  $S_2$  podemos usar:

$$\cos(b^{m+n} \pi y_m) = \cos(b^n \pi (\alpha_m - 1)) = [(-1)^{b^n}]^{\alpha_m - 1} = -(-1)^{\alpha_m}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\cos(b^{n+m}\pi x_0) &= \cos\left(b^{n+m}\pi \frac{\alpha_m + x_{m+1}}{b^m}\right) \\ &= \cos(b^n\pi\alpha_m)\cos(b^n\pi x_{m+1}) - \sin(b^n\pi\alpha_m)\sin(b^n\pi x_{m+1}) \\ &= [(-1)^{b^n}]^{\alpha_m}\cos(b^n\pi x_{m+1}) - 0 = (-1)^{\alpha_m}\cos(b^n\pi x_{m+1})\end{aligned}$$

Dessa maneira, podemos expressar a soma

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \frac{(-1)^{2\alpha_m} \cos(b^n\pi x_{m+1})}{-\frac{1+x_{m+1}}{b^m}} = (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}}.$$

Cada termo dessa série é não negativo e  $x_{m+1} \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ , então podemos encontrar um limite inferior por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{3}. \quad (3.2)$$

As inequações (3.1) e (3.2) garantem a existência de um  $\varepsilon_1 \in [-1, 1]$  e um  $\eta > 1$  tal que

$$\frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left( \frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Fazendo o mesmo processo para o quociente da diferença à direita, começando por escrever a referida fração como  $\frac{W(z_m) - W(x_0)}{z_m - x_0} = S'_1 + S'_2$ , e como antes pode-se deduzir que

$$|S'_1| \leq \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}. \quad (3.3)$$

Usando  $\cos(b^{m+n}\pi z_m) = \cos(b^n\pi(\alpha_m + 1)) = [(-1)^{b^n}]^{\alpha_m+1} = -(-1)^{\alpha_m}$  para simplificar, resulta em

$$S'_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \frac{(-1)^{2\alpha_m} \cos(b^n\pi x_{m+1})}{\frac{1-x_{m+1}}{b^m}} = -(ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n\pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}}.$$

E, do mesmo modo, podemos encontrar um limite inferior para esta série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n\pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}} \geq \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} \geq \frac{2}{3}. \quad (3.4)$$

De maneira análogo, usando as desigualdades (3.3) e (3.4) existe  $\varepsilon_2 \in [-1, 1]$  e um  $\eta_2 > 1$  tal que

$$\frac{W(z_m) - W(x_0)}{z_m - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_2 \left( \frac{2}{3} + \varepsilon_2 \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Pela suposição  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ , equivalentemente,  $\frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3}$  e os quocientes da diferença à esquerda e à direita têm sinais diferentes. Uma vez que também  $(ab)^m \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$  então,  $W$  não é derivável em  $x_0$ . A escolha do  $x_0 \in \mathbb{R}$  foi arbitrária então segue daí que  $W(x)$  não é diferenciável em lugar nenhum de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Observação.** Denotaremos  $\mathcal{ND}[a, b]$  (onde  $a < b$ ) o conjunto de todas as funções contínuas e em nenhum lugar diferenciáveis  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .



## 4 A curva de Von Koch

Helge von Koch (1870-1924) foi um matemático sueco conhecido por suas contribuições na teoria das equações diferenciais e pela criação da curva de Koch, também conhecida como floco de neve de Koch. Ele estudou na Universidade de Estocolmo e na Universidade de Uppsala, em 1892, ele obteve seu doutorado pela Universidade de Estocolmo, com uma tese sobre determinantes infinitos e equações diferenciais. Entre 1893 e 1905, von Koch ocupou várias posições como professor assistente de matemática.

Figura 8 – Niels Fabian Helge Von Koch



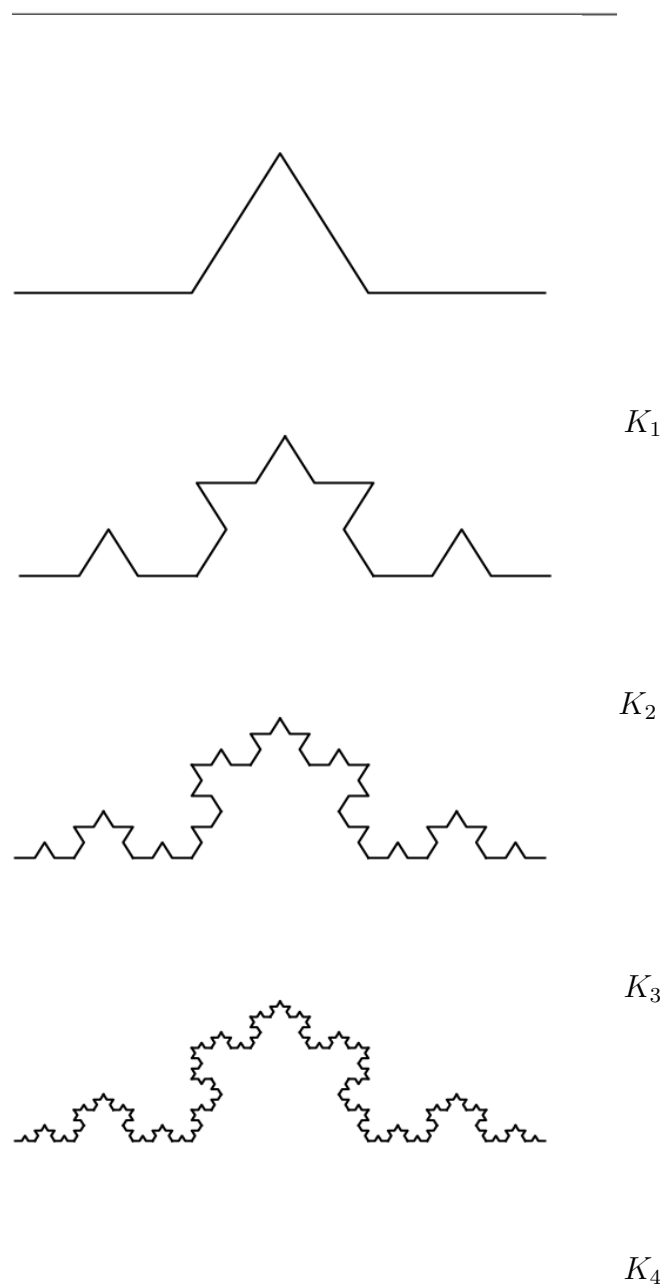
Fonte: Biografia de Koch.

Von Koch é mais conhecido por sua curva de Koch, uma curva contínua sem derivada em nenhum ponto, que ele descreveu em seu artigo de 1904. Essa curva é construída dividindo um segmento de linha em três partes iguais e substituindo o segmento do meio por dois lados de um triângulo equilátero. Esse processo é repetido indefinidamente, resultando em uma curva com comprimento infinito e sem derivada em nenhum ponto. Em seu artigo de 1906, von Koch demonstrou que duas funções,  $f$  e  $g$ , definidas pela curva do floco de neve de Koch, são não diferenciáveis em nenhum lugar. Ele também apresentou uma construção geométrica e analítica dessa função, baseada na curva de Koch. Esses trabalhos de von Koch contribuíram significativamente para o estudo de funções contínuas sem pontos de diferenciação.

## 4.1 Construção e continuidade da curva de Koch

Considere o intervalo unitário  $K_0 = [0, 1]$  no eixo  $x$  no plano  $xy$ . Em seguida, considere o caminho poligonal  $K_1$  ilustrado abaixo, o qual consiste em quatro segmentos de reta iguais de comprimento  $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ .

Figura 9 – Primeiras etapas da construção da curva de von Koch



Fonte: Autoria própria.

Seja  $K_1(t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$ , a parametrização de  $K_1$ . Observamos que, à medida que  $t$  varia de 0 a  $\frac{1}{4}$ , o ponto  $K_1(t)$  localiza-se no primeiro segmento de reta. À medida que  $t$  varia de  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{1}{2}$ , o ponto  $K_1(t)$  localiza-se no segundo segmento de reta, e assim sucessivamente. Em particular, vemos que  $K_1\left(\frac{l}{4}\right)$  para  $0 \leq l \leq 4$  correspondem aos cinco vértices de  $K_1$ .

Na segunda etapa da construção, repetimos o processo de substituição de cada segmento de reta da etapa um pela linha poligonal correspondente. Obtém-se, então, a curva poligonal  $K_2$  ilustrada na figura abaixo, a qual possui  $16 = 4^2$  segmentos de comprimento  $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ .

Para  $K_2(t)$  com  $0 \leq t \leq 1$ , a situação ocorre de maneira semelhante a  $K_1(t)$ . Assim, temos que  $K_2\left(\frac{l}{4^2}\right)$  para  $0 \leq l \leq 4^2$  fornece os 17 vértices de  $K_2$ , com os vértices de  $K_1$  pertencendo a  $K_2$ , e  $K_2\left(\frac{l}{4}\right) = K_1\left(\frac{l}{4}\right)$  para  $0 \leq l \leq 4$ .

Repetindo esse processo  $j$  vezes, de forma indutiva, obtemos uma sequência de curvas poligonais contínuas  $K_j$ , onde  $K_j$  consiste em  $4^j$  segmentos, cada um com comprimento igual a  $3^{-j}$ . Se  $K_j(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é a parametrização de  $K_j$  que mantém uma velocidade constante, então os vértices estão precisamente nos pontos  $K_j\left(\frac{l}{4^j}\right)$ , e  $K_{j'}\left(\frac{l}{4^{j'}}\right) = K_j\left(\frac{l}{4^j}\right)$  para  $0 \leq l \leq 4^j$  sempre que  $j' \geq j$ . Tomando o limite quando  $j$  tende ao infinito, as linhas poligonais  $K_j$  tendem à curva de von Koch  $\mathcal{K}$ , podemos considerar uma função  $K_J$  como sendo

$$K_J(t) = K_1(t) + \sum_{j=1}^J (K_{j+1}(t) - K_j(t)).$$

Observe que, para cada  $j$  vale que

$$|K_{j+1}(t) - K_j(t)| \leq 3^{-j} \quad \forall \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ e } j \geq 0.$$

Assim, utilizando o Teorema 7 para garantir a convergência uniforme: Temos que  $f_n(t) = K_{j+1}(t) - K_j(t)$  e  $a_n = 3^{-j}$ . A série  $\sum 3^{-j}$  é uma série geométrica com razão  $r = \frac{1}{3}$ , que é convergente. Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, a série  $\sum (K_{j+1}(t) - K_j(t))$  converge uniformemente. Isso implica que  $K_J(t)$  converge uniformemente para uma função contínua  $\mathcal{K}(t)$ . Logo, como cada  $K_j$  é contínua e  $K_J(t)$  converge uniformemente para  $\mathcal{K}(t)$ , temos que  $\mathcal{K}(t)$  também é uma função contínua.

## 4.2 Hölder-continuidade da curva de Koch

Nesta seção provaremos que a função construída por Von Koch é contínua em todos os seus pontos, mas não é derivável em ponto algum. Para tanto, precisaremos de introduzir algumas definições.

**Definição 21.** Dizemos que uma função  $f$  definida em um subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  satisfaz uma condição de Lipschitz em  $E$  se existe  $M > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para todo  $x, y \in E$ . Mais genericamente, uma função  $f$  satisfaz uma condição de Lipschitz com expoente  $\gamma$  (ou é Hölder contínua  $\gamma$ ) se  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma$  para todo  $x, y \in E$ .

O único caso interessante de funções Hölder contínuas é quando  $0 < \gamma \leq 1$ . Vejamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 15.** Toda função Hölder contínua é contínua. Se  $\gamma = 1$  então  $f$  é de Lipschitz. Se  $\gamma > 1$ , prova-se que  $f$  é constante.

Para concluirmos que a função de Koch é Hölder contínua, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 1.** Suponha que  $f_j$  seja uma sequência de funções contínuas no intervalo  $[0, 1]$  que satisfazem:

$$|f_j(t) - f_j(s)| \leq A^j |t - s| \text{ para algum } A > 1 \quad (1)$$

e

$$|f_j(t) - f_{j+1}(t)| \leq B^{-j} \text{ para algum } B > 1. \quad (2)$$

Então  $f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t)$  existe e satisfaz

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^\gamma, \text{ onde } \gamma = \frac{\log B}{\log AB}.$$

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{K} = f$ , sabemos que limite de  $f$  é dado pela série uniformemente convergente

$$f(t) = f_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(t) - f_k(t)),$$

assim,

$$|f(t) - f_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} B^{-k}.$$

$\sum_{k=j}^{\infty} B^{-k}$  é uma série geométrica, cuja soma é:  $\sum_{k=j}^{\infty} B^{-k} = B^{-j} \sum_{k=0}^{\infty} B^{-k} = B^{-j} \cdot \frac{1}{1-B^{-1}}$ .

Considerando  $c = \frac{1}{1-B^{-1}}$ , temos

$$|f(t) - f_j(t)| \leq cB^{-j}. \quad (3)$$

Pela desigualdade triangular, obtemos:

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_j(t) - f_j(s)| + |f(t) - f_j(t)| + |f(s) - f_j(s)| \Rightarrow \text{por (1), (2) e (3)}$$

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_j(t) - f_j(s)| + cB^{-j} + cB^{-j} \leq A^j |t - s| + 2cB^{-j}.$$

Fixando  $t$  e  $s$  com  $t \neq s$ , escolhemos  $j$  para minimizar a soma  $A^j|t-s| + B^{-j}$ . Mais precisamente, escolhemos um  $j$  que satisfaça

$$(AB)^j|t-s| \leq 1 \quad e \quad 1 \leq (AB)^{j+1}|t-s|.$$

Como  $|t-s| \leq 2$  e  $AB > 1$ , então,  $j$  deve existir. Assim, a primeira desigualdade dividida por  $B^{-j}$  nos dá

$$A^j|t-s| \leq B^{-j},$$

elevando a segunda desigualdade à potência  $\gamma$ , sabemos que  $(AB)^\gamma = B$ , pelas propriedades do logaritmo, assim,

$$1 \leq B^j|t-s|^\gamma.$$

Logo,  $B^{-j} \leq |t-s|^\gamma$ , e conseqüentemente

$$|f(t) - f(s)| \leq c(A^j|t-s| + B^{-j}) \leq M|t-s|^\gamma,$$

como era para ser mostrado.  $\square$

**Teorema 9.** A função  $\mathcal{K}(t)$  satisfaz a condição de Lipschitz de expoente  $\gamma = \frac{\log 3}{\log 4}$ , ou seja,

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq M|t-s|^\gamma \quad \forall t, s \in [0, 1].$$

**Demonstração.** Observe que,  $|K_{j+1}(t) - K_j(t)| \leq 3^{-j}$ . Como  $K_j$  percorre uma distância de  $3^{-j}$  em  $4^{-j}$  unidades de tempo, então  $|K'_j(t)| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^j$ , exceto quando  $t = \frac{\ell}{4^j}$  que corresponde aos vértices da curva. Conseqüentemente, devemos ter  $|K_j(t) - K_j(s)| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^j |t-s|$ . Além disso, podemos expressar  $\mathcal{K}(t)$  como:

$$\mathcal{K}(t) = K_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (K_{j+1}(t) - K_j(t)).$$

Assim, utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq |K_1(t) - K_1(s)| + \sum_{j=1}^{\infty} |K_{j+1}(t) - K_j(t) - (K_{j+1}(s) - K_j(s))|.$$

Daí, como  $|K_j(t) - K_j(s)| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^j |t-s|$ , podemos escrever:

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq |K_1(t) - K_1(s)| + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\frac{4}{3}\right)^j (t-s) \right|.$$

Agora, usando a soma da série geométrica, obtemos:

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq |K_1(t) - K_1(s)| + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{1 - \frac{4}{3}} |t-s|.$$

Simplificando, obtemos:

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq |K_1(t) - K_1(s)| + 4|t-s|.$$

Finalmente, aplicando a condição de Lipschitz para  $K_1(t)$ , obtemos:

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq M|t - s|^\gamma + 4|t - s|,$$

onde  $M$  é uma constante. Portanto, a função  $\mathcal{K}(t)$  satisfaz a condição de Lipschitz com expoente  $\gamma = \frac{\log 3}{\log 4}$ .  $\square$

### 4.3 A curva de Koch não é diferenciável

Para mostrar a não diferenciabilidade dessa curva, vamos seguir uma abordagem baseada na sua construção apresentada nas subseções anteriores.

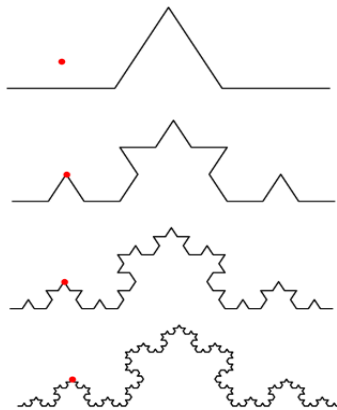
**Teorema 10.** *A curva de Von Koch  $t \mapsto \mathcal{K}_\ell(t)$ ,  $\frac{1}{4} < \ell \leq \frac{1}{2}$ , não é diferenciável em ponto algum.*

**Demonstração.** *Temos que a função*

$$K_J(t) = K_1(t) + \sum_{j=1}^J (K_{j+1}(t) - K_j(t))$$

é uma parametrização para a curva dada. Se  $t = \frac{k}{4^j}$  para um inteiro  $k$ , então para  $j \geq n$ ,  $K_{j+1}(t) - K_j(t) = 0$  pela propriedade de coincidência dos vértices. Isso pode ser notado na figura abaixo. Em cada etapa da curva, sempre que um dado ponto se torna vértice, ele permanece vértice em todas as etapas seguintes.

Figura 14 – Vértices coincidentes das curvas



Fonte: Autoria própria.

Logo,

$$K\left(\frac{k}{4^j}\right) = K_j\left(\frac{k}{4^j}\right)$$

e

$$K\left(\frac{k+1}{4^j}\right) = K_j\left(\frac{k+1}{4^j}\right)$$

Assim,

$$\left| K\left(\frac{k+1}{4^j}\right) - K\left(\frac{k}{4^j}\right) \right| = l^j$$

porque estes são vértices adjacentes em  $K_j$ . Daí, para um dado  $t$  e  $j$ , precisamos escolher um inteiro  $k$  tal que  $\frac{k}{4^j} \leq t \leq \frac{k+1}{4^j}$  e analisando o que acontece com o quociente de derivação

$$\frac{|K(\frac{k+1}{4^n}) - K(\frac{k}{4^n})|}{\frac{k+1}{4^n} - \frac{k}{4^n}} = \frac{l^n}{(1/4)^n}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Temos que, para  $l > 1/4$ , isso não vai convergir, o que significa que a derivada em  $t$  não existe. Portanto, a curva desenvolvida por Koch, não possui derivada em ponto algum.  $\square$

**Observação.** A respeito da curva de Koch, podemos destacar algumas observações: A curva  $\mathcal{K}$  é uma entre uma família de curvas construídas de forma semelhante. Para cada  $\ell$ ,  $\frac{1}{4} < \ell < \frac{1}{2}$ , considere, na primeira etapa, a curva  $K_1^\ell(t)$  dada por quatro segmentos de reta, cada um com comprimento  $\ell$ , o primeiro e o último no eixo  $x$ , e o segundo e o terceiro formando dois lados de um triângulo isósceles cuja base está no eixo  $x$ . O caso  $\ell = \frac{1}{3}$  corresponde à curva de von Koch previamente definida. De maneira análoga ao caso anterior, obtém-se uma curva  $\mathcal{K}_\ell$ , e pode-se ver que  $\dim(\mathcal{K}_\ell) = \frac{\log 4}{\log(1/\ell)}$ . Assim, para cada  $\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ , temos uma curva de dimensão  $\alpha$ . Note que quando  $\ell \rightarrow \frac{1}{4}$ , a curva limite é um segmento de reta, que tem dimensão 1 e quando  $\ell \rightarrow \frac{1}{2}$ , o limite pode ser visto como correspondendo a uma curva que “preenche o espaço”. Além disso, a complexidade da curva de Koch é explorada com conceitos de medidas, como a dimensão de Hausdorff, que nos permite quantificar o “tamanho” de formas irregulares e entender melhor a natureza dos fractais.



## 5 Teorema da categoria de Baire e funções contínuas sem derivada em ponto algum

O teorema da categoria de Baire, de modo geral, afirma que qualquer união enumerável de conjuntos magros é tão pequena que seu complemento é denso. Adicionando a hipótese de que o espaço é completo, temos a afirmação do teorema da categoria de Baire em um espaço métrico geral. Antes de enunciar e demonstrar o teorema de Baire, um dos mais férteis da teoria dos Espaços Métricos, vamos falar um pouco sobre a história do matemático que dá nome a esse Teorema.

### 5.1 Teorema da categoria de Baire

René-Louis Baire (1874-1932) foi um matemático francês que nasceu em uma família pobre de classe trabalhadora em Paris, onde seu pai era alfaiate. Apesar de ter vindo de uma família de classe trabalhadora, ele recebeu uma bolsa de estudos para frequentar o Liceu Lakanal, onde se destacou academicamente.

Figura 15 – René-Louis Baire



Fonte: Biografia de Baire.

Em seguida, ingressou na École Normale Supérieure, onde estudou matemática. Após uma nomeação em Bar-le-Duc, ele se concentrou na teoria das funções e no conceito de limite, desenvolvendo uma classificação das funções em classes, uma contribuição significativa para a análise matemática. Entre 1901 e 1907, ele lecionou na Universidade de Montpellier e depois na Faculdade de Ciências de Dijon, onde se tornou professor de Análise. Sua pesquisa influenciou profundamente o desenvolvimento da análise matemática, e ele é lembrado principalmente pelo Teorema de Baire na teoria dos espaços métricos.

**Teorema 11** (Teorema de Baire). *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo, e  $S$  uma união enumerável de conjuntos magros em  $X$ . Então  $X \setminus S$  é denso em  $X$ .*

**Demonstração.** *Seja  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ , onde cada conjunto  $S_n$  é magro, e seja  $B_0$  uma bola aberta não vazia em  $X$ . Para mostrar que  $X \setminus S$  é denso em  $X$ , devemos provar que*

$$(X \setminus S) \cap B_0 \neq \emptyset.$$

*Escolhemos, por indução, uma sequência de bolas  $B_n = B_n(x_n, r_n)$  com  $r_n < \frac{1}{n}$  tal que*

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n \setminus \overline{S_{n+1}}.$$

*Para ver que isso é possível, primeiro note que*

$$B_n \setminus \overline{S_{n+1}} \neq \emptyset,$$

*pois  $S_{n+1}$  é magro, e, portanto  $\overline{S_{n+1}}$ , também é magro. Assim, podemos escolher*

$$x_{n+1} \in B_n \setminus \overline{S_{n+1}}.$$

*Como  $\overline{S_{n+1}}$  é fechado,*

$$\text{dist}(x_{n+1}, S_{n+1}) > 0,$$

*então podemos escolher  $B_{n+1}$ . A sequência  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy, pois para  $n, m \geq N$ ,*

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < \frac{2}{N}.$$

*Como  $X$  é completo, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Mas  $x_{n+1} \in B_{n+1}$  para todo  $n$ , então*

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_0 \cap (X \setminus S),$$

*como queríamos provar.  $\square$*

## 5.2 O conjunto das funções contínuas sem derivada em ponto algum

Nos capítulos anteriores, ficou claro que existem funções contínuas em nenhum lugar diferenciáveis, mas quantas existem? Uma resposta simples seria “infinitamente muitas”. No entanto, podemos aprofundar ainda mais a nossa compreensão sobre o tamanho do conjunto  $\mathcal{ND}[a, b]$ , utilizando o Teorema da Categoria de Baire, que possui várias aplicações importantes para provar a existência de objetos que podem ser difíceis de imaginar ou construir.

Uma dessas aplicações demonstra o tamanho do conjunto  $\mathcal{ND}[a, b]$ . O método envolve exibir esses objetos como membros de um espaço métrico completo apropriado e, em seguida, demonstrar que os objetos com a propriedade desejada formam um subconjunto residual desse espaço. Conforme o Teorema da Categoria de Baire, essas funções existem em abundância, formando um conjunto denso e residual em  $C[a, b]$ .

**Definição 22.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , e seja  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo gráfico é uma linha reta. Dizemos que  $L$  cruza  $f$  (ou  $f$  cruza  $L$ ) se existe  $x_0 \in [a, b]$  e  $\delta > 0$  tal que  $f(x_0) = L(x_0)$  e:*

1.  $L(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in [x_0 - \delta, x_0] \cap [a, b]$  e  $L(x) \geq f(x)$  para todo  $x \in [x_0, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ , ou
2.  $L(x) \geq f(x)$  para todo  $x \in [x_0 - \delta, x_0] \cap [a, b]$  e  $L(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in [x_0, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ .

Figura 16 – Esboços das condições 1 e 2.

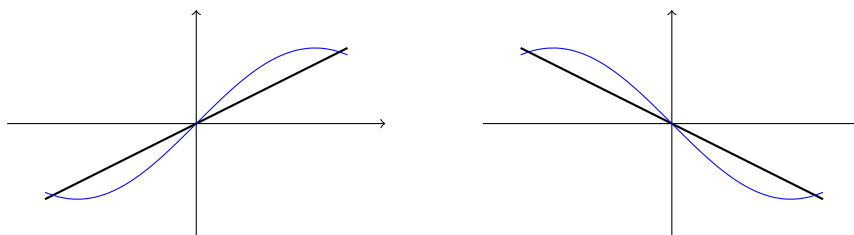


Figura 17 – Fonte: Autoria própria.

**Exemplo 16.** *Considere a função  $f(x) = \sin(x)$ . No ponto  $x = 0$ , o eixo  $x$  (ou seja, a linha horizontal  $y = 0$ ) cruza  $f$ , pois no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , a linha está acima do gráfico de  $f$  à esquerda em  $(-\pi, 0)$  e abaixo à direita em  $(0, \pi)$ . De fato, toda linha através de  $(0, 0)$  cruza  $f$ . No ponto  $(\pi/2, 1)$ , todas as linhas que atravessam esse ponto, exceto a linha horizontal  $y = 1$ , cruzam  $f$ . Como a linha  $y = 1$  fica sempre acima do gráfico de  $f$ , ela não se cruza.*

**Exemplo 17.** É fácil dar exemplos de funções contínuas que “oscilam” tanto perto de um ponto específico que é impossível para qualquer linha cruzar o gráfico naquele ponto. As funções  $f(x) = \sqrt{|x|}\sin(1/x)$   $f(0) = 0$  e  $g(x) = |f(x)|$ . Observe que em todos os outros pontos do gráfico de  $f$  ou  $g$  há muitas linhas que se cruzam (Figuras 18 e 19).

Figura 18 – Gráfico da função  $f$

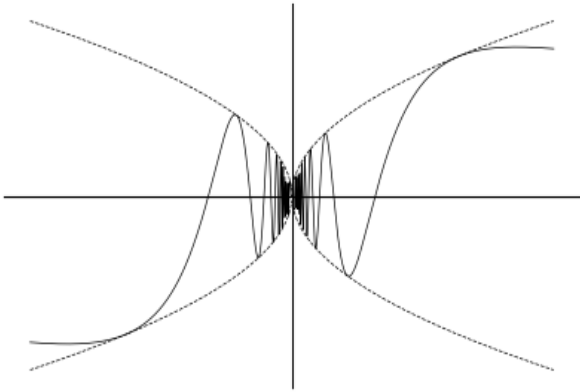
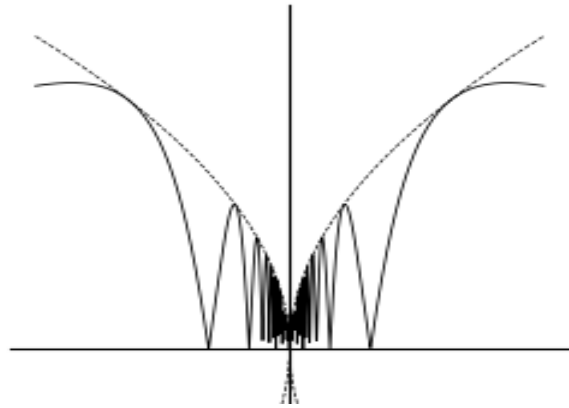


Figura 19 – Gráfico da função  $g$



Fonte: Autoria própria.

Seja  $f \in C[a, b]$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Defina uma função  $f_{-\gamma}$  dada por  $f_{-\gamma}(x) = f(x) - \gamma x$ . Assim,  $f_{-\gamma}$  é obtido de  $f$  subtraindo a função linear  $L(x) = \gamma x$  de  $f$ . Observe que uma linha de inclinação  $\gamma$  cruza o gráfico de  $f$  em  $x_0$  se, e somente se, uma linha horizontal correspondente cruza o gráfico de  $f_{-\gamma}$  em  $x_0$ .

**Teorema 12.** O conjunto  $Z = \{f \in C[a, b] : f \text{ não cruza linhas}\}$  é um subconjunto residual de  $C[a, b]$ .

**Demonstração.** Queremos expressar  $X \setminus Z$  como uma união enumerável de conjuntos magros. Observe que, se  $f \in X \setminus Z$ , existe pelo menos uma linha que cruza  $f$  em algum ponto  $x$ . Temos que  $f$  (ou  $-f$ ) está em um dos conjuntos  $A_n$  definidos como segue. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $A_n$  o conjunto das funções  $f \in C[a, b]$  para as quais existe  $\gamma \in [-n, n]$  e  $x \in [a, b]$  tal que

$$f - \gamma(t) \leq f - \gamma(x) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x - 1/n, x)$$

e

$$f - \gamma(t) \geq f - \gamma(x) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x, x + 1/n).$$

De fato, se  $f \in A_N$ , então  $f$  também está em  $A_n$  para todo  $n > N$ . Para que uma função esteja em  $A_n$ , deve haver pelo menos uma linha cuja inclinação esteja entre  $-n$  e  $+n$  quando cruza a função. Além disso,  $1/n$  especifica o comprimento de um intervalo no qual essa linha deve permanecer acima ou abaixo da função (antes de cruzá-la novamente).

Seja  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Mostramos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  é fechado e que o complemento de  $A_n$  é denso. Segue que cada  $A_n$  é denso em nenhum lugar e, portanto,  $A$  é um subconjunto de primeira categoria de  $C[a, b]$ . Para verificar que  $A_n$  é fechado, seja  $\{f_k\}$  uma sequência de funções em  $A_n$  tal que  $f_k \rightarrow f$  no espaço  $C[a, b]$ . Devemos mostrar que  $f \in A_n$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função  $f_k$  é um membro de  $A_n$  e, portanto, existe  $\gamma_k \in [-n, n]$  e  $x_k \in [a, b]$  tal que

$$f - \gamma_k(t) \leq f - \gamma_k(x_k) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x_k - 1/n, x_k)$$

e

$$f - \gamma_k(t) \geq f - \gamma_k(x_k) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x_k, x_k + 1/n).$$

Pelo Teorema 2 aplicado à sequência de pontos  $\{x_k\}$ , existe uma subsequência  $\{x_{k_i}\}$  de  $\{x_k\}$  que converge para algum ponto  $x_0$  em  $[a, b]$ . Aplicando novamente o Teorema 2, obtemos uma subsequência dessa sequência,  $\{x_{k_{ij}}\}$  tal que  $\{\gamma_{k_{ij}}\}$  converge para algum  $\gamma_0 \in [-n, n]$ . Note que

$$f - \gamma_0(t) \leq f - \gamma_0(x_0) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x_0 - 1/n, x_0)$$

e

$$f - \gamma_0(t) \geq f - \gamma_0(x_0) \text{ quando } t \in [a, b] \cap (x_0, x_0 + 1/n).$$

Assim,  $f \in A_n$ . Como isso é verdadeiro para todas as sequências convergentes escolhidas de  $A_n$ , concluímos que  $A_n$  é fechado em  $C[a, b]$ . Para mostrar que  $A_n$  é denso em nenhum lugar, verificamos que toda bola aberta em  $C[a, b]$  contém pontos que não pertencem a  $A_n$ . Seja  $B(g, \varepsilon)$  uma bola aberta em  $C[a, b]$ . Assim, podemos escolher uma função  $f$  apropriada com inclinações íngremes tal que

$$f \in B(g, \varepsilon) \setminus A_n.$$

Intuitivamente, os segmentos de linha que compõem o gráfico de  $f$  têm inclinações tão íngremes e há tantos desses segmentos que nenhuma linha cuja inclinação esteja entre  $-n$  e  $+n$  pode cruzar o gráfico como requerido para  $f$  estar em  $A_n$ . Assim,  $A_n$  é denso em nenhum lugar, e  $A$  é de primeira categoria. Exatamente os mesmos argumentos mostram que o conjunto  $B = \{f \in C[a, b] : -f \in A\}$  é de primeira categoria. Consequentemente,  $A \cup B$  é de primeira categoria e segue que  $Z = C[a, b] \setminus (A \cup B)$  é residual. Pode-se verificar que todo membro de  $Z$  não cruza nenhuma linha.  $\square$

**Teorema 13.** A classe de funções contínuas, em que não possui derivada em ponto algum, forma um subconjunto residual de  $C[a, b]$ .

**Demonstração.** Observe que se uma função contínua é diferenciável em um ponto  $x_0 \in (a, b)$ , com  $f'(x_0) = \gamma$ , então qualquer linha cuja inclinação não é  $\gamma$  e que passa por  $(x_0, f(x_0))$  cruzará  $f$ . Isto implica que cada membro da classe de funções  $Z$  discutida no Teorema 12 não é diferenciável em nenhum momento. Assim, este teorema segue

diretamente do Teorema 12, uma vez que o conjunto de funções diferenciáveis em nenhum lugar contém o conjunto residual  $Z$  e, portanto, também deve ser residual. Uma análise mais cuidadosa mostra que para cada  $f \in Z$ ,  $+\infty$  e  $-\infty$  são números derivados de  $f$  em cada ponto.  $\square$

## 6 Considerações Finais

Neste estudo, utilizamos as funções desenvolvidas pelos matemáticos Karl Weierstrass e Helge von Koch para demonstrar a existência de funções contínuas que não possuem derivadas em nenhum ponto. Foram introduzidos conceitos da Análise Real, que serviram como base para o desenvolvimento do tema, e de Espaços Métricos, que permitiram a análise de propriedades importantes dessas funções.

Observamos que outros matemáticos haviam explorado conceitos similares antes de Weierstrass, mas suas descobertas não tenham sido publicadas imediatamente. Além disso, embora essas funções tenham sido inicialmente mal vistas pelos matemáticos do século XVIII, elas causaram uma reconsideração relutante na análise matemática e, posteriormente, demonstraram grande relevância. Em particular, essas funções são abundantes no conjunto das funções contínuas, fato estabelecido pelo Teorema da Categoria de Baire.

Hoje em dia, a existência dessas funções é fundamental para diversas áreas de investigação e aplicação, como fractais, caos e wavelets. A aceitação e o desenvolvimento das funções contínuas não diferenciáveis tiveram um impacto em várias disciplinas, influenciando teorias e métodos matemáticos em campos como a física, a engenharia e a ciência computacional. Assim, o avanço dessa teoria deu oportunidade para novas pesquisas e aplicações, consolidando sua importância na matemática moderna.



# Referências

- 1 Biografia de Baire. Acessado em 30/03/2024. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baire/>.
- 2 Biografia de Koch. Acessado em 30/03/2024. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Koch/>.
- 3 FREITAS, Lorena Brizza Soares; DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. A função de van der Waerden: funções contínuas sem derivada em ponto algum são mais frequentes do que pensamos!. 2011.
- 4 LIMA, Elon Lages. Análise real: volume 1. Funções de uma variável. 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- 5 LIMA, Elon Lages. Curso de Análise Real. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.
- 6 LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. Rio de Janeiro: Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- 7 STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. Princeton lectures in analysis. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- 8 THIM, Johan. Continuous Nowhere Differentiable Functions. Dissertação de mestrado, Programa de Mestrado em Ciências, Universidade de Tecnologia de Luleå, 2003.
- 9 THOMSON, B. S.; BRUCKNER, J. B.; BRUCKNER, A. M. Elementary Real Analysis. 2. ed. New York: Wiley, 2008.